École Polytechnique PROMOTION 2016

MAP431 – Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles.

Contrôle classant. Durée : 3 heures.

Mardi 03 avril 2018, 14h-17h.

Sujet proposé par Lucas Chesnel.

Informations.

Ce sujet comprend deux problèmes indépendants. Il est constitué de six pages. Dans la correction, il sera notamment tenu compte de la qualité de la rédaction et de l'honnêteté des raisonnements. Le barème est donné à titre indicatif, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour obtenir la note maximale.

Problème 1 : Équations de Maxwell 2D [12 points]

Dans cet exercice, nous nous intéressons aux équations de Maxwell 2D en régime harmonique en temps. Plus précisément, nous nous concentrons sur les équations régissant la composante magnétique du mode transverse magnétique. Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné connexe à frontière $\partial\Omega$ connexe régulière (de classe $\mathcal{C}^1$). Notons $\vec{n} = (n_x, n_y)$ la normale unité à $\partial\Omega$ orientée vers l'extérieur de Ω. Introduisons ε, $\mu \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu, fonctions à valeurs réelles. Nous supposerons que ε^{-1}, $\mu^{-1} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ de sorte qu'il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ telles que

$$\alpha \leq \varepsilon,\ \mu,\ \varepsilon^{-1},\ \mu^{-1} \leq \beta.$$

Dans ce sujet, sauf indication contraire, les fonctions seront à valeurs complexes. Par la suite, nous aurons besoin de la version suivante (complexe) du théorème de Lax-Milgram :

- *Soit* X *un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes.*
- *Soit* $l(\cdot)$ *une forme antilinéaire*

$$l(\lambda u + u') = \overline{\lambda}\, l(u) + l(u'), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall u, u' \in \mathrm{X},$$

continue sur X.

- *Soit* $b(\cdot,\cdot)$ *une forme sesquilinéaire*

$$b(\lambda u + u', \gamma v + v') = \lambda\, \overline{\gamma}\, b(u, v) + \lambda\, b(u, v') + \overline{\gamma}\, b(u', v) + b(u', v'), \quad \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{C},\ \forall u, u', v, v' \in \mathrm{X},$$

continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. *Supposons* $\Re e\,(e^{i\theta} b(\cdot,\cdot))$ *coercive sur* X *pour un* $\theta \in]-\pi;\pi]$, *autrement dit, supposons qu'il existe* $\theta \in]-\pi;\pi]$, $\eta > 0$ *tels que*

$$\Re e\,(e^{i\theta} b(u, u)) \geq \eta \|u\|^2_{\mathrm{X}}, \qquad \forall u \in \mathrm{X}.$$

Alors il existe un unique $u \in \mathrm{X}$ *vérifiant* $b(u, v) = l(v)$ *pour tout* $v \in \mathrm{X}$.

Partie I : Préambule

Dans cette partie, nous introduisons deux espaces fonctionnels qui serviront dans l'analyse ci-dessous. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, définissons

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}). \tag{1}$$

On prendra garde à ne pas confondre les opérateurs $\vec{\mathrm{rot}}$ et rot.

Question 1. En utilisant les formules de Green du cours, établir l'identité

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\,\varphi \cdot \vec{v} \; - \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{v}\; dxdy = \int_{\partial\Omega} \varphi\; \vec{v} \cdot \vec{\tau}\; d\sigma, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\, \vec{v} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \tag{2}$$

où $\vec{\tau} = (n_y, -n_x)$.

Nous dirons qu'une fonction $\vec{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^2 := \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ admet un rot faible dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $V \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\,\varphi \cdot \vec{v}\; dxdy = \int_\Omega \varphi\, V dxdy, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega).$$

Ci-dessus $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact. Nous noterons alors $\mathrm{rot}\,\vec{v} = V$. Avec la formule (2), on peut vérifier que cette définition étend celle donnée en (1) pour les fonctions régulières. Introduisons les espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \;&:=\; \left\{ \vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathrm{L}^2(\Omega)^2 \,|\, \mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\} \\ \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \;&:=\; \left\{ \vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \,|\, \int_\Omega \mu \vec{v} \cdot \overline{\nabla \varphi}\, dxdy = 0,\, \forall \varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

où l'opérateur rot est compris au sens faible selon la définition précédente. On admettra que (2) reste vraie pour tout $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$.

