Comment réparer habilement une corde vibrante

Sujet proposé par Lucas Chesnel
Lucas.Chesnel@cmap.polytechnique.fr [1]

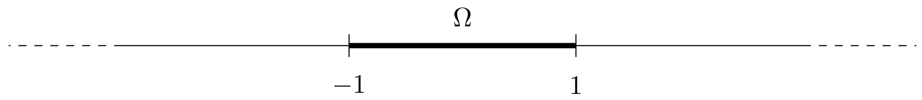

Figure 1 – Corde vibrante avec un défaut.

Dans ce projet, nous nous intéressons à la propagation d'ondes dans une corde en tension de longueur infinie. Cela nous amène à considérer l'équation

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} - (c(x))^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = F(x,t), \qquad x \in \mathbb{R},\, t > 0.$$

Ici, $U(x,t) \in \mathbb{R}$ correspond au déplacement de la corde au point x à l'instant t, $c(x)$ est la célérité des ondes et $F(x,t)$ désigne un terme source. La célérité est définie par $c(x) = \sqrt{T_0/\mu(x)}$ où $T_0 = 1$ désigne la tension de la corde et $\mu(x)$ sa masse linéique. Une portion de corde a été remplacée en $\Omega :=]-1;1[$ de sorte que $\mu = 1$ dans $\mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}$ et $\mu \not\equiv 1$ dans Ω. Notre objectif est de trouver des fonctions μ telles que les ondes se propagent pour $|x| > 1$ comme s'il n'y avait pas de défaut dans la corde, autrement dit comme si on avait $\mu \equiv 1$.

Lorsque F est de la forme $F(x,t) = \Re e\,(f(x)e^{-i\omega t})$, on peut chercher U sous la forme $U(x,t) = \Re e\,(u(x)e^{-i\omega t})$ (régime harmonique en temps). Cela nous conduit à étudier le problème

$$-u''(x) - \omega^2 \mu(x)\, u(x) = \mu(x)\, f(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1 Problème de diffraction d'une onde incidente

Dans le cas où $\mu \equiv 1$, $f \equiv 0$, les solutions de (1) sont des combinaisons des fonctions $e^{\pm i\omega x}$. Pour $\omega > 0$, $e^{+i\omega x}$ (resp. $e^{-i\omega x}$) est une onde se propageant de $-\infty$ (resp. $+\infty$) vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) [2].

Revenons à la situation $\mu \not\equiv 1$. Nous supposerons que $\mu|_\Omega \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est à valeurs réelles. Nous nous intéressons au problème de diffraction de l'onde *incidente* $u_i := e^{i\omega x}$ par le défaut situé en Ω. Pour compléter le problème (1), il est nécessaire de prescrire des conditions sur le comportement de la solution u pour $x \to \pm\infty$. En quelque sorte, il nous faut imposer des « conditions aux limites à l'infini ». Pour $x \to \pm\infty$, nous imposons au champ *diffracté*[3] $u_s = u - u_i$ d'être sortant, autrement dit de se décomposer uniquement sur les $e^{\pm i\omega x}$ pour $\pm x > 1$. Finalement, cela nous amène à étudier le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ tel que} \\ u'' + \omega^2 \mu\, u \;=\; 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \\ u_s = u - u_i = s_\pm e^{\pm i\omega x} \quad \text{pour } \pm x > 1 \end{array} \right. \tag{2}$$

1. Si vous avez des questions n'hésitez pas à me contacter ou à passer au bureau 3.0.08 du CMAP.
2. Pour comprendre cette phrase, il faut revenir en temps et étudier le comportement de $(x,t) \mapsto e^{\pm i\omega x}e^{-i\omega t}$.
3. « Diffracté » se dit « scattered » en anglais, d'où l'indice $_s$.

où $s^{\pm}$ sont des constantes inconnues de $\mathbb{C}$. Dans la littérature, on appelle *coefficient de réflexion* et *coefficient de transmission* les quantités $R = s_-$, $T = 1 + s_+$.

Le caractère non borné du domaine $\mathbb{R}$ ne permet pas d'appliquer directement les méthodes de discrétisation vues en cours pour calculer une approximation numérique de u solution de (2). Dans la suite, nous allons expliquer comment approcher $u|_\Omega$.

