

Étude d'un problème de transmission non coercif

Sujet proposé par Lucas Chesnel
 Lucas.Chesnel@cmap.polytechnique.fr¹

Dans ce projet, nous nous intéressons à un problème de transmission non coercif apparaissant dans l'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques en présence de métaux ou de certains types de métamatériaux. De façon générale, dans un matériau, les variations du champ électromagnétique sont gouvernées par les équations de Maxwell. Ces dernières mettent en jeu des coefficients physiques, la permittivité diélectrique ε et la perméabilité magnétique μ , qui caractérisent les propriétés du milieu. Pour les métaux, dans certaines gammes de fréquences, ε peut être en première approximation considérée réelle négative. De même, certains métamatériaux peuvent être représentés par des ε et/ou des μ négatives. Les métamatériaux sont des structures complexes constituées de résonateurs petits devant la longueur d'onde que l'on choisit et que l'on agence de façon à obtenir un matériau qui, au niveau macroscopique, présente des propriétés intéressantes pour les applications. En particulier, les physiciens mènent des recherches importantes pour concevoir des *métamatériaux doublement négatifs* (ε et μ négatifs) qui présenteraient un indice de réfraction n lui-même négatif. Il existe de nombreuses applications assez extraordinaires pour ces métamatériaux négatifs allant de la réalisation de lentilles parfaites permettant d'observer des objets de très petite taille, à la fabrication de pièges à photons.

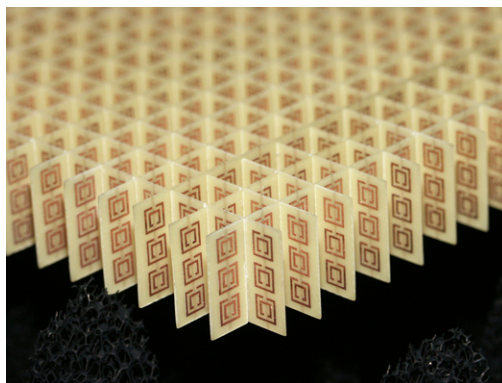


FIGURE 1 – Un exemple de métamatériau constitué de résonateurs en cuivre. *Crédits Nasa.*

D'un point de vue mathématique, l'étude des équations de Maxwell dans des milieux mêlant matériaux positifs classiques et matériaux négatifs soulèvent des questions originales. En effet, elle conduit à considérer des équations aux dérivées partielles avec des paramètres qui changent de signe. Ces équations ne rentrent pas dans les cadres usuels et une théorie adaptée doit être développée. Dans ce projet, sur un problème académique, nous nous proposons d'aborder quelques aspects de cette théorie.

Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné à frontière $\partial\Omega$ Lipschitzienne. Nous supposons Ω partitionné en deux sous domaines Ω_1, Ω_2 tels que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ (voir Figure 2). Pour modéliser les différents matériaux, nous introduisons la fonction $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sigma = \sigma_1$ sur Ω_1 et $\sigma = \sigma_2$ sur Ω_2 . Ici, σ_1, σ_2 sont deux constantes telles que $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$. Nous définissons

$$H_0^1(\Omega) := \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

1. Si vous avez des questions n'hésitez pas à me contacter ou à passer au bureau 2.2.29 du CMAP.

Nous munissons cet espace de la norme $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$. Nous nous intéressons au problème

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Ici, $f \in L^2(\Omega)$ désigne le terme source, c'est une donnée du problème. Nous appelons *contraste* la quantité

$$\kappa_{\sigma} = \sigma_2 / \sigma_1.$$

1 Mise en route

Question 1. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, $\vec{w} \in (L^2(\Omega))^2$ tel que $\operatorname{div} \vec{w} \in L^2(\Omega)$, on a la formule de Green suivante

$$\int_{\Omega} v(x) \operatorname{div} \vec{w}(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \vec{w}(x) dx. \quad (\text{G}_3)$$

En admettant ce résultat, montrer que u vérifie le Problème (\mathcal{P}) si et seulement si u est solution du problème variationnel

$$(\mathcal{P}_v) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

où $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v dx$ et $\ell(v) = \int_{\Omega} f v dx$.

