École Polytechnique PROMOTION 2016

MAP431 – Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles.

Contrôle classant. Durée : 3 heures.

Mardi 03 avril 2018, 14h-17h.

Sujet proposé par Lucas Chesnel.

Correction.

Informations.

Ce sujet comprend deux problèmes indépendants. Il est constitué de six pages. Dans la correction, il sera notamment tenu compte de la qualité de la rédaction et de l'honnêteté des raisonnements. Le barème est donné à titre indicatif, il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour obtenir la note maximale.

Problème 1 : Équations de Maxwell 2D [12 points]

Dans cet exercice, nous nous intéressons aux équations de Maxwell 2D en régime harmonique en temps. Plus précisément, nous nous concentrons sur les équations régissant la composante magnétique du mode transverse magnétique. Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné connexe à frontière $\partial\Omega$ connexe régulière (de classe $\mathcal{C}^1$). Notons $\vec{n} = (n_x, n_y)$ la normale unité à $\partial\Omega$ orientée vers l'extérieur de Ω. Introduisons ε, $\mu \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu, fonctions à valeurs réelles. Nous supposerons que ε^{-1}, $\mu^{-1} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ de sorte qu'il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ telles que

$$\alpha \leq \varepsilon,\, \mu,\, \varepsilon^{-1},\, \mu^{-1} \leq \beta.$$

Dans ce sujet, sauf indication contraire, les fonctions seront à valeurs complexes. Par la suite, nous aurons besoin de la version suivante (complexe) du théorème de Lax-Milgram :

- *Soit* X *un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes.*
- *Soit* $l(\cdot)$ *une forme antilinéaire*

$$l(\lambda u + u') = \overline{\lambda}\, l(u) + l(u'), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall u, u' \in \mathrm{X},$$

continue sur X.

- *Soit* $b(\cdot,\cdot)$ *une forme sesquilinéaire*

$$b(\lambda u + u', \gamma v + v') = \lambda\,\overline{\gamma}\, b(u,v) + \lambda\, b(u,v') + \overline{\gamma}\, b(u',v) + b(u',v'), \quad \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{C},\ \forall u, u', v, v' \in \mathrm{X},$$

continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. *Supposons* $\Re e\,(e^{i\theta} b(\cdot,\cdot))$ *coercive sur* X *pour un* $\theta \in]-\pi;\pi]$, *autrement dit, supposons qu'il existe* $\theta \in]-\pi;\pi]$, $\eta > 0$ *tels que*

$$\Re e\,(e^{i\theta} b(u,u)) \geq \eta \|u\|^2_{\mathrm{X}}, \qquad \forall u \in \mathrm{X}.$$

Alors il existe un unique $u \in \mathrm{X}$ *vérifiant* $b(u,v) = l(v)$ *pour tout* $v \in \mathrm{X}$.

Partie I : Préambule

Dans cette partie, nous introduisons deux espaces fonctionnels qui serviront dans l'analyse ci-dessous. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, définissons

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}). \tag{1}$$

On prendra garde à ne pas confondre les opérateurs $\vec{\mathrm{rot}}$ et rot.

Question 1. En utilisant les formules de Green du cours, établir l'identité

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\,\varphi \cdot \vec{v} \ - \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{v}\ dxdy = \int_{\partial\Omega} \varphi\ \vec{v} \cdot \vec{\tau}\ d\sigma, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\ \vec{v} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \tag{2}$$

où $\vec{\tau} = (n_y, -n_x)$.

Correction. Considérons $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Les formules de Green du cours assurent que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial_y \varphi\, v_x \ + \varphi\, \partial_y v_x\ dxdy &= \int_{\partial\Omega} \varphi\, v_x\, n_y\ d\sigma \\ -\int_\Omega \partial_x \varphi\, v_y \ + \varphi\, \partial_x v_y\ dxdy &= -\int_{\partial\Omega} \varphi\, v_y\, n_x\ d\sigma. \end{aligned}$$

En sommant ces deux relations, nous obtenons l'identité désirée.

Nous dirons qu'une fonction $\vec{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^2 := \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ admet un rot faible dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $V \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\,\varphi \cdot \vec{v}\ dxdy = \int_\Omega \varphi\, V dxdy, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Ci-dessus $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact. Nous noterons alors $\mathrm{rot}\,\vec{v} = V$. Avec la formule (2), on peut vérifier que cette définition étend celle donnée en (1) pour les fonctions régulières. Introduisons les espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) &:= \left\{ \vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathrm{L}^2(\Omega)^2 \,|\, \mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\} \\ \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) &:= \left\{ \vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \,|\, \int_\Omega \mu \vec{v} \cdot \overline{\nabla \varphi}\, dxdy = 0,\ \forall \varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

où l'opérateur rot est compris au sens faible selon la définition précédente. On admettra que (2) reste vraie pour tout $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$.

Question 2. Sachant que $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ est complet, prouver que $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\vec{u}\ \overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}} + \vec{u} \cdot \overline{\vec{v}}\ dxdy$$

est un espace de Hilbert. En déduire que $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$ est également un espace de Hilbert. Nous noterons $\|\vec{u}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} = (\vec{u}, \vec{u})^{1/2}_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$.

Correction. Prouvons que $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$. Soit $(\vec{u}_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ qui est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$. Alors $(\vec{u}_n)$ et $(\mathrm{rot}\,\vec{u}_n)$ sont de Cauchy respectivement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ et $\mathrm{L}^2(\Omega)$ qui sont des espaces complets. Par conséquent $(\vec{u}_n)$ et $(\mathrm{rot}\,\vec{u}_n)$ convergent respectivement vers $\vec{u} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^2$ et $w \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Pour terminer la preuve, il reste à montrer $\mathrm{rot}\,\vec{u} = w$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\,\varphi \cdot \vec{u}_n\, dxdy = \int_\Omega \varphi\, \mathrm{rot}\,\vec{u}_n\ dxdy.$$

En passant à la limite $n \to +\infty$, on déduit

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\, \varphi \cdot \vec{u}\, dxdy = \int_\Omega \varphi\, w\, dxdy,$$

ce qui prouve que $\vec{u}$ admet un rot faible qui est égal à w (on peut vérifier qu'il y a unicité de la définition du rot faible). Cela permet de conclure que $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ muni du produit scalaire ci-dessus est un espace de Hilbert. Montrons ensuite que $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ est un sous-espace fermé de $(\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$. Soit $(\vec{u}_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ qui converge vers une fonction u dans $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$. Pour tout $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \mu\vec{u} \cdot \overline{\nabla\varphi}\, dxdy = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \mu\vec{u}_n \cdot \overline{\nabla\varphi}\, dxdy = 0.$$

On déduit que u appartient à $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. Ainsi $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ est bien fermé dans $(\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$. Puisque $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$ est un espace de Hilbert, cela montre que $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$ est également un Hilbert.