Question 1. Montrer que si u est solution de (2) alors $u|_\Omega$ est solution du problème

$$\left| \begin{array}{lcll} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que} & & & \\ u'' + \omega^2 \mu\, u & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u - i\omega u & = & \partial_n u_i - i\omega u_i & \text{en } x = \pm 1, \end{array} \right. \tag{3}$$

avec $\partial_n = \pm\partial_x$ en $x = \pm 1$. Réciproquement, prouver que si u est solution de (3) alors u se prolonge en une solution de (2). Pour cette dernière question, on admettra que si v vérifie $v'' + \omega^2 \mu\, v = 0$ dans Ω, $v'' + \omega^2 \mu\, v = 0$ dans $\mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}$, $v(1^-) = v(1^+)$, $v(-1^-) = v(-1^+)$, $\partial_x v(1^-) = \partial_x v(1^+)$, $\partial_x v(-1^-) = \partial_x v(-1^+)$ alors v satisfait $v'' + \omega^2 \mu\, v = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Question 2. Établir que si u vérifie (3) alors u est solution d'un problème variationnel

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que} & \\ a(u, v) = \ell(v), & \text{pour tout } v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}). \end{array} \right. \tag{4}$$

On donnera l'expression des formes a et ℓ. Réciproquement, montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ vérifie (4) alors u est solution de (3).

Question 3. Prouver que (4), et donc (3), (2), ont au plus une solution (unicité). On admettra que (4), et donc (3), (2), possèdent une solution (existence). Ce dernier résultat sera montré dans le cours MAP 431.

Question 4. En utilisant un v bien choisi dans (4), établir la relation

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \qquad \text{(conservation d'énergie).} \tag{5}$$

2 Non réflexion

Dans ce paragraphe, nous cherchons des configurations (ω et μ) pour lesquelles $R = 0$ (non réflexion). Dans une telle situation, le champ diffracté est nul pour $x \leq -1$ et l'énergie est complétement transmise.

Question 5. Montrer que $R = 0$ si seulement s'il existe une solution non nulle au problème

$$\left| \begin{array}{lcll} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que} & & & \\ u'' + \omega^2 \mu\, u & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_x u - i\omega u & = & 0 & \text{en } x = \pm 1. \end{array} \right. \tag{6}$$

Cela nous conduit naturellement à étudier les configurations pour lesquelles il n'y a pas unicité pour le problème (6).

Question 6. Supposons μ constant dans Ω. Pour $\omega > 0$ donné (resp. μ donné), déterminer les μ (resp. ω) tels que $R = 0$.

Question 7. Supposons $\omega > 0$ fixé et $\mu = \mu_-$ sur $[-1; 0]$, où $\mu_- \in \mathcal{C}^0([-1; 0])$ est donné. On cherche les valeurs $\mu_+ \in \mathbb{R}$ de μ constant sur $]0;1[$ telles que $R = 0$. En partant de (6), montrer que la détermination de ces μ_+ conduit à résoudre le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mu_+, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ a_1(u,v) = \mu\, b_1(u,v), \qquad \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \end{array} \right. \tag{7}$$

avec a_1 et b_1 à définir.

Question 8. En discrétisant (7) par éléments finis, écrire un programme Python permettant d'approcher les valeurs propres de (7). On donnera en particulier les expressions des matrices associées à la discrétisation des formes a_1 et b_1. Dans un premier temps, pour valider le code, on prendra $\mu_- = 1$ et on comparera avec les valeurs exactes qui se calculent directement. En particulier, on vérifiera la convergence des valeurs propres lorsque le pas du maillage tend vers zéro. On prendra $\omega = 1$. Dans un deuxième temps, on choisira $\mu_- = 2$.

Question 9. Supposons μ fixé (pas forcément constant). Cherchons les pulsations ω pour lesquelles $R = 0$. Écrire le problème aux valeurs propres en ω associé à (6) sous la forme

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\omega, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ a_2(u,v) + \omega\, b_2(u,v) + \omega^2\, c_2(u,v) = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \end{array} \right. \tag{8}$$

avec a_2, b_2 et c_2 à définir.

Question 10. En discrétisant (8) par éléments finis, écrire un programme Python permettant d'approcher les valeurs propres de (8). On donnera en particulier les expressions des matrices associées à la discrétisation des formes a_2, b_2 et c_2. On notera que (8) est un problème aux valeurs propres quadratique ! On pourra le réécrire comme un problème aux valeurs propres linéaire en ω en travaillant au niveau matriciel avec le vecteur inconnu $(U, \omega U)$... Dans un premier temps, on validera le code en prenant $\mu = 2$ dans Ω et on comparera les résultats avec ceux obtenus à la question 7. On choisira ensuite μ tel que $\mu(x) = 1 + e^{-0.1x^2}$ dans Ω.

3 Transmission parfaite

Dans la partie précédente, nous avons mis en évidence des configurations pour lesquelles $R = 0$. Dans de telles situations, en vertu de la relation de conservation d'énergie (5), nous savons que le coefficient de transmission T vérifie $|T| = 1$. Lorsque $|T| = 1$ avec $T \neq 1$, l'onde incidente est déphasée à la traversée du défaut. Nous souhaitons à présent exhiber des configurations pour lesquelles non seulement $R = 0$ mais également $T = 1$ (transmission parfaite).