Question 2. Sachant que $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ est complet, prouver que $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\vec{u}\; \overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}} + \vec{u} \cdot \overline{\vec{v}}\; dxdy$$

est un espace de Hilbert. En déduire que $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$ est également un espace de Hilbert. Nous noterons $\|\vec{u}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} = (\vec{u}, \vec{u})^{1/2}_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$.

Dans ce qui suit, nous admettrons et nous utiliserons le fait que l'injection de $(\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ est compacte, autrement dit que de toute suite d'éléments de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ bornée pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$. Précisons que l'injection de $(\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$, elle, n'est pas compacte.

Le problème de Maxwell que nous souhaitons étudier s'écrit

$$\left|\begin{array}{lcll} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \text{ tel que} & & & \\ \vec{\mathrm{rot}}\,(\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}) - \omega^2 \mu \vec{u} & = & \vec{\mathrm{rot}}\,(\varepsilon^{-1} J) & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u} & = & \varepsilon^{-1} J & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{4}$$

où J désigne un terme source appartenant à $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Partie II : Formulations équivalentes

Dans cette partie nous proposons deux formulations variationnelles équivalentes au problème (4).

Question 3. Montrer que si $\vec{u}$ vérifie (4) alors $\vec{u}$ est solution de

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \text{ tel que} \\ a(\vec{u},\vec{v}) = \ell(\vec{v}), \qquad \forall \vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \end{array} \right. \tag{5}$$

avec $\quad a(\vec{u},\vec{v}) = \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1} \mathrm{rot}\,\vec{u}\;\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}} - \omega^2 \mu \vec{u}\cdot\overline{\vec{v}}\,dxdy \quad$ et $\quad \ell(\vec{v}) = \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1} J\;\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}}\,dxdy.$

Question 4. Montrer que $\mathrm{rot}\,(\nabla\varphi) = 0$ pour $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. En déduire que si $\vec{u}$ vérifie (5) alors $\vec{u}$ est solution de

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \text{ tel que} \\ a(\vec{u},\vec{v}) = \ell(\vec{v}), \qquad \forall \vec{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega). \end{array} \right. \tag{6}$$

Question 5. Définissons l'espace $\mathrm{H}^1_\#(\Omega) := \{\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \,|\, \displaystyle\int_\Omega \varphi\,dxdy = 0\}$. Pour $\vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ donné, montrer que le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \varphi \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \mu\nabla\varphi\cdot\overline{\nabla\varphi'}\,dxdy = \int_\Omega \mu\vec{v}\cdot\overline{\nabla\varphi'}\,dxdy, \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \end{array} \right. \tag{7}$$

admet une unique solution. En déduire que si $\vec{u}$ vérifie (6) alors $\vec{u}$ est solution de (5).

Question 6. Supposons $\vec{u} \in \mathrm{H}^2(\Omega)\times\mathrm{H}^2(\Omega)$ solution du problème (5).

i) Montrer que $\vec{u}$ vérifie l'équation aux dérivées partielles dans Ω du problème (4).

ii) En admettant le fait que l'image de l'application $\vec{\varphi} \mapsto \vec{\varphi}\cdot\vec{\tau}$ définie sur $\mathrm{H}^1(\Omega)\times\mathrm{H}^1(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$, prouver que $\vec{u}$ vérifie l'équation sur $\partial\Omega$ du problème (4).

Partie III : Caractère bien posé

Nous nous intéressons à présent au caractère bien posé des problèmes précédents.