Dans ce qui suit, nous admettrons et nous utiliserons le fait que l'injection de $(\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ est compacte, autrement dit que de toute suite d'éléments de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ bornée pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$. Précisons que l'injection de $(\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$, elle, n'est pas compacte.

Le problème de Maxwell que nous souhaitons étudier s'écrit

$$\left|\begin{array}{lcll} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \text{ tel que} & & & \\ \vec{\mathrm{rot}}\,(\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}) - \omega^2\mu\vec{u} & = & \vec{\mathrm{rot}}\,(\varepsilon^{-1}J) & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u} & = & \varepsilon^{-1}J & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{4}$$

où J désigne un terme source appartenant à $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Partie II : Formulations équivalentes

Dans cette partie nous proposons deux formulations variationnelles équivalentes au problème (4).

Question 2. Montrer que si $\vec{u}$ vérifie (4) alors $\vec{u}$ est solution de

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \text{ tel que} \\ a(\vec{u},\vec{v}) = \ell(\vec{v}), \qquad \forall \vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega) \end{array}\right. \tag{5}$$

avec $\quad a(\vec{u},\vec{v}) = \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}\;\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}} - \omega^2\mu\vec{u}\cdot\overline{\vec{v}}\, dxdy \quad$ et $\quad \ell(\vec{v}) = \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}J\;\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}}\, dxdy.$

Correction. Supposons $\vec{u}$ solution de (4). En multipliant (4) par $\overline{\vec{v}} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ et en intégrant par parties sur Ω en utilisant la formule de Green de la question précédente (avec $\varphi = \varepsilon^{-1}(\mathrm{rot}\,\vec{u} - J)$), nous trouvons que $\vec{u}$ vérifie (5). Observons que par définition du problème (4), on a $\varphi = \varepsilon^{-1}(\mathrm{rot}\,\vec{u} - J) = 0$ sur $\partial\Omega$.

Question 3. Montrer que $\mathrm{rot}\,(\nabla\varphi) = 0$ pour $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. En déduire que si $\vec{u}$ vérifie (5) alors $\vec{u}$ est solution de

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \text{ tel que} \\ a(\vec{u},\vec{v}) = \ell(\vec{v}), \qquad \forall \vec{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega). \end{array}\right. \tag{6}$$

Correction. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. On a $\mathrm{rot}\,(\nabla\varphi) = \partial_x(\partial_y\varphi) - \partial_y(\partial_x\varphi) = 0$. Supposons $\vec{u}$ solution de (5). Alors on a $a(\vec{u},\vec{v}) = \ell(\vec{v})$ pour tout $\vec{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) \subset \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$. Il suffit donc de vérifier que

$\vec{u} \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$. Prenons $\vec{v} = \nabla\varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ dans (5). Notons qu'un tel $\vec{v}$ appartient bien à $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,; \Omega)$. Puisque $\mathrm{rot}\,(\nabla\varphi) = 0$, on trouve

$$\int_\Omega \mu\vec{u} \cdot \overline{\nabla\varphi}\, dxdy = 0, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}). \tag{7}$$

Or $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Par conséquent, cela montre que (7) est vraie également pour tout $\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et garantit que $\vec{u} \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$. Ainsi $\vec{u}$ est bien solution de (6).

Question 4. Définissons l'espace $\mathrm{H}^1_\#(\Omega) := \{\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,|\, \int_\Omega \varphi\, dxdy = 0\}$. Pour $\vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,; \Omega)$ donné, montrer que le problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \varphi \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \mu\nabla\varphi \cdot \overline{\nabla\varphi'}\, dxdy = \int_\Omega \mu\vec{v} \cdot \overline{\nabla\varphi'}\, dxdy, \qquad \forall\varphi' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega) \end{array}\right. \tag{8}$$

admet une unique solution. En déduire que si $\vec{u}$ vérifie (6) alors $\vec{u}$ est solution de (5).

Correction. Pour prouver que (8) admet une unique solution φ, nous allons appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $(\mathrm{H}^1_\#(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^1(\Omega)})$. Introduisons l'application

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathrm{H}^1(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ & \varphi & \mapsto & \displaystyle\int_\Omega \varphi\, dxdy. \end{array}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ permet d'écrire $|L(\varphi)| \le \|1\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\, \|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \|1\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\, \|\varphi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$. Cela garantit que la forme linéaire L est continue sur $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Puisque $\mathrm{H}^1_\#(\Omega) = L^{-1}(\{0\})$, on déduit que $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Or $(\mathrm{H}^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert. Donc $(\mathrm{H}^1_\#(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^1(\Omega)})$ est un Hilbert.

Introduisons les formes

$$\tilde{a}(\varphi, \varphi') = \int_\Omega \mu\nabla\varphi \cdot \overline{\nabla\varphi'}\, dxdy \qquad \text{et} \qquad \tilde{\ell}(\varphi') = \int_\Omega \mu\vec{v} \cdot \overline{\nabla\varphi'}\, dxdy$$

définies sur $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$. Pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$, nous pouvons écrire en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$,

$$|\tilde{\ell}(\varphi')| = |\int_\Omega \mu\vec{v} \cdot \overline{\nabla\varphi'}\, dxdy| \le \|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\, \|\vec{v}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2} \|\nabla\varphi'\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2} \le \|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\, \|\vec{v}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2} \|\varphi'\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}.$$

Cela montre que la forme linéaire $\tilde{\ell}(\cdot)$ est continue sur $(\mathrm{H}^1_\#(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^1(\Omega)})$. On a également, toujours en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$, pour tout φ, $\varphi' \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$,

$$|\tilde{a}(\varphi, \varphi')| = |\int_\Omega \mu\nabla\varphi \cdot \overline{\nabla\varphi'}\, dx| \le \|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\, \|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2} \|\nabla\varphi'\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2} \le \|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\, \|\varphi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \|\varphi'\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}.$$

Ainsi cela prouve que la forme bilinéaire $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$ est continue sur $(\mathrm{H}^1_\#(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^1(\Omega)})$. Il reste à établir la coercivité de $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$. L'inégalité de Poincaré Wirtinger (notons que Ω est borné et connexe) vue en PC garantit l'existence d'une constante C_P telle que $\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le C_P\, \|\nabla\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2}$ pour tout $\varphi \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$. Ainsi l'on a $\|\varphi\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \le (1 + C_P)\|\nabla\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2}$ pour tout $\varphi \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$. Cela implique

$$\Re e\,(\tilde{a}(\varphi, \varphi)) = \tilde{a}(\varphi, \varphi) = \int_\Omega \mu|\nabla\varphi|^2\, dx \ge \alpha\, (1 + C_P)^{-1} \|\varphi\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$$

et prouve que $\Re e\,(\tilde{a}(\cdot,\cdot))$ est coercive sur $(\mathrm{H}^1_\#(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^1(\Omega)})$. Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, nous savons que (8) admet une unique solution avec l'estimation de continuité

$$\|\varphi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \le \alpha^{-1}(1 + C_P)\, \|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\, \|\vec{v}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2}.$$

Remarque : une autre façon de montrer ce résultat consiste à travailler dans l'espace $\mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ muni du produit scalaire $(\varphi, \varphi') \mapsto \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \overline{\nabla\varphi'}\, dx$. On vérifiera que c'est bien un Hilbert en prouvant qu'il est complet grâce aux inégalités $\|\nabla\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2} \le \|\varphi\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \le (1 + C_P)\|\nabla\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2}$.

