Introduction à l'intégration numérique

Alexandre

28 août 2018

Résumé

Introduction à l'intégration numérique avec la méthode d'Euler explicite.

Ce document introduit la résolution numérique des problèmes à valeur initiale des équations différentielles ordinaires à l'aide de la méthode de Euler explicite comme schéma d'intégration numérique.

1 Problème

On rappelle qu'un *problème à valeur initiale* (IVP) pour les *équations différentielles ordinaires* (ODE) est décrit par

$$\dot{\mathbf{y}} = f(t, \mathbf{y}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \tag{1}$$

Ce problème admet une solution unique si et seulement si la fonction f est Lipschitz en y, voir [1]. Cependant, la solution exacte de ce problème est rarement calculable sauf pour des classes de problèmes bien définie comme pour les systèmes linéaires de la forme

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

Dans le cas général, on est obligé d'utiliser des méthodes numériques pour calculer une approximation numérique de la solution.

2 Méthode numérique

L'application d'une méthode de Euler (explicite), voir [1], pour ce genre de problème revient à considérer une discrétisation temporelle fixe, nommée h, et l'expression récurrente suivante :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + hf(t_n, \mathbf{y}_n) \quad \text{et} \quad t_{n+1} = t_n + h.$$

Cette méthode est simple à mettre en œuvre mais ne possède pas de bonnes proriétés mathématiques, en particulier, si on considère la stabilité du schéma numérique.

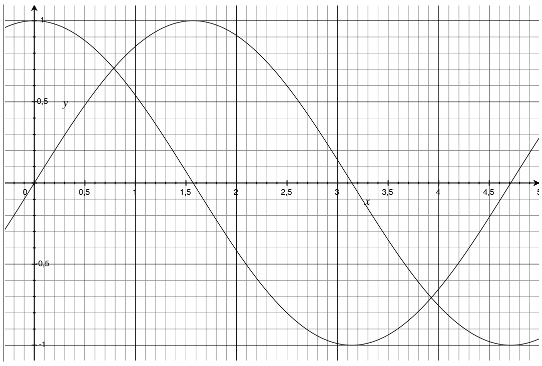

FIGURE 1 – Résultat de l'intégration numérique

3 Résultats

La figure 1 donne l'évolution temporelle de l'équation (2) à l'aide de la méthode d'Euler explicite définie à la section 2.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x \end{aligned} \tag{2}$$

avec $x(0) = -1$ et $y(0) = 0$

Pour ce problème les statistiques de résolution sont données dans la table 1.

Nombre de pas	Acceptés	Rejetés
125	145	12

TABLE 1 – Quelques statistiques

Références

[1] E. Hairer, S.P. Norsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*, volume 8 of *Computational Mathematics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1993.