Question 7. Montrer que pour $\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, le problème (6) admet une unique solution. On pourra observer que ω^2 s'écrit sous la forme $\omega^2 = -\rho\, e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi;\pi[$ et $\rho > 0$.

Pour $\omega_0 \in \mathbb{R}$ donné, notons $(\mathscr{P}_0)$ le problème (6) pour $\ell(\cdot) = 0$.

Question 8. Supposons que la seule solution de $(\mathscr{P}_0)$ soit $\vec{u} = 0$ (injectivité). Pour $\delta > 0$ et $\ell(\cdot)$ quelconque donné, notons $\vec{u}_\delta$ la solution de (6) pour $\omega_\delta = \omega_0 + i\delta$. Nous souhaitons prouver l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\vec{u}_\delta\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} \leq C, \qquad \forall \delta \in]0;1]. \tag{8}$$

Pour ce faire, nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une suite (δ_n) telle que $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = 0$ et $\|\vec{u}_{\delta_n}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} > n$. Définissons $\vec{w}_n = \vec{u}_{\delta_n}/\|\vec{u}_{\delta_n}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$.

i) Prouver qu'on peut extraire de $(\vec{w}_n)$ une sous-suite qui converge vers 0 dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$.

ii) Établir l'estimation $\|\vec{w}_n\|^2_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} \leq c\,(\|J\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}/\|\vec{u}_{\delta_n}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} + \|\vec{w}_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2})$ avec c constante indépendante de n. Conclure.

Déduire de (8) que pour tout $J \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, le problème (6) possède une solution.

Question 9. Supposons qu'il existe une solution non nulle $\vec{u}_0$ à $(\mathscr{P}_0)$ (non injectivité). Pour $\delta > 0$ et $\ell(\cdot)$ donné tel que $\ell(\vec{u}_0) \neq 0$ (absence de compatibilité), notons $\vec{u}_\delta$ la solution de (6) pour $\omega_\delta = \omega_0 + i\delta$. Prouver que $\lim_{\delta\to 0} \|\vec{u}_\delta\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} = +\infty$. Que dire de l'existence d'une solution au problème (6) pour $\omega = \omega_0$ et un tel $\ell(\cdot)$?

Question 10. Supposons que l'ensemble des solutions de $(\mathscr{P}_0)$ coïncide avec $\mathrm{vect}(\vec{u}_0)$, où $\vec{u}_0 \not\equiv 0$ (non injectivité). Pour $\delta > 0$ et $\ell(\cdot)$ donné non nul tel que $\ell(\vec{u}_0) = 0$ (compatibilité), notons $\vec{u}_\delta$ la solution de (6) pour $\omega_\delta = \omega_0 + i\delta$. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a

$$\int_\Omega \mu \vec{u}_\delta \cdot \overline{\vec{u}_0}\, dxdy = 0.$$

Étudier le comportement de $(\vec{u}_\delta)$ lorsque δ tend vers zéro. Conclure quant aux propriétés de (6) pour $\omega = \omega_0$ et un tel $\ell(\cdot)$.

Partie IV : Approximation numérique

Dans cette partie, nous cherchons à discrétiser le problème (4). Nous supposons que Ω est un polygone et nous acceptons le fait que les résultats précédents demeurent valides dans une telle géométrie.

Question 11. Pour étudier le cas $\omega \in \mathbb{R}$, nous aimerions travailler sur la formulation (6) posée dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ (pour pouvoir utiliser le fait que l'injection de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ est compacte). Pourquoi selon vous est-il difficile de discrétiser (6) ?

Définissons l'espace

$$\mathrm{Y} := \Big\{\vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)\,|\,\mathrm{div}\,(\mu\vec{v}) \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \mu\vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\Big\}$$

muni du produit scalaire $(\vec{u},\vec{v})_{\mathrm{Y}} = (\vec{u},\vec{v})_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} + \int_\Omega \mathrm{div}\,(\mu\vec{u})\,\overline{\mathrm{div}\,(\mu\vec{v})}\,dxdy$. Définissons également la norme $\|\vec{v}\|_{\mathrm{Y}} = (\vec{v},\vec{v})^{1/2}_{\mathrm{Y}}$. On peut établir que $(\mathrm{Y},(\cdot,\cdot)_{\mathrm{Y}})$ est un espace de Hilbert.