Si $\vec{u}$ satisfait (6) alors $\vec{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\, \Omega) \subset \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\, \Omega)$ vérifie $a(\vec{u}, \vec{v}\,') = \ell(\vec{v}\,')$ pour tout $\vec{v}\,' \in \mathbf{V}_T(\mu;\, \Omega)$. Pour $\vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\, \Omega)$ donné, définissons $\vec{v}\,' := \vec{v} - \nabla\varphi$ où φ désigne la solution de (8). On constate que $\vec{v}\,'$ appartient à $\mathbf{V}_T(\mu;\, \Omega)$ de sorte que $a(\vec{u}, \vec{v}\,') = \ell(\vec{v}\,')$. Mais $a(\vec{u}, \nabla\varphi) = \ell(\nabla\varphi) = 0$. Par conséquent on déduit $a(\vec{u}, \vec{v}) = \ell(\vec{v})$ pour tout $\vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\, \Omega)$. Cela prouve que $\vec{u}$ est solution de (5).

Question 5. Supposons $\vec{u}$ solution dans $\mathrm{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}^2(\Omega)$ du problème (5).

i) Montrer que $\vec{u}$ vérifie l'équation aux dérivées partielles dans Ω du problème (4).

ii) En admettant le fait que l'image de l'application $\vec{\varphi} \mapsto \vec{\varphi} \cdot \vec{\tau}$ définie sur $\mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$, prouver que $\vec{u}$ vérifie l'équation sur $\partial\Omega$ du problème (4).

Correction. *i*) Supposons $\vec{u}$ solution dans $\mathrm{H}^2(\Omega) \times \mathrm{H}^2(\Omega)$ du problème (5). Alors on a $a(\vec{u}, \vec{v}) = \ell(\vec{v})$ pour tout $\vec{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\, \Omega)$. En prenant d'abord $\vec{v} \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \times \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \subset \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\, \Omega)$, on trouve en utilisant la formule d'intégration par parties (2)

$$\int_\Omega (\vec{\mathrm{rot}}\,(\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}) - \omega^2\mu\vec{u} - \vec{\mathrm{rot}}\,(\varepsilon^{-1}J))\vec{v}\, dxdy = 0.$$

Par densité de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \times \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ (procéder composante par composante), on déduit $\vec{\mathrm{rot}}\,(\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}) - \omega^2\mu\vec{u} = \vec{\mathrm{rot}}\,(\varepsilon^{-1}J)$ dans Ω.

ii) En testant ensuite dans (5) avec $\vec{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\, \Omega)$ et en utilisant l'équation que nous venons d'obtenir, nous trouvons

$$\int_{\partial\Omega} \varepsilon^{-1}(\mathrm{rot}\,\vec{u} - J)\, \vec{v} \cdot \vec{\tau}\, d\sigma = 0, \qquad \forall \vec{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega).$$

Le fait que l'image de l'application $\vec{v} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{\tau}$ définie sur $\mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ entraîne alors $\varepsilon^{-1}(\mathrm{rot}\,\vec{u} - J) = 0$ sur $\partial\Omega$.

Partie III : Caractère bien posé

Nous nous intéressons à présent au caractère bien posé des problèmes précédents.

Question 7. Montrer que pour $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, le problème (6) admet une unique solution. On pourra observer que ω^2 s'écrit sous la forme $\omega^2 = -\rho\, e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi; \pi[$ et $\rho > 0$.

Correction. Pour prouver ce résultat, on va appliquer le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert $(\mathbf{V}_T(\mu;\, \Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\, \Omega)})$.

Pour tout $v \in \mathbf{V}_T(\mu;\, \Omega)$, nous pouvons écrire en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$,

$$|\ell(\vec{v})| = |\int_\Omega \varepsilon^{-1} J\, \overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}}\, dxdy| \le \alpha\|J\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\mathrm{rot}\,\vec{v}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \alpha\|J\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\vec{v}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\, \Omega)}.$$

Cela montre que la forme linéaire $\ell(\cdot)$ est continue sur $(\mathbf{V}_T(\mu;\, \Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\, \Omega)})$. On prouve de même que $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur cet espace. Il reste à établir la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$. Écrivons ω^2 sous la forme $\omega^2 = -\rho\, e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi;\pi[$ et $\rho > 0$. On a

$$\begin{array}{rcl} \Re e\,(e^{-i\theta/2}a(\vec{u},\vec{u})) & = & \Re e\,(e^{-i\theta/2}\displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}|\mathrm{rot}\,\vec{u}|^2 - \omega^2\mu|\vec{u}|^2\,dxdy) \\ & = & \Re e\,(e^{-i\theta/2}\displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}|\mathrm{rot}\,\vec{u}|^2\,dxdy) + \Re e\,(\rho\, e^{i\theta/2}\displaystyle\int_\Omega \mu|\vec{u}|^2\,dxdy) \\ & \ge & \alpha\,\cos(\theta/2)\,\min(1,\rho)\,\|\vec{u}\|^2_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}. \end{array}$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. Nous déduisons que le problème (6) admet une unique solution.

Pour $\omega_0 \in \mathbb{R}$ donné, notons $(\mathscr{P}_0)$ le problème (6) pour $\ell(\cdot) = 0$.

Question 8. Supposons que la seule solution de $(\mathscr{P}_0)$ soit $\vec{u} = 0$ (injectivité). Pour $\delta > 0$ et $\ell(\cdot)$ quelconque donné, notons $\vec{u}_\delta$ la solution de (6) pour $\omega_\delta = \omega_0 + i\delta$. Nous souhaitons prouver l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\vec{u}_\delta\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} \le C, \qquad \forall \delta \in]0;1]. \tag{9}$$

Pour ce faire, nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une suite (δ_n) telle que $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = 0$ et $\|\vec{u}_{\delta_n}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} > n$. Définissons $\vec{w}_n = \vec{u}_{\delta_n}/\|\vec{u}_{\delta_n}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$.

i) Prouver qu'on peut extraire de $(\vec{w}_n)$ une sous-suite qui converge vers 0 dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$.

ii) Établir l'estimation $\|\vec{w}_n\|^2_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} \le c\,(\|J\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}/\|\vec{u}_{\delta_n}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} + \|\vec{w}_n\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2})$ avec c constante indépendante de n. Conclure.

