

Exercice Bonus:

Soit:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 + t + 1} dt \end{aligned}$$

- (1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- (2) Sur quel intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction f est-elle convexe ou concave ?-

/

- (1) $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 + t + 1 > 0$ car son discriminant $\Delta = -3 < 0$. Donc $t^2 + t + 1 \neq 0$. Donc :
- $t \longrightarrow \frac{1}{t^2 + t + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

- (2) $\forall t \in \mathbb{R}, t \longrightarrow \frac{1}{t^2 + t + 1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Et,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$f''(x) = -\frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$f''(x)$ est du signe de $-(2x+1)$ car $(x^2 + x + 1)^2 > 0$. Donc:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Rightarrow -(2x+1) > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \\ f''(x) < 0 &\Rightarrow -(2x+1) < 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc f est concave sur $] -\frac{1}{2}; +\infty[$
 f est convexe sur $] -\infty; -\frac{1}{2}[$.