ENSTA ParisTech
2016-2017

Outils de la simulation – SSC10

Travaux Dirigés & Travaux Pratiques

Feuille n° 1

Objectif(s)

- ★ Mise en œuvre d'un moteur de simulation numérique simple
- ★ Méthode d'intégration Euler explicite
- ★ Intégration à pas fixe et à pas variable

Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de mettre en œuvre un moteur simple de simulation numérique fondé sur la méthode de Euler comme schéma d'intégration numérique.

On rappelle qu'un problème à valeur initiale pour les équations différentielles ordinaires est décrit par

$$\dot{\mathbf{y}} = f(t, \mathbf{y}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \ . \tag{1}$$

L'application d'une méthode de Euler (explicite) pour ce genre de problème revient à considérer une discrétisation temporelle fixe, nommé h, et l'expression récurrente suivante

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + hf(t_n, \mathbf{y}_n) \quad \text{et} \quad t_{n+1} = t_n + h \ .$$

Un moteur de simulation est un algorithme simple qui permet de simuler un système dynamique, à partir d'une condition initiale donnée et pour une durée donnée. Le pseudo-code d'un tel moteur de simulation est le suivant

Data : f la dynamique, $\mathbf{y}_0$ la condition initial, t_0 l'instant de début de simulation, t_{end} l'instant fin de simulation, h le pas d'intégration
$t \leftarrow t_0$;
$\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{y}_0$;
while $t < t_{end}$ **do**
  Print(t, $\mathbf{y}$);
  $y \leftarrow$ Euler(f,t,$\mathbf{y}$,h);
  $t \leftarrow t + h$;
end

Question 1

Mettre en œuvre cet algorithme de simulation dans le langage de votre choix (par exemple , OCaml, Python, Matlab, etc.).

Question 2

Utiliser ce moteur de simulation pour résoudre les problèmes donnés ci-dessous.

NB : pensez à l'automatisation pour faciliter le traitement de la question 3

— A1

$$\dot{y} = -y$$

avec $y(0) = 1$

— A3

$$\dot{y} = y\cos(t)$$

avec $y(0) = 1$

— B1

$$\dot{y}_1 = 2\,(y_1 - y_1 y_2)$$
$$\dot{y}_2 = -\,(y_2 - y_1 y_2)$$

avec $y_1(0) = 1$ et $y_2(0) = 3$

— O1

$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = y_2^2 - \frac{3}{0.001 + y_1^2}$$

avec $y_1(0) = 10$ et $y_2(0) = 0$. La durée de simulation est 50 secondes.

Pour tous les problèmes, le temps de simulation finale est fixé à 20 secondes (sauf mention contraire)

Question 3

Faire varier le pas h d'intégration pour résoudre les problèmes de la question 2. Par exemple, étudier le comportement des méthodes numériques la suite de pas d'intégration : 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 0.75 et 0.9.
Que constatez vous ?

Exercice 2

Une limite des méthodes d'intégration à pas fixe est de considérer une discrétisation temporelle a priori qui peut ne pas bien être adaptée à la dynamique étudiée.

Une façon simple de mettre en œuvre une méthode à pas variable fondée sur la méthode d'Euler explicite est de faire plusieurs intégration avec des pas d'intégration différents. L'idée est de calculer pour un même temps t_n deux approximations numériques de la solution $\mathbf{y}(t_n)$ notée $\mathbf{y}_n^{(0)}$ et $\mathbf{y}_n^{(1)}$. Ainsi on peut calculer l'erreur $e_n = \mathbf{y}_n^{(1)} - \mathbf{y}_n^{(0)}$ qui représente une estimation de la distance à la vraie solution.

En pratique, on calcule une première approximation $\mathbf{y}_n^{(0)}$ avec un pas h et une seconde approximation $\mathbf{y}_n^{(1)}$ avec le pas $h/2$. Notez qu'il faut donc deux applications de la méthode d'intégration avec un pas $h/2$ pour avoir une approximation au même temps.

Si l'erreur e_n est plus grande qu'une valeur tol définie par l'utilisateur alors l'approximation $\mathbf{y}_n$ ne doit pas être considérée et l'intégration doit être recommencée avec un pas h plus petit. Sinon, on peut espérer augmenter le pas h pour la prochaine itération de la boucle de simulation afin d'augmenter la rapidité. Un calcul générique du pas h est donné par la formule suivante

$$h_{n+1} = 0.9 h_n \min\left(\max\left(\frac{\mathrm{tol}}{|e_n|}, 0.3\right), 2\right) \quad .$$

Les valeurs 0.9, 0.3, 2 permettent de limiter la variation de h pour ne pas faire des pas trop grand ou trop petits d'une itération sur l'autre.

A noter que le pas initial h_0 est à définir manuellement.

Question 1

Donnez le pseudo-code de cette méthode d'intégration à pas variable. Mettre en œuvre cette méthode.

Question 2

Résoudre les problèmes de l'exercice 1 en fixant la valeur de tol à 10^{-2}. Comparer les courbes des résultats obtenus avec celles obtenues par une intégration à pas fixe.

Question 3

Faire varier la valeur de tol entre 10^{-3} et 10^{-5} et pour chaque valeur de tol, compter le nombre d'itérations nécessaire à la boucle de simulation pour atteindre le temps final de simulation.