Déduire de (9) que pour tout $J \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, le problème (6) possède une solution.

Correction. *i)* Puisque la suite $(\vec{w}_n)$ est bornée dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ et faiblement dans $(\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega),(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$ vers un $\vec{w} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. En passant à la limite dans

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{w}_n\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}} - \omega^2_{\delta_n}\,\mu\vec{w}_n\cdot\overline{\vec{v}}\,dxdy = \|\vec{u}_{\delta_n}\|^{-1}_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}\int_\Omega \varepsilon^{-1}J\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}}\,dxdy. \tag{10}$$

pour $\vec{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ fixé, on déduit $a(\vec{w},\vec{v}) = 0$ (avec $\omega = \omega_0$) pour tout $\vec{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. L'hypothèse d'injectivité pour $(\mathscr{P}_0)$ impose alors $\vec{w} = 0$. Pour passer à la limite dans (10), nous avons utilisé le résultat suivant. Soit $J(\cdot)$ une forme linéaire sur un espace de Hilbert X. Si (w_n) est une suite d'éléments de X qui converge faiblement vers $w \in \mathrm{X}$ alors $\lim_{n\to+\infty} J(w_n) = J(w)$. La preuve repose sur l'utilisation du théorème de représentation de Riesz qui garantit l'existence d'un $j \in \mathrm{X}$ tel que $(\varphi, j)_\mathrm{X} = J(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathrm{X}$. On peut alors écrire

$$J(w_n) = (w_n, j)_\mathrm{X} \underset{n\to+\infty}{\to} (w, j)_\mathrm{X} = J(w).$$

ii) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1}|\mathrm{rot}\,\vec{w}_n|^2 - \omega^2_{\delta_n}\mu|\vec{w}_n|^2\,dxdy = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\|\vec{u}_{\delta_n}\|^{-1}_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}J\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{w}_n}\,dxdy.$$

Cela implique

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1}|\mathrm{rot}\,\vec{w}_n|^2 + \mu|\vec{w}_n|^2\,dxdy = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\|\vec{u}_{\delta_n}\|^{-1}_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}J\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{w}_n} + (\omega^2_{\delta_n}+1)\mu|\vec{w}_n|^2\,dxdy.$$

En utilisant les hypothèses $\varepsilon^{-1} \ge \alpha > 0$ et $\mu \ge \alpha > 0$ ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, nous obtenons l'estimation de l'énoncé. Nous déduisons alors que $(\vec{w}_n)$ converge fortement vers zéro dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. Ceci est contradictoire avec le fait que $\|\vec{w}_n\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, la suite $(\vec{u}_\delta)$ reste bornée dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ lorsque $\delta \to 0$. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ vers un $\vec{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. On montre alors que $\vec{u}$ est solution de (6) pour $\omega = \omega_0$.

Question 9. Supposons qu'il existe une solution non nulle $\vec{u}_0$ à $(\mathscr{P}_0)$ (non injectivité). Pour $\delta > 0$ et $\ell(\cdot)$ donné tel que $\ell(\vec{u}_0) \neq 0$ (absence de compatibilité), notons $\vec{u}_\delta$ la solution de (6) pour $\omega_\delta = \omega_0 + i\delta$. Prouver que $\lim_{\delta\to 0} \|\vec{u}_\delta\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)} = +\infty$. Que dire de l'existence d'une solution au problème (6) pour $\omega = \omega_0$ et un tel $\ell(\cdot)$?

Correction. Méthode 1. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(\vec{u}_\delta)$ reste bornée lorsque $\delta \to 0$. Puisque l'injection de $(\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ est compacte, on peut extraire de $(\vec{u}_\delta)$ une sous suite notée $(\vec{u}_n)$ qui converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ et faiblement dans $(\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$ vers un $\vec{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. En passant à la limite dans

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}_n\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}} - \omega_{\delta_n}^2\,\mu\vec{u}_n \cdot \overline{\vec{v}}\,dxdy = \int_\Omega \varepsilon^{-1} J\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}}\,dxdy.$$

pour $\vec{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ fixé, on déduit $a(\vec{u},\vec{v}) = \ell(\vec{v})$ (avec $\omega = \omega_0$) pour tout $\vec{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. En particulier, en prenant $\vec{v} = \vec{u}_0$, on trouve $0 = a(\vec{u},\vec{u}_0) = \ell(\vec{u}_0) \neq 0$. On aboutit donc à une absurdité ce qui montre que $\lim_{\delta\to 0} \|\vec{u}_\delta\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} = +\infty$.

Méthode 2. Pour tout $\delta > 0$, on a

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}_\delta\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{u}_0} - \omega_\delta^2\,\mu\vec{u}_\delta \cdot \overline{\vec{u}_0}\,dxdy = \ell(\vec{u}_0). \qquad (11)$$

Or on peut remarquer que $\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}_\delta\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{u}_0} - \omega_0^2\,\mu\vec{u}_\delta \cdot \overline{\vec{u}_0}\,dxdy = 0$. En développant le terme ω_δ dans (11), on déduit

$$-(2i\delta\omega_0 + \delta^2)\int_\Omega \mu\vec{u}_\delta \cdot \overline{\vec{u}_0}\,dxdy = \ell(\vec{u}_0).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ implique alors

$$\frac{|\ell(\vec{u}_0)|}{|(2i\delta\omega_0 + \delta^2)|} \leq \|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\|\vec{u}_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2}\|\vec{u}_0\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2}.$$

Cela entraîne $\lim_{\delta\to 0} \|\vec{u}_\delta\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = +\infty$ et donc $\lim_{\delta\to 0} \|\vec{u}_\delta\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} = +\infty$.

On ne peut avoir existence d'une solution au problème (6) pour $\omega = \omega_0$ car sinon on aurait $0 = a(\vec{u},\vec{u}_0) = \ell(\vec{u}_0) \neq 0$.

