Comment réparer habilement une corde vibrante

Sujet proposé par Lucas Chesnel
Lucas.Chesnel@cmap.polytechnique.fr

Préambule. Vous n'êtes pas tenus de rédiger votre rapport en LaTeX. Des copies classiques avec des simulations numériques découpées et collées conviendront très bien. En général, vous négligez la présentation des résultats numériques qui sont difficiles à corriger. Essayez d'extraire les représentations les plus parlantes. Soyez rigoureux et précis tout en restant aussi concis que possible. Les commentaires sont les bienvenus. Si vous avez des questions n'hésitez pas à m'écrire ou à passer au bureau 3.0.08 du CMAP.

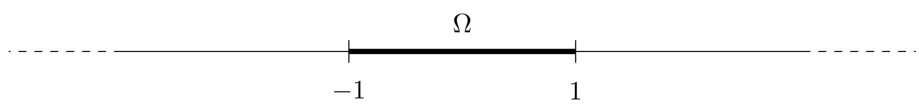

FIGURE 1 – Corde vibrante avec un défaut.

Dans ce projet, nous nous intéressons à la propagation d'ondes dans une corde en tension de longueur infinie. Cela nous amène à considérer l'équation

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} - (c(x))^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = F(x,t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Ici, $U(x,t) \in \mathbb{R}$ correspond au déplacement de la corde au point x à l'instant t, $c(x)$ est la célérité des ondes et $F(x,t)$ désigne un terme source. La célérité est définie par $c(x) = \sqrt{T_0/\mu(x)}$ où $T_0 = 1$ désigne la tension de la corde et $\mu(x)$ sa masse linéique. Une portion de corde a été remplacée en $\Omega :=]-1;1[$ de sorte que $\mu = 1$ dans $\mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}$ et $\mu \not\equiv 1$ dans Ω. Notre objectif est de trouver des fonctions μ telles que les ondes se propagent pour $|x| > 1$ comme s'il n'y avait pas de défaut dans la corde, autrement dit comme si on avait $\mu \equiv 1$.

Lorsque F est de la forme $F(x,t) = \Re e\,(f(x)e^{-i\omega t})$, on peut chercher U sous la forme $U(x,t) = \Re e\,(u(x)e^{-i\omega t})$ (régime harmonique en temps). Cela nous conduit à étudier le problème

$$-u''(x) - \omega^2 \mu(x)\, u(x) = \mu(x)\, f(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1 Problème de diffraction d'une onde incidente

Dans le cas où $\mu \equiv 1$, $f \equiv 0$, les solutions de (1) sont des combinaisons des fonctions $e^{\pm i\omega x}$. Pour $\omega > 0$, $e^{+i\omega x}$ (resp. $e^{-i\omega x}$) est une onde se propageant de $-\infty$ (resp. $+\infty$) vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)[1].

Revenons à la situation $\mu \not\equiv 1$. Nous supposerons μ continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et à valeurs

1. Pour comprendre cette phrase, il faut revenir en temps et étudier le comportement de $(x,t) \mapsto e^{\pm i\omega x}e^{-i\omega t}$.

réelles. Nous nous intéressons au problème de diffraction de l'onde *incidente* $u_i := e^{i\omega x}$ par le défaut situé en Ω. Pour compléter le problème (1), il est nécessaire de prescrire des conditions sur le comportement de la solution u pour $x \to \pm\infty$. En quelque sorte, il nous faut imposer des « conditions aux limites à l'infini ». Pour $x \to \pm\infty$, nous imposons au champ *diffracté*[2] $u_s = u - u_i$ d'être sortant, autrement dit de se décomposer uniquement sur les $e^{\pm i\omega x}$ pour $\pm x > 1$. Finalement, cela nous amène à étudier le problème

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ tel que}\\ u'' + \omega^2 \mu\, u \quad = \quad 0 \quad \text{ dans } \mathbb{R}\\ u_s = u - u_i = s_\pm e^{\pm i\omega x} \qquad \text{pour } \pm x > 1\end{array}\right. \tag{2}$$

où $s^\pm$ sont des constantes inconnues de $\mathbb{C}$. Dans la littérature, on appelle *coefficient de réflexion* et *coefficient de transmission* les quantités $R := s_-$, $T := 1 + s_+$.

Le caractère non borné du domaine $\mathbb{R}$ ne permet pas d'appliquer directement les méthodes de discrétisation vues en cours pour calculer une approximation numérique de u solution de (2). Dans la suite, nous allons expliquer comment approcher $u|_\Omega$.