Dans la suite nous dirons que le Problème (\mathcal{P}_v) est *bien posé* si pour tout $\ell \in H^{-1}(\Omega)$, (\mathcal{P}_v) possède une unique solution dépendant continûment de ℓ . Dans cette définition, $H^{-1}(\Omega)$ désigne le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace de Banach constitué des formes linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$. Cet espace est muni de la norme

$$\|\ell\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\ell(\varphi)|}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}.$$

Question 2. Montrer que le problème (\mathcal{P}_v) est bien posé lorsque le contraste vérifie $\kappa_{\sigma} > 0$.

Question 3. Prouver que la forme a n'est pas coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ quand $\kappa_{\sigma} < 0$. Dans ce cas de figure, nous ne pouvons donc pas utiliser le théorème de Lax-Milgram pour affirmer que (\mathcal{P}_v) est bien posé.

2 Une configuration pour laquelle (\mathcal{P}_v) n'est pas bien posé

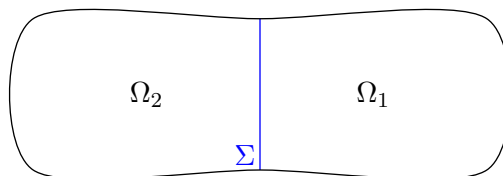


FIGURE 2 – Exemple de configuration symétrique par rapport à l'axe (Oy) .

Dans ce paragraphe, nous allons prouver qu'il existe une configuration très simple pour laquelle (\mathcal{P}_v) n'est pas bien posé. Considérons un domaine Ω symétrique par rapport à l'axe (Oy) , *i.e.* vérifiant la propriété $\Omega = \{(x, y) \in \Omega \mid (-x, y) \in \Omega\}$ (voir Figure 2). Définissons $\Omega_1 := \{(x, y) \in \Omega \mid x > 0\}$ et $\Omega_2 := \{(x, y) \in \Omega \mid x < 0\}$. Dans cette configuration, que nous qualifierons dans la suite de *symétrique*, l'interface Σ entre les deux régions vérifie $\Sigma = \{(x, y) \in \Omega \mid x = 0\}$. Si φ est une fonction de $L^2(\Omega)$, nous notons $\varphi_1 := \varphi|_{\Omega_1}$ et $\varphi_2 := \varphi|_{\Omega_2}$.

Question 4. Soit g un élément de $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$. Expliquer, sans nécessairement détailler la démonstration, pourquoi le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } v_1 \in H^1(\Omega_1) \text{ tel que} \\ -\sigma_1 \Delta v_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \\ v_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \overline{\Sigma} \\ v_1 = g \quad \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

possède une unique solution.

Question 5. Définissons sur Ω_2 la fonction v_2 telle que $v_2(x, y) = v_1(-x, y)$. Montrer que lorsque $\kappa_\sigma = -1$, le couple (v_1, v_2) constitue une solution du problème de transmission

$$(\mathcal{P}_{\text{tr}}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \text{ tel que} \\ -\sigma_1 \Delta u_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \\ -\sigma_2 \Delta u_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \\ u_1 - u_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma := \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} \\ \sigma_1 \partial_n u_1 - \sigma_2 \partial_n u_2 = 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ u_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \\ u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2. \end{array} \right.$$

Question 6. Établir que si le couple (u_1, u_2) vérifie le problème $(\mathcal{P}_{\text{tr}})$ alors la fonction u , telle que $u = u_1$ dans Ω_1 et $u = u_2$ dans Ω_2 , est solution du Problème (\mathcal{P}_v) . En déduire que pour la géométrie considérée, avec un contraste $\kappa_\sigma = -1$, le problème (\mathcal{P}_v) n'est pas bien posé.

3 Obtention de critères assurant que (\mathcal{P}_v) est bien posé

Dans ce paragraphe, nous proposons une méthode permettant d'obtenir un critère portant sur la géométrie et le contraste assurant que le problème (\mathcal{P}_v) est bien posé.