Question 10. Supposons que l'ensemble des solutions de $(\mathscr{P}_0)$ coïncide avec $\mathrm{vect}(\vec{u}_0)$, où $\vec{u}_0 \not\equiv 0$ (non injectivité). Pour $\delta > 0$ et $\ell(\cdot)$ donné non nul tel que $\ell(\vec{u}_0) = 0$ (compatibilité), notons $\vec{u}_\delta$ la solution de (6) pour $\omega_\delta = \omega_0 + i\delta$. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a

$$\int_\Omega \mu\vec{u}_\delta \cdot \overline{\vec{u}_0}\,dxdy = 0.$$

Étudier le comportement de $(\vec{u}_\delta)$ lorsque δ tend vers zéro. Conclure quant aux propriétés de (6) pour $\omega = \omega_0$ et un tel $\ell(\cdot)$.

Correction. Commençons par établir l'identité demandée. On a $a(\vec{u}_\delta,\vec{v}) = \ell(\vec{v})$ pour tout $\vec{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. En prenant $\vec{v} = \vec{u}_0$, on obtient

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}_\delta\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{u}_0} - \omega_\delta^2\mu\vec{u}_\delta \cdot \overline{\vec{u}_0}\,dxdy = \ell(\vec{u}_0).$$

En développant le terme ω_δ^2 et en utilisant le fait que $\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}_\delta\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{u}_0} - \omega_0^2\,\mu\vec{u}_\delta\cdot\overline{\vec{u}_0}\,dxdy = 0$, on déduit $(2i\delta\omega_0 - \delta^2)\int_\Omega \mu\vec{u}_\delta\cdot\overline{\vec{u}_0}\,dxdy = 0$ ce qui permet de conclure.

Montrons ensuite par l'absurde que $(\vec{u}_\delta)$ reste bornée dans $(\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega),(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$ lorsque $\delta\to 0$. Si ce n'est pas le cas, comme à la question 8, il existe une suite (δ_n) telle que $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = 0$ et $\|\vec{u}_{\delta_n}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} > n$. Définissons $\vec{w}_n = \vec{u}_{\delta_n}/\|\vec{u}_{\delta_n}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}$. Puisque la suite $(\vec{w}_n)$ est bornée dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ et faiblement dans $(\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega),(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$ vers un $\vec{w}\in\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. En passant à la limite dans

$$\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{w}_n\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}} - \omega_{\delta_n}^2\,\mu\vec{w}_n\cdot\overline{\vec{v}}\,dxdy = \|\vec{u}_{\delta_n}\|^{-1}_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)}\int_\Omega \varepsilon^{-1}J\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}}\,dxdy.$$

pour $\vec{v}\in\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ fixé, on déduit $a(\vec{w},\vec{v}) = 0$ (avec $\omega=\omega_0$) pour tout $\vec{v}\in\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. Par conséquent $\vec{w}$ est proportionnelle à $\vec{u}_0$. Mais en passant à la limite dans $\int_\Omega \mu\vec{w}_n\cdot\overline{\vec{u}_0}\,dxdy = 0$, on trouve également $\int_\Omega \mu\vec{w}\cdot\overline{\vec{u}_0}\,dxdy = 0$. Cela implique donc $\vec{w} = 0$. En travaillant comme à la question 8, on montre ensuite que la convergence est forte dans $(\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega),(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)})$. Ceci est contradictoire avec le fait que $\|\vec{w}_n\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par conséquent, la suite $(\vec{u}_\delta)$ reste bornée dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ lorsque $\delta\to 0$. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ vers un $\vec{u}\in\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. On vérifie enfin que $\vec{u}$ est solution de (6) pour $\omega=\omega_0$.

Ainsi le problème (6) pour $\omega=\omega_0$ et un tel $\ell(\cdot)$ admet une solution. Bien entendu cette dernière est définie à $\mathrm{vect}(\vec{u}_0)$ près.

Partie IV : Approximation numérique

Dans cette partie, nous cherchons à discrétiser le problème (4). Nous supposons que Ω est un polygone et nous acceptons le fait que les résultats précédents demeurent valides dans une telle géométrie.

Question 11. Pour étudier le cas $\omega\in\mathbb{R}$, nous aimerions travailler sur la formulation (6) posée dans $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ (pour pouvoir utiliser le fait que l'injection de $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)^2$ est compacte). Pourquoi selon vous est-il difficile de discrétiser (6) ?

Correction. La discrétisation de la formulation (6) nécessiterait de construire une approximation interne de l'espace $\mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega)$. Or la condition $\int_\Omega \mu\vec{v}\cdot\overline{\nabla\varphi}\,dxdy = 0$ pour tout $\varphi\in\mathrm{H}^1(\Omega)$ est difficile à imposer.

Définissons l'espace

$$\mathrm{Y} := \Big\{\vec{v}\in\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)\,|\,\mathrm{div}\,(\mu\vec{v})\in\mathrm{L}^2(\Omega),\ \mu\vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\Big\}$$

muni du produit scalaire $(\vec{u},\vec{v})_\mathrm{Y} = (\vec{u},\vec{v})_{\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)} + \int_\Omega \mathrm{div}\,(\mu\vec{u})\,\overline{\mathrm{div}\,(\mu\vec{v})}\,dxdy$. Définissons également la norme $\|\vec{v}\|_\mathrm{Y} = (\vec{v},\vec{v})_\mathrm{Y}^{1/2}$. On peut établir que $(\mathrm{Y},(\cdot,\cdot)_\mathrm{Y})$ est un espace de Hilbert. D'autre part on peut prouver que $\vec{v}\in\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,;\,\Omega)$ appartient à Y si et seulement s'il existe $w\in\mathrm{L}^2(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \mu\vec{v}\cdot\nabla\varphi\,dxdy = \int_\Omega w\varphi\,dxdy, \qquad \forall\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}).$$

Considérons, pour $\lambda > 0$, la formulation variationnelle

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } \vec{u}\in\mathrm{Y} \text{ tel que}\\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}} + \lambda\,\mathrm{div}\,(\mu\vec{u})\,\overline{\mathrm{div}\,(\mu\vec{v})} - \omega^2\mu\vec{u}\cdot\overline{\vec{v}}\,dxdy = \ell(\vec{v}), \qquad \forall\vec{v}\in\mathrm{Y}.\end{array}\right. \tag{12}$$

Question 12. Montrer que si $\vec{u}$ vérifie (6) alors $\vec{u}$ est solution de (12). Réciproquement, lorsque ω est réel, donner une condition sur λ pour affirmer que si $\vec{u}$ vérifie (12) alors $\vec{u}$ est solution de (6).

Pour établir ce dernier résultat, on utilisera le fait que le problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \psi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \begin{array}{rcll} \mathrm{div}\,(\mu\nabla\psi) + k\,\psi & = & f & \text{dans } \Omega \\ \mu\nabla\psi\cdot\vec{n} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \end{array}\right. \tag{13}$$

admet une unique solution pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ si et seulement si $k \notin \{k_0, k_1, \dots\}$, où (k_n) est une suite de réels positifs croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$.