Question 1. Montrer que si u est solution de (2) alors $u|_\Omega$ est solution du problème

$$\left|\begin{array}{lcll}\multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que}}\\ u'' + \omega^2 \mu\, u & = & 0 & \text{dans } \Omega\\ \partial_n u - i\omega u & = & \partial_n u_i - i\omega u_i & \text{en } x = \pm 1,\end{array}\right. \tag{3}$$

avec $\partial_n = \pm\partial_x$ en $x = \pm 1$. Réciproquement, prouver que si u est solution de (3) alors u se prolonge en une solution de (2). Pour cette dernière question, on admettra que si v vérifie $v'' + \omega^2\mu\, v = 0$ dans Ω, $v'' + \omega^2 \mu\, v = 0$ dans $\mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}$, $v(1^-) = v(1^+)$, $v(-1^-) = v(-1^+)$, $\partial_x v(1^-) = \partial_x v(1^+)$, $\partial_x v(-1^-) = \partial_x v(-1^+)$ alors v satisfait $v'' + \omega^2 \mu\, v = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Question 2. Établir que si u vérifie (3) alors u est solution d'un problème variationnel

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que}\\ a(u, v) = \ell(v), \qquad \text{pour tout } v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}).\end{array}\right. \tag{4}$$

On donnera l'expression des formes a et ℓ. Réciproquement, montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ vérifie (4) alors u est solution de (3).

Question 3. Prouver que (4), et donc (3), (2), ont au plus une solution (unicité). On admettra que (4), et donc (3), (2), possèdent une solution (existence). Ce dernier résultat sera montré dans le cours MAP 431.

Question 4. En utilisant un v bien choisi dans (4), établir l'identité

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \qquad \text{(conservation d'énergie).} \tag{5}$$

Question 5. Posons $w_\pm(x) = e^{\pm i\omega x}$. Calculer les quantités

$$\mathrm{I}_- = \Big[\partial_x u_s\, \overline{w_-} - u_s\, \partial_x \overline{w_-}\Big]_{-1}^{+1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_+ = \Big[\partial_x u_s\, \overline{w_+} - u_s\, \partial_x \overline{w_+}\Big]_{-1}^{+1}.$$

En déduire

$$R = \frac{i\omega}{2} \int_\Omega (\mu(x) - 1)\, u(x)\, e^{+i\omega x}\, dx \qquad \text{et} \qquad T = 1 + \frac{i\omega}{2} \int_\Omega (\mu(x) - 1)\, u(x)\, e^{-i\omega x}\, dx. \tag{6}$$

2. « Diffracté » se dit « scattered » en anglais, d'où l'indice $_s$.

2 Non réflexion

Dans la suite, notre objectif est de construire une fonction μ telle que $\mu - 1$ soit à support dans $\overline{\Omega}$ et telle que $R = 0$. Dans une telle situation, le champ diffracté est nul pour $x \leq -1$ et l'énergie est complétement transmise ($|T| = 1$).

Nous allons chercher un matériau du défaut tel que μ soit une petite perturbation du milieu de référence. Plus précisément, nous allons chercher μ sous la forme $\mu = \mu^\varepsilon = 1 + \varepsilon\rho$ où ε est un petit paramètre et où ρ est une fonction à support dans $\overline{\Omega}$ à déterminer. Nous noterons u^ε, R^ε les quantités définies en (2), (6) avec μ remplacé par μ^ε.

Question 6. En décomposant u^ε sous la forme $u^\varepsilon = u_i + u_s^\varepsilon$, montrer que

$$R^\varepsilon = \varepsilon\, dR(0)(\rho) + \varepsilon\, \tilde{R}^\varepsilon \qquad \text{avec} \qquad dR(0)(\rho) = \frac{i\omega}{2}\int_\Omega \rho(x)\, e^{+2i\omega x}\, dx,$$

où $\tilde{R}^\varepsilon$ désigne un reste dont on donnera l'expression. On peut prouver que lorsqu'on effectue une perturbation d'ordre ε du milieu, u_s^ε est en $O(\varepsilon)$. Cela permet de montrer que $\tilde{R}^\varepsilon = O(\varepsilon)$ et justifie le fait que $\tilde{R}^\varepsilon$ est bien un « reste » dans ce développement de Taylor.

Pour fixer les idées, nous divisons le domaine $\Omega =]-1;1[$ en quatre sous-domaines

$$\Omega_1 :=]-1;-1/2[, \qquad \Omega_2 :=]-1/2;0[, \qquad \Omega_3 :=]0;1/2[\qquad \text{et} \qquad \Omega_4 :=]1/2;1[.$$

De plus, nous imposons à ρ (et donc à μ) de prendre des valeurs constantes réelles ρ_i sur Ω_i, $i = 1, \dots, 4$. Cela nous conduit à définir l'espace $\mathrm{X} := \{\varphi$ continue par morceaux sur $\mathbb{R} \,|\, \varphi|_{\Omega_i} =$ cste réel et $\varphi = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}\}$.

