Exercice 8.1**: Intégrales g/'enéralisées**

(1) $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$.

Soit $b > 0$ et $I_1(b) = \displaystyle\int_1^{b} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$.

$I_1(b) = [\ln(x)]_1^b = \ln(b) \Rightarrow \lim\limits_{b\to+\infty} I_1(b) = +\infty$.

Donc I_1 est divergent.

(2) $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x$.

Soit $b > 0$ et $I_2(b) = \displaystyle\int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I_2(b) = &\ [\ln(x)\cdot(-\frac{1}{x})]_1^b + \int_1^b \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x(\text{IPP}) \\ = &\ [\ln(x)\cdot(-\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}]_1^b \\ = &\ -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{b\to+\infty} I_2(b) = 1$.

Donc I_2 converge et $I_2 = 1 \in \mathbb{R}$.

(3) $I_3 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$.

Soit $b > 0$ et $I_3(b) = \displaystyle\int_2^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$.

Changement de variables: bornes : $u :\ \ln 2 \to +\infty$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{\ln x}} &= u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$I_3(b) = \int_{\ln 2}^{\ln b} u^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}u = [2\cdot u^{\frac{1}{2}}]_{\ln 2}^{\ln b} = 2\cdot\sqrt{\ln b} - 2\cdot\sqrt{\ln 2}.$$

Donc $\lim\limits_{b\to+\infty} I_2(b) = +\infty$.

Donc I_3 ne converge pas.