Correction. Si $\vec{u}$ vérifie (6) alors on a $\vec{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ et donc $\int_\Omega \mu\vec{u}\cdot\nabla\varphi\,dxdy = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$. Ceci prouve que $\vec{u} \in \mathrm{Y}$. En prenant $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on trouve $\mathrm{div}\,(\mu\vec{u}) = 0$ dans Ω, ce qui permet de déduire que $\vec{u}$ est solution de (12) (car $\vec{u}$ est alors solution de (5) d'après la question 4).
Réciproquement, si $\vec{u}$ vérifie (12), prenons $\vec{v} = \nabla\varphi$ avec φ solution de (13) pour $f = \mathrm{div}\,(\mu\vec{u})/\lambda \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $k = \omega^2/\lambda$. On trouve $\|\mathrm{div}\,(\mu\vec{u})\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega \mathrm{div}\,(\mu\vec{u})\overline{(\lambda\,\mathrm{div}\,(\mu\nabla\varphi) + \omega^2\varphi)}\,dxdy = 0$. Bien sûr, cela n'est possible que lorsque $\omega^2/\lambda \neq k_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans une telle situation, on a alors nécessairement $\mathrm{div}\,(\mu\vec{u}) = 0$ dans Ω. On peut ensuite vérifier que $\vec{u} \in \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ ce qui permet de déduire que $\vec{u}$ satisfait (6).

Question 13. Soit Y_h un espace de dimension finie tel que $\mathrm{Y}_h \subset \mathrm{Y}$. Proposer un choix possible de Y_h pouvant être intéressant pour approcher la solution de (12). On imposera de façon abstraite dans Y_h la condition sur $\partial\Omega$ sans chercher à expliciter les fonctions qui la satisfont.

Correction. Soit $\mathcal{V}_h$ une approximation interne de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ comme celles vues en cours. Par exemple, on peut prendre $\mathcal{V}_h = \{\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \,|\, \varphi|_{K_i} \in \mathbb{P}_k(K_i),\ \forall K_i \in \mathcal{T}_h\}$, où $\mathcal{T}_h$ est une triangulation de $\overline{\Omega}$ et où $\mathbb{P}_k(K_i)$ désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus k sur le triangle K_i. Définissons

$$\mathrm{Y}_h := \{\vec{v} \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h \,|\, \mu\vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

La régularité de μ permet de montrer qu'on a bien $\mathrm{Y}_h \subset \mathrm{Y}$.

Considérons le problème discrétisé

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in \mathrm{Y}_h \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}_h\,\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}_h} + \lambda\,\mathrm{div}\,(\mu\vec{u}_h)\,\overline{\mathrm{div}\,(\mu\vec{v}_h)} - \omega^2\mu\vec{u}_h\cdot\overline{\vec{v}_h}\,dxdy = \ell(\vec{v}_h), \qquad \forall\vec{v}_h \in \mathrm{Y}_h. \end{array}\right. \tag{14}$$

Pour simplifier dans la suite, nous supposerons que $\omega = i\kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Question 14. Expliquer brièvement pourquoi (14) admet une unique solution.

Correction. Il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $(\mathrm{Y}_h, (\cdot,\cdot)_\mathrm{Y})$. L'espace Y_h est de dimension finie, inclus dans $(\mathrm{Y}, (\cdot,\cdot)_\mathrm{Y})$ qui est un Hilbert. Par conséquent, $(\mathrm{Y}_h, (\cdot,\cdot)_\mathrm{Y})$ est un espace de Hilbert. La coercivité de la forme bilinéaire associée à (14) est facile à établir pour $\omega = i\kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\lambda > 0$.

Question 15. Prouver l'estimation $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_\mathrm{Y} \leq C\,\inf_{\vec{v}_h\in\mathrm{Y}_h}\|\vec{u} - \vec{v}_h\|_\mathrm{Y}$. Quelle estimation d'erreur peut-on espérer lorsque $\vec{u} \in \mathrm{H}^2(\Omega)\times\mathrm{H}^2(\Omega)$?

Correction. La première partie est une application directe du lemme de Céa. Lorsque $\vec{u} \in \mathrm{H}^2(\Omega)\times\mathrm{H}^2(\Omega)$, avec la définition de Y ci-dessus, nous pouvons écrire $\|\vec{u} - \vec{v}_h\|_\mathrm{Y} \leq C\,\|\vec{u} - \vec{v}_h\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)\times\mathrm{H}^1(\Omega)}$. On peut alors espérer une estimation d'erreur du type $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_\mathrm{Y} \leq C\,h\,\|\vec{u}\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)\times\mathrm{H}^2(\Omega)}$ où $C > 0$ est indépendante de h.

Problème 2 : Formulations pour le bilaplacien [8 points]

Dans cet exercice les fonctions sont à valeurs réelles et f est un élément de $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Partie I : Conditions d'encastrement

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Dans cette partie, nous nous intéressons au problème

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^2(\Omega),\end{array}\right. \tag{15}$$

où $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^2(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel

$$(u,v)_{\mathrm{H}^2(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \nabla u \cdot \nabla v + u\, v \, dx.$$

Ici $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ note l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact. On rappelle que l'espace $(\mathrm{H}^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$ est un Hilbert. On peut montrer que l'on a $\mathrm{H}_0^2(\Omega) = \{\varphi \in \mathrm{H}^2(\Omega) \,|\, \varphi = \partial_n \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, n étant la normale unité à $\partial\Omega$ orientée vers l'extérieur de Ω.

Question 1. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2 dx.$$

On pourra dans un premier temps supposer u régulière.

Correction. Soit u une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. En intégrant par parties deux fois, on trouve

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2 dx.$$

Cela permet d'obtenir l'identité demandée pour $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. En utilisant le fait que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$, on déduit que le résultat est vrai pour tout $u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$.

Question 2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}^2 \le C \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right|^2 dx.$$

On pourra par exemple remarquer que $\partial u/\partial x_i \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ pour $i = 1, 2$.

Correction. Si u est dans $\mathrm{H}_0^2(\Omega) \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, l'inégalité de Poincaré assure qu'il existe une constante $C_P > 0$ telle que

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2 \le C_P \, \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2}^2. \tag{16}$$

Par ailleurs, si $u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ alors pour $i = 1, 2$, on a $\partial u/\partial x_i \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. En effet, pour $u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ donnée, puisque $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$, il existe une suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers u dans $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Alors $\partial\varphi/\partial x_i$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers $\partial u/\partial x_i$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Or l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est égale à $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Donc nécessairement $\partial u/\partial x_i \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. L'inégalité de Poincaré permet alors d'écrire

$$\|\partial u/\partial x_i\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2 \le C_P \, \|\nabla(\partial u/\partial x_i)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2}^2. \tag{17}$$

En regroupant (16) et (17), on déduit l'estimation demandée.