Considérons, pour $\lambda > 0$, la formulation variationnelle

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathrm{Y} \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}} + \lambda\,\mathrm{div}\,(\mu\vec{u})\,\overline{\mathrm{div}\,(\mu\vec{v})} - \omega^2\mu\vec{u}\cdot\overline{\vec{v}}\,dxdy = \ell(\vec{v}), \qquad \forall \vec{v} \in \mathrm{Y}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Question 12. Montrer que si $\vec{u}$ vérifie (6) alors $\vec{u}$ est solution de (9). Réciproquement, lorsque ω est réel, donner une condition sur λ pour affirmer que si $\vec{u}$ vérifie (9) alors $\vec{u}$ est solution de (6). Pour établir ce dernier résultat, on utilisera le fait que le problème

$$\left|\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{l}{\text{Trouver } \psi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tel que}} \\ \mathrm{div}\,(\mu\nabla\psi) + k\,\psi & = & f & \text{dans } \Omega \\ \mu\nabla\psi\cdot\vec{n} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{10}$$

admet une unique solution pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ si et seulement si $k \notin \{k_0, k_1, \dots\}$, où (k_n) est une suite de réels positifs croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$.

Question 13. Soit Y_h un espace de dimension finie tel que $\mathrm{Y}_h \subset \mathrm{Y}$. Proposer un choix possible de Y_h pouvant être intéressant pour approcher la solution de (9). On imposera de façon abstraite dans Y_h la condition sur $\partial\Omega$ sans chercher à expliciter les fonctions qui la satisfont.

Considérons le problème discrétisé

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathrm{Y}_h \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}_h\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}_h} + \lambda\,\mathrm{div}\,(\mu\vec{u}_h)\,\overline{\mathrm{div}\,(\mu\vec{v}_h)} - \omega^2\mu\vec{u}_h\cdot\overline{\vec{v}_h}\,dxdy = \ell(\vec{v}_h), \qquad \forall \vec{v}_h \in \mathrm{Y}_h. \end{array}\right. \tag{11}$$

Pour simplifier dans la suite, nous supposerons que $\omega = i\kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Question 14. Expliquer brièvement pourquoi (11) admet une unique solution.

Question 15. Prouver l'estimation $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\mathrm{Y}} \le C\,\inf_{\vec{v}_h\in\mathrm{Y}_h}\|\vec{u} - \vec{v}_h\|_{\mathrm{Y}}$. Quelle estimation d'erreur peut-on espérer lorsque $\vec{u} \in \mathrm{H}^2(\Omega)\times\mathrm{H}^2(\Omega)$?

Problème 2 : Formulations pour le bilaplacien [8 points]

Dans cet exercice les fonctions sont à valeurs réelles et f est un élément de $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Partie I : Conditions d'encastrement

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Dans cette partie, nous nous intéressons au problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^2_0(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \Delta u\Delta v\,dx = \int_\Omega f v\,dx, \qquad \forall v \in \mathrm{H}^2_0(\Omega), \end{array}\right. \tag{12}$$

où $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^2(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel

$$(u,v)_{\mathrm{H}^2(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2} + \nabla u\cdot\nabla v + u\,v\,dx.$$

Ici $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ note l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact. On rappelle que l'espace $(\mathrm{H}^2(\Omega),(\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$ est un Hilbert. On peut montrer que l'on a $\mathrm{H}^2_0(\Omega) = \{\varphi \in \mathrm{H}^2(\Omega)\,|\,\varphi = \partial_n\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, n étant la normale unité à $\partial\Omega$ orientée vers l'extérieur de Ω.

Question 1. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2 dx.$$

On pourra dans un premier temps supposer u régulière.