Question 7. Supposons qu'il existe un *isomorphisme*² \mathbf{T} de $H_0^1(\Omega)$ tel que la forme $(u, v) \mapsto a(u, \mathbf{T}v)$ soit coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Montrer qu'alors le Problème (\mathcal{P}_v) est bien posé.

Question 8. Dans cette approche, nous souhaitons utiliser l'opérateur \mathbf{T} pour compenser le changement de signe de σ . Nous serions ainsi très heureux de pouvoir prendre \mathbf{T} tel que $\mathbf{T}u = u$ dans Ω_1 et $\mathbf{T}u = -u$ dans Ω_2 . En effet, nous pourrions alors écrire, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u, \mathbf{T}u) = \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla u|^2 = \min(\sigma_1, \sigma_2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Ce choix n'est cependant pas satisfaisant. Expliquer pourquoi.

Question 9. Introduisons l'application R telle que $(R\varphi)(x, y) = \varphi(-x, y)$ pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Définissons l'opérateur \mathbf{T} tel que

$$\mathbf{T}\varphi = \begin{cases} \varphi & \text{dans } \Omega_1 \\ -\varphi + 2R\varphi & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}. \quad (1)$$

Démontrer que \mathbf{T} constitue un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$.

2. Soient X un espace de Banach et L un opérateur de X dans X . Nous dirons que L est un isomorphisme de X si L est linéaire, continu, bijectif et d'inverse continu. Le théorème de Banach (voir [2, Corollaire II.6]) permet de montrer que si L est linéaire, continu et bijectif alors L est un isomorphisme.

Question 10. Prouver que le problème (\mathcal{P}_v) est bien posé lorsque le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ vérifie $-1 < \kappa_\sigma < 0$. Pour cela, on pourra utiliser l'inégalité de Young $2ab \leq \eta a^2 + \eta^{-1}b^2$, $\forall a, b \geq 0$, $\forall \eta > 0$ en choisissant un bon η ...

Question 11. Montrer, en modifiant la définition de l'isomorphisme T introduite en (1) que (\mathcal{P}_v) est également bien posé lorsque le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ vérifie $\kappa_\sigma < -1$.

Ainsi pour la configuration symétrique, seul le cas du contraste égal à -1 , abordé dans le paragraphe précédent, pose problème. Plus précisément, nous venons de montrer le résultat suivant.

Theorem 1. *Pour la configuration symétrique telle que décrite en début de §2, le problème (\mathcal{P}_v) est bien posé si et seulement si le contraste $\kappa_\sigma < 0$ vérifie $\kappa_\sigma \neq -1$.*

Question 12 (optionnelle). Réciproquement, pour un domaine Ω non nécessairement symétrique, prouver que si (\mathcal{P}_v) est bien posé, alors il existe un isomorphisme T de $H_0^1(\Omega)$ tel que $(u, v) \mapsto a(u, Tv)$ soit coercive. Pour ce faire, lorsque (\mathcal{P}_v) est bien posé, on pourra commencer par étudier les propriétés de l'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ défini au moyen du théorème de représentation de Riesz tel que

$$\int_{\Omega} \nabla(Au) \cdot \nabla v \, dx = a(u, v), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Question 13. Définissons les domaines $\Omega =]-1; 1[\times]-1; 1[$, $\Omega_1 =]0; 1[\times]0; 1[$ et $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$ (voir Figure 3). Donner un critère sur le contraste assurant que (\mathcal{P}_v) est bien posé. *Indice : travailler avec un opérateur T défini comme (1) en modifiant la définition de R ...*

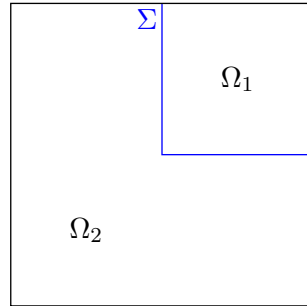


FIGURE 3 – Configuration avec un coin.

Question 14 (optionnelle). Dans cette question, nous munissons $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ du produit scalaire de $H^2(\Omega)$. Lorsque Ω est régulier (de classe \mathcal{C}^2 (voir [1, théorème 5.2.26])) ou convexe (voir [3, théorème 3.2.1.2])), l'opérateur $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ définit un isomorphisme. En admettant ce résultat, montrer que le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma \Delta u \cdot \Delta v \, dx = \tilde{\ell}(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \end{array} \right.$$

où $\tilde{\ell}$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, est bien posé pour tout $\kappa_\sigma < 0$.