Question 3. Montrer que $(\mathrm{H}_0^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert. Prouver que (15) admet une unique solution dépendant continûment de f.

Correction. D'après le cours, l'application

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathrm{H}^2(\Omega) & \to & \mathrm{L}^2(\partial\Omega)\times\mathrm{L}^2(\partial\Omega) \\ & u & \mapsto & (u|_{\partial\Omega}, \partial_n u|_{\partial\Omega}) \end{array}$$

est linéaire et continue. Comme $\mathrm{H}_0^2(\Omega) = L^{-1}(\{(0,0)\})$, on déduit que $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Or $(\mathrm{H}^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert. Donc $(\mathrm{H}_0^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$ est un Hilbert.

Pour prouver que (15) admet une unique solution, on va appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $(\mathrm{H}_0^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$. Introduisons les formes $a(\cdot,\cdot)$, $\ell(\cdot)$ telles que

$$a(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v\,dx \qquad \text{et} \qquad \ell(v) = \int_\Omega f v\,dx.$$

Pour tout $v \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$, nous pouvons écrire en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$,

$$|\ell(v)| = |\int_\Omega f v\,dx| \le \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)}.$$

Cela montre que la forme linéaire $\ell(\cdot)$ est continue sur $(\mathrm{H}_0^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$. On a également, toujours en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, pour tout u, $v \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$,

$$|a(u,v)| = |\int_\Omega \Delta u \Delta v\,dx| \le \|\Delta u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\Delta v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \|u\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)}.$$

La dernière inégalité ci-dessus provient du résultat de la question 1. Ainsi cela prouve que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur $(\mathrm{H}_0^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$. Il reste à établir la coercivité de la forme $a(\cdot,\cdot)$. Les résultats des questions 1 et 2 garantissent l'existence d'une constante $\alpha > 0$ telle que $\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \le \alpha\|\Delta u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ pour tout $u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$. En utilisant de nouveau la question 1, on déduit $\|u\|^2_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \le (\alpha+1)\|\Delta u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ pour tout $u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$. Cela implique

$$a(u,u) = \int_\Omega |\Delta u|^2\,dx \ge (\alpha+1)^{-1}\|u\|^2_{\mathrm{H}^2(\Omega)}$$

et prouve que $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur $(\mathrm{H}_0^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$. Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, nous savons que (15) admet une unique solution avec l'estimation de continuité

$$\|u\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \le (\alpha+1)\,\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

où α est indépendante de f.

Remarque : une autre façon de montrer ce résultat consiste à travailler dans l'espace $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u,v) \mapsto \int_\Omega \Delta u \Delta v\,dx$. On vérifiera que c'est bien un Hilbert en prouvant qu'il est complet grâce aux inégalités $\|\Delta u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \|u\|^2_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \le (\alpha+1)\|\Delta u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$.

Partie II : Conditions mixtes

Dans la suite de l'exercice, nous considérons le problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \Delta u \Delta v\,dx = \int_\Omega f v\,dx, \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega). \end{array}\right. \tag{18}$$

Nous travaillons dans le domaine $\Omega :=]-1;1[^2\backslash[0;1]^2$ (voir Figure 1). Nous admettrons que les résultats du cours sur la trace et la formule de Green ainsi que l'inégalité de Poincaré pour les fonctions de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ demeurent vrais dans cette géométrie.

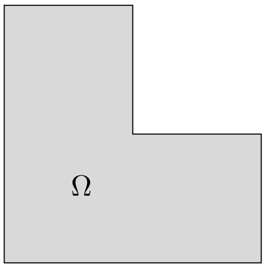

FIGURE 1 – Domaine $]-1;1[^2\backslash[0;1]^2$.

Question 4. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2 + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2 dx.$$

On utilisera le fait que $\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$.

Correction. Soit u une fonction de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. En intégrant par parties deux fois, on trouve

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,dx = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}n_1\,d\sigma - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}n_2\,d\sigma.$$

Ici n_1, n_2 désignent les composantes du vecteur normal n telles que $n=(n_1,n_2)$. Sur les segments horizontaux de $\partial\Omega$, on a $n_1=0$. Sur les segments verticaux de $\partial\Omega$, on a $n_1=\pm1$ mais surtout $\partial^2 u/\partial x_2^2=0$ car $u=0$ sur $\partial\Omega$. On déduit

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}n_1\,d\sigma=0.$$

De même, on observe que

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}n_2\,d\sigma=0$$

car $n_2=0$ sur les segments verticaux de $\partial\Omega$ et car $\partial u/\partial x_1=0$ sur les segments horizontaux de $\partial\Omega$ (en raison de $u=0$ sur $\partial\Omega$). Cela permet d'obtenir l'identité demandée pour $u\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. En utilisant le fait que $\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$, on déduit que le résultat est vrai pour tout $u\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$.

Question 5. Prouver qu'il existe une constante $C>0$ telle que $\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\le C\,\|\Delta u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ pour tout $u\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$.

Correction. Soit $u\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega)$. La formule de Green, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et l'inégalité de Poincaré permettent d'écrire

$$\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u\,dx = -\int_\Omega u\,\Delta u\,dx \le \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|\Delta u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \sqrt{C_P}\,\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^2}\|\Delta u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Cela entraîne $\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\le\sqrt{C_P(1+C_P)}\,\|\Delta u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$.

Question 6. Montrer que $(\mathrm{H}^1_0(\Omega)\cap\mathrm{H}^2(\Omega),(\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert. Établir que (18) admet une unique solution u. Peut-on utiliser directement la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$ vue en cours pour déterminer une approximation de u ?

Correction. D'après le cours, l'application

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & \mathrm{H}^2(\Omega) & \to & \mathrm{L}^2(\partial\Omega) \\ & u & \mapsto & u|_{\partial\Omega} \end{array}$$

est linéaire et continue. Comme $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega) = \gamma_0^{-1}(\{0\})$, on déduit que $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Or $(\mathrm{H}^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert. Donc $(\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$ est un Hilbert.