Question 7. Trouver des fonctions $\rho^0, \rho^1, \rho^2 \in \mathrm{X} \setminus \{0\}$ telles que

$$dR(0)(\rho^0) = 0, \qquad dR(0)(\rho^1) = 1, \qquad dR(0)(\rho^2) = i. \tag{7}$$

Nous supposons à présent que les fonctions $\rho^0, \rho^1, \rho^2 \in \mathrm{X} \setminus \{0\}$ sont fixées satisfaisant (7). On cherche ρ sous la forme

$$\rho = \rho^0 + \tau^1\rho^1 + \tau^2\rho^2 \tag{8}$$

où τ_1, τ_2 sont des nombres réels à déterminer.

Question 8. Prouver que $R^\varepsilon = 0$ si et seulement si $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2)^T$ vérifie un problème de la forme

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{\tau} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que} \\ \vec{\tau} = G^\varepsilon(\vec{\tau}), \end{array}\right. \tag{9}$$

où l'on donnera l'expression de G^ε, application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, en fonction de $\tilde{R}^\varepsilon$. On admettra dans la suite que pour tout $d > 0$ donné, l'application $\vec{\tau} \mapsto G^\varepsilon(\vec{\tau})$ est une contraction de $\overline{B(O,d)}$ dans $\overline{B(O,d)}$ pour ε suffisamment petit. Cela permet de montrer avec le théorème de point fixe de Banach que (9) admet une unique solution dans $\overline{B(O,d)}$.

Question 9. Montrer que le ρ ainsi construit est non identiquement nul, de sorte que $\mu \not\equiv 1$ (on a bien construit une perturbation qui ne produit pas de réflexion qui n'est pas la perturbation nulle).

Question 10. Quelle est la dimension de l'espace des μ continues par morceaux telles que $R = 0$ et telles que $\mu - 1$ soit à support dans $\overline{\Omega}$?

3 Mise en œuvre numérique

Question 11. Écrire un code de calcul en *Python* permettant d'approcher par éléments finis P1 la solution du problème de diffraction (4). On prendra $\omega = 1$ et $\mu = 2$ sur Ω. Calculer numériquement les coefficients R, T et vérifier que la conservation d'énergie (5) est satisfaite (à une erreur d'approximation près). Éventuellement, on pourra également comparer aux valeurs exactes de R et T qui peuvent être déterminées exactement pour ce μ particulier.

Pour résoudre le problème de point fixe (9), on va procéder par récurrence. Posons $\vec{\tau}_0 = (0,0)^T$ et, pour $n \geq 0$, définissons $\vec{\tau}_{n+1} = G^\varepsilon(\vec{\tau}_n)$. Lorsque $|\vec{\tau}_{n+1} - \vec{\tau}_n| \leq \eta$, où η est un critère donné (et petit), le point fixe a convergé et nous avons obtenu une bonne approximation de la solution de $\vec{\tau} = G^\varepsilon(\vec{\tau})$. Dans la suite, nous notons R_n^ε, u_n^ε, μ_n^ε les quantités introduites précédemment avec ρ remplacé par $\rho_n = \rho^0 + \tau_n^1 \rho^1 + \tau_n^2 \rho^2$ (formule (8)). Observer qu'à chaque étape de l'itération, il faut calculer R_n^ε, ce qui nécessite de résoudre numériquement (4).

Question 12. Exprimer $\vec{\tau}_{n+1}$ en fonction de $\vec{\tau}_n$, ε et R_n^ε. Optionnel : comparer avec la méthode de Newton décrite dans le polycopié p. 150.

Question 13. Coder en *Python* l'algorithme de point fixe. De nouveau on prendra $\omega = 1$. On pourra débuter avec $\varepsilon = 0.1$ et diminuer la valeur si l'algorithme ne converge pas (on rappelle que G^ε est une contraction pour ε suffisamment petit). Pour le critère d'arrêt η, on prendra $\eta = 10^{-5}$. On veillera en outre à imposer un nombre maximum d'itérations dans la boucle, disons 50. Lorsque l'algorithme aura convergé, on affichera μ ainsi que $\Re e\, u_s$, $\Im m\, u_s$ pour vérifier que le champ diffracté est nul pour $x = -1$. On pourra également tracer la courbe $n \mapsto |R_n^\varepsilon|$.

4 Transmission parfaite

Question 14 (optionnelle). En procédant comme à la question 6, calculer $dT(0)(\rho)$, la différentielle de T en 0 dans la direction ρ. Peut-on trouver $\rho^1, \rho^2 \in \mathrm{X} \setminus \{0\}$ telles que

$$dT(0)(\rho^1) = 1, \qquad dT(0)(\rho^2) = i?$$

Quelle hypothèse du théorème des fonctions implicites n'est pas valable ici ? Proposer une méthode pour construire un μ tel que $T = 1$. Dans ce cas, la perturbation dans le matériau de la corde est invisible pour l'observateur générant l'onde incidente $u_i = e^{i\omega x}$ et mesurant le champ diffracté à la fois en $x \leq -1$ et en $x \geq 1$.