4 Approximation numérique

Nous souhaitons calculer une approximation de la solution du Problème (\mathcal{P}_v) lorsque celui-ci est bien posé. Pour cela, nous allons utiliser une méthode d'élément finis. Considérons la configuration symétrique suivante : $\Omega =]-1; 1[\times]0; 1[$, $\Omega_1 =]0; 1[\times]0; 1[$, $\Omega_2 =]-1; 0[\times]0; 1[$ et $\kappa_\sigma \neq -1$. Introduisons \mathcal{T}_h une partition (un maillage) de $\overline{\Omega}$ par des triangles. Nous imposons que les triangles $T_h \in \mathcal{T}_h$ vérifient $T_h \in \overline{\Omega_1}$ ou $T_h \in \overline{\Omega_2}$ (en clair, nous interdisons les triangles à cheval sur l'interface Σ entre les deux régions). Ici, h fait référence au pas du maillage. Définissons l'espace

$$X_h := \{\varphi_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \mid \varphi_h|_{T_h} \in P_1(T_h), \forall T_h \in \mathcal{T}_h\}.$$

Ci-dessus, $P_1(T_h)$ désigne l'espace des fonctions affines sur le triangle T_h . Considérons le nouveau problème, posé en dimension finie,

$$(\mathcal{P}_v^h) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in X_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in X_h \end{array} \right.$$

où les formes a et ℓ ont été définies après (\mathcal{P}_v) .

Question 15. Donner une condition sur le contraste $\kappa_\sigma < 0$ et sur le maillage \mathcal{T}_h garantissant que le Problème (\mathcal{P}_v^h) possède une unique solution. Montrer alors l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H_0^1(\Omega)},$$

où C est une constante indépendante de h et où u est la solution de (\mathcal{P}_v) . Lorsque $\kappa_\sigma \neq -1$, $f \in L^2(\Omega)$, pour la géométrie considérée ici, on peut montrer que u appartient à $H^2(\Omega \setminus \bar{\Sigma})$. Cela permet de prouver l'estimation $\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C h \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Question 16. Écrire un programme en *FreeFem++* permettant de calculer la solution du problème (\mathcal{P}_v^h) dans le cas où $f = 1$, $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_2 = -2$.

Question 17. Résoudre le problème (\mathcal{P}_v^h) pour la configuration géométrique avec un coin de la question 13. On prendra $f = 1$, $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_2 = -0.999$. Raffiner le maillage. Qu'observe-t-on? Essayer d'autres configurations en modifiant la valeur de $\sigma_2 < 0$. Analyser les résultats des expériences numériques en fonction du critère obtenu à la question 13.

Pour construire une suite de maillages présentant certaines propriétés de symétrie (c'est important), on utilisera le code suivant.

```
int debut=5;
int fin=40;
mesh carreDiel,carreMeta,carreMeta1,carreMeta2,carreMeta3,th;
// On met la reference 1 sur le bord du domaine
int[int] labelDiel=[2,1,1,2];
int[int] labelMeta1=[2,2,1,1];
int[int] labelMeta2=[1,2,2,1];
int[int] labelMeta3=[1,1,2,2];
for (int n=debut;n<=fin;n++)
{
carreDiel = square(n,n,[x,y],label=labelDiel,flags=1);
carreMeta1 = square(n,n,[-1+x,y],label=labelMeta1,flags=1);
carreMeta2 = square(n,n,[-1+x,-1+y],label=labelMeta2,flags=1);
carreMeta3 = square(n,n,[x,-1+y],label=labelMeta3,flags=1);
carreMeta = carreMeta1+carreMeta2+carreMeta3;
th = carreDiel+carreMeta;
plot(th,wait=1);
}
```

Références

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, deuxième édition*. École Polytechnique, Palaiseau, 2012.
- [2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Dunod, Paris, 1999.
- [3] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, London, 1985.