Pour prouver que (18) admet une unique solution u, on va appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $(\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$. Introduisons les formes $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$, $\tilde{\ell}(\cdot)$ telles que

$$\tilde{a}(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx \qquad \text{et} \qquad \tilde{\ell}(v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

définies sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$, nous pouvons écrire en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$,

$$|\tilde{\ell}(v)| = |\int_\Omega f v \, dx| \le \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)}.$$

Cela montre que la forme linéaire $\tilde{\ell}(\cdot)$ est continue sur $(\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$. On a également, toujours en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, pour tout u, $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$,

$$|\tilde{a}(u,v)| = |\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx| \le \|\Delta u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \|u\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)}.$$

La dernière inégalité ci-dessus provient du résultat de la question 4. Ainsi cela prouve que la forme bilinéaire $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$ est continue sur $(\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$. Il reste à établir la coercivité de $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$. Les résultats des questions 4 et 5 garantissent l'existence d'une constante $\tilde{\alpha} > 0$ telle que $\|u\|^2_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \le \tilde{\alpha} \|\Delta u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. Cela implique

$$\tilde{a}(u,u) = \int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx \ge \tilde{\alpha}^{-1} \|u\|^2_{\mathrm{H}^2(\Omega)}$$

et prouve que $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$ est coercive sur $(\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^2(\Omega)})$. Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, nous savons que (18) admet une unique solution avec l'estimation de continuité

$$\|u\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \le \tilde{\alpha} \, \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)},$$

où $\tilde{\alpha}$ est indépendante de f.

Remarque : une autre façon de montrer ce résultat consiste à travailler dans l'espace $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u,v) \mapsto \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx$. On vérifiera que c'est bien un Hilbert en prouvant qu'il est complet grâce aux inégalités $\|\Delta u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \|u\|^2_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \le \tilde{\alpha} \|\Delta u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$.

Pour déterminer une approximation de u, on ne peut pas utiliser directement les méthodes éléments finis internes vue en cours car les espaces de dimension finie introduits ne sont pas inclus dans $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'une fonction qui est globalement continue sur $\overline{\Omega}$ et polynomiale sur chaque triangle définissant le maillage, peut avoir un gradient qui n'est pas dans $\mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$. En effet, les composantes du gradient peuvent présenter des sauts de valeurs au niveau des interfaces entre les triangles.

Question 7. Déterminer l'équation aux dérivées partielles ainsi que les deux conditions aux limites satisfaites par u. On supposera u régulière et on procédera formellement sans chercher à justifier ici les formules d'intégration par parties. De plus, on acceptera le fait que l'image de l'application $v \mapsto \partial_n v$ définie sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$.

Correction. En prenant $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans la formulation variationnelle et on utilisant la formule de Green, on obtient

$$-\int_\Omega \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v.$$

En utilisant une seconde fois la formule de Green, on trouve

$$\int_\Omega (\Delta\Delta u - f) \, v \, dx = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on déduit $\Delta\Delta u = f$ dans Ω. Prenons à présent $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans la formulation variationnelle. En utilisant l'équation dans Ω que nous venons d'obtenir, nous parvenons à

$$\int_{\partial\Omega} \Delta u \, \partial_n v \, d\sigma = 0, \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}).$$

En utilisant le fait que l'image de l'application $v \mapsto \partial_n v$ définie sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$, on déduit $u = \Delta u = 0$ sur $\partial\Omega$ (l'équation $u = 0$ sur $\partial\Omega$ provient de $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$).

Question 8. On considère la résolution successive des deux problèmes

$$(\mathscr{P}_1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } w \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta w = f \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \qquad (\mathscr{P}_2) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\sharp \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u_\sharp = w \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{19}$$

Montrer que l'on a

$$\int_\Omega \Delta u_\sharp \, \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \qquad \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega).$$

Peut-on en déduire que $u_\sharp$ coïncide avec u ? Pourquoi ?

Correction. La fonction $u_\sharp$ vérifie, pour tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Delta u_\sharp \, \Delta v \, dx = -\int_\Omega w \, \Delta v \, dx = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

On a également $u_\sharp = \Delta u_\sharp = 0$ sur $\partial\Omega$. Cependant rien ne garantit que $u_\sharp \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ si bien que nous ne pouvons pas affirmer que $u_\sharp$ et u coïncident.

Introduisons les coordonnées polaires (r, θ) centrées en $O = (0, 0)$ telles que localement dans un voisinage de O, Ω coïncide avec le secteur

$$\{x = (x_1, x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, 0 < r < 1, \ 0 < \theta < 3\pi/2\}.$$

Définissons la fonction s telle que $s(x) = r^{2/3}\sin(2\theta/3)$. On peut vérifier que $\Delta s = 0$ dans Ω et que $s \in \mathrm{H}^1(\Omega) \setminus \mathrm{H}^2(\Omega)$. D'autre part, on peut prouver que tout $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ se décompose sous la forme

$$v = c\, s + \tilde{v} \qquad \text{avec} \qquad \tilde{v} \in \mathrm{H}^2(\Omega) \ \text{ et } \ c = \int_\Omega \zeta \Delta v \, dx, \tag{20}$$

où $\zeta \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ désigne une fonction que l'on peut définir comme l'unique solution d'un problème aux limites simple que nous ne préciserons pas ici.

Question 9. En modifiant le terme source (*i.e.* la donnée w) dans $(\mathscr{P}_2)$ au moyen de la fonction ζ, proposer une méthode pour déterminer la solution de (18) en résolvant successivement $(\mathscr{P}_1)$ puis un problème $(\tilde{\mathscr{P}}_2)$ à préciser. Discuter l'intérêt numérique de cette approche.

Correction. Introduisons le problème

$$(\tilde{\mathscr{P}}_2) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta v = w - \beta\zeta \qquad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{21}$$

avec β à déterminer. D'après ce qui précède, la fonction v admet la décomposition

$$v = c\,s + \tilde{v}$$

avec $\tilde{v} \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ et $c = \int_\Omega \zeta\Delta v\,dx = -\int_\Omega \zeta(w - \beta\zeta)\,dx$. On voit que $c = 0$ si et seulement si $\beta = \int_\Omega \zeta w\,dx / \int_\Omega \zeta^2\,dx$. En fixant ainsi β, la résolution du problème (21) fournit un v appartenant à $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$. De plus, on a pour tout $v' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Delta v \Delta v'\,dx = -\int_\Omega (w - \beta\zeta)\Delta v'\,dx = -\int_\Omega w\Delta v'\,dx = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v'\,dx = \int_\Omega f v'\,dx. \tag{22}$$

La deuxième égalité dans la chaîne ci-dessus provient du fait que $v' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ avec (20). De (22), on déduit que v vérifie le même problème que u. Comme celui-ci possède une unique solution (question 6), cela montre que $v = u$. Ainsi nous avons une méthode pour déterminer u en résolvant successivement deux problèmes de laplacien. Numériquement c'est intéressant car on peut approcher chacune des solutions de $(\mathscr{P}_1)$ et $(\tilde{\mathscr{P}}_2)$ avec une méthode éléments finis comme celles vues en cours. Cela permet d'obtenir une bonne approximation de u sans avoir à construire une approximation interne de $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ qui est fastidieuse à mettre en œuvre.