Question 11. Supposons $\omega > 0$ fixé et μ constant dans Ω. En résolvant de façon analytique le problème (3), donner des exemples de couples (ω, μ) pour lesquels $T = 1$.

Question 12. Montrer que les coefficients $s_\pm$, tels que $R = s_-$, $T = 1 + s_+$, vérifient

$$2i\omega s_\pm = \left(\partial_n u_s(x)\,\overline{e^{\pm i\omega x}} - u_s(x)\,\partial_n(\overline{e^{\pm i\omega x}})\right)\Big|_{x=1} + \left(\partial_n u_s(x)\,\overline{e^{\pm i\omega x}} - u_s(x)\,\partial_n(\overline{e^{\pm i\omega x}})\right)\Big|_{x=-1}.$$

où u_s est le champ diffracté associé à la solution u du problème (2).

Question 13. En déduire en particulier que $T = 1$ si et seulement si

$$0 = \int_\Omega (\mu(x) - 1)\, u(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \tag{9}$$

où u désigne la solution du problème (2).

Question 14. Supposons μ tel que $\int_\Omega (\mu(x) - 1)\, dx \neq 0$. Prouver que $T = 1$ si et seulement s'il existe une solution non nulle au problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u_s \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que} \\ \begin{array}{rcll} u_s'' + \omega^2 \mu\, u_s - \omega^2(\mu - 1)e^{i\omega x}\, \dfrac{\displaystyle\int_\Omega (\mu(\gamma) - 1) u_s(\gamma)\, e^{-i\omega\gamma}\, d\gamma}{\displaystyle\int_\Omega (\mu(\gamma) - 1)\, d\gamma} & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u_s - i\omega u_s & = & 0 & \text{en } x = \pm 1. \end{array} \end{array}\right. \tag{10}$$

Question 15. Le problème (10) n'est pas polynomial en ω. Effectuons le changement d'inconnue $\varphi = u_s e^{-i\omega x}$. Donner le problème aux valeurs propres satisfait par φ. Écrire le problème aux valeurs propres en ω associé sous la forme

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } (\omega, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ a_3(\varphi, v) + \omega\, b_3(\varphi, v) + \omega^2\, c_3(\varphi, v) = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \end{array}\right. \tag{11}$$

avec a_3, b_3 et c_3 à définir.

Question 16. En discrétisant (11) par éléments finis, écrire un programme Python permettant d'approcher les valeurs propres de (11). On donnera en particulier les expressions des matrices associées à la discrétisation des formes a_3, b_3 et c_3. Dans un premier temps, on validera le code en utilisant la question 11. Puis on essaiera différentes fonctions μ. Pour μ donné existe-t-il toujours des ω tel que $T = 1$?

Question 17 (optionnelle). On suppose maintenant μ tel que $\int_\Omega (\mu(x) - 1)\, dx = 0$. On définit l'espace $\mathrm{X} := \{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \,|\, \int_\Omega (\mu(x) - 1)\, v(x)\, e^{-iwx}\, dx = 0\}$. Montrer que $T = 1$ si et seulement s'il existe une solution non nulle au problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u_s \in \mathrm{X} \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega u_s'(x)\, \overline{v'(x)} - \omega^2 \mu(x)\, u_s(x) \overline{v(x)}\, dx - i\omega[u_s(1)\overline{v(1)} + u_s(-1)\overline{v(-1)}] = 0, \qquad \forall v \in \mathrm{X}. \end{array}\right. \tag{12}$$

On admettra d'une part que si u_s est solution de (12) alors $u_s \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$; d'autre part que l'ensemble $\mathrm{X}_0 := \{v \in \mathrm{X} \,|\, v(-1) = v(1) = 0\}$ est dense dans X pour la norme $\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} := (\int_\Omega |v(x)|^2\, dx)^{1/2}$. Le problème spectral (12) (en ω) n'est pas simple à résoudre en raison de la dépendance non linéaire de l'espace par rapport à ω. Définissons $\tilde{\mathrm{X}} := \{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \,|\, \int_\Omega (\mu(x) - 1)\, v(x)\, dx = 0\}$. Prouver que (12) admet une solution non nulle ψ pour $\omega \in \mathbb{R}$ donné si et seulement si (ω, ψ) est solution de

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } (\omega, \psi) \in \mathbb{R} \times \tilde{\mathrm{X}} \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ a_4(\psi, v) + \omega\, b_4(\psi, v) + \omega^2\, c_4(\psi, v) = 0, \qquad \forall v \in \tilde{\mathrm{X}}. \end{array}\right. \tag{13}$$

avec a_4, b_4, c_4 à définir. Fournir une méthode pour approcher numériquement les valeurs propres du problème (13).