Question 2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)$

$$\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \le C\int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2 dx.$$

On pourra par exemple remarquer que $\partial u/\partial x_i \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ pour $i = 1, 2$.

Question 3. Montrer que $(\mathrm{H}^2_0(\Omega),(\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert. Prouver que (12) admet une unique solution dépendant continûment de f.

Partie II : Conditions mixtes

Dans la suite de l'exercice, nous considérons le problème

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega) \text{ tel que}\\ \displaystyle\int_\Omega \Delta u \Delta v\,dx = \int_\Omega f v\,dx, \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega).\end{array}\right. \tag{13}$$

Nous travaillons dans le domaine $\Omega :=]-1;1[^2\backslash[0;1]^2$ (voir Figure 1). Nous admettrons que les résultats du cours sur la trace et la formule de Green ainsi que l'inégalité de Poincaré pour les fonctions de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ demeurent vrais dans cette géométrie.

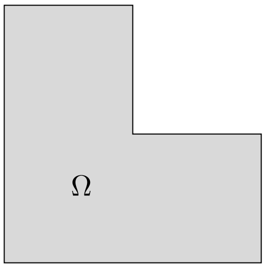

FIGURE 1 – Domaine $]-1;1[^2\backslash[0;1]^2$.

Question 4. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2 dx.$$

On utilisera le fait que $\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$.

Question 5. Prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C\,\|\Delta u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$.

Question 6. Montrer que $(\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega),(\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert. Établir que (13) admet une unique solution u. Peut-on utiliser directement la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$ vue en cours pour déterminer une approximation de u ?

Question 7. Déterminer l'équation aux dérivées partielles ainsi que les deux conditions aux limites satisfaites par u. On supposera u régulière et on procédera formellement sans chercher à justifier ici les formules d'intégration par parties. De plus, on acceptera le fait que l'image de l'application $v \mapsto \partial_n v$ définie sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$.

Question 8. On considère la résolution successive des deux problèmes

$$(\mathscr{P}_1)\ \left|\begin{array}{l}\text{Trouver } w \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que}\\ -\Delta w = f \quad \text{dans } \Omega\end{array}\right. \qquad (\mathscr{P}_2)\ \left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u_\sharp \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que}\\ -\Delta u_\sharp = w \quad \text{dans } \Omega.\end{array}\right. \tag{14}$$

Montrer que l'on a

$$\int_\Omega \Delta u_\sharp\,\Delta v\,dx = \int_\Omega f v\,dx, \qquad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega).$$

Peut-on en déduire que $u_\sharp$ coïncide avec u ? Pourquoi ?

Introduisons les coordonnées polaires (r,θ) centrées en $O = (0,0)$ telles que localement dans un voisinage de O, Ω coïncide avec le secteur

$$\{x = (x_1,x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\,0 < r < 1,\ 0 < \theta < 3\pi/2\}.$$

Définissons la fonction s telle que $s(x) = r^{2/3} \sin(2\theta/3)$. On peut vérifier que $\Delta s = 0$ dans Ω et que $s \in \mathrm{H}^1(\Omega) \setminus \mathrm{H}^2(\Omega)$. D'autre part, on peut prouver que tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ se décompose sous la forme

$$v = c\,s + \tilde{v} \qquad \text{avec} \quad \tilde{v} \in \mathrm{H}^2(\Omega) \;\text{ et }\; c = \int_\Omega \zeta \Delta v \, dx,$$

où $\zeta \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ désigne une fonction que l'on peut définir comme l'unique solution d'un problème aux limites simple que nous ne préciserons pas ici.

Question 9. En modifiant le terme source (*i.e.* la donnée w) dans $(\mathscr{P}_2)$ au moyen de la fonction ζ, proposer une méthode pour déterminer la solution de (13) en résolvant successivement $(\mathscr{P}_1)$ puis un problème $(\tilde{\mathscr{P}}_2)$ à préciser. Discuter l'intérêt numérique de cette approche.