Exercice 7.4: Changement de variables

Rappel: $\int^x u'(x) \cdot f'(u(x))\ \mathrm{d}x = f(u(x))$.

(1) $I_1 = \int_0^1 xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x$.

La fonction $x \to xe^{-x^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$.

- Changement de variables:

$$u = x^2 \longrightarrow \begin{array}{l} \text{bornes: } u: 0^2 = 0 \to 1^2 = 1, \\ du = 2xdx, \\ xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{-u}\mathrm{d}u. \end{array}$$

Donc:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 e^{-u} \cdot \frac{1}{2}\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-u}\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left[-e^{-u}\right]_0^1 \end{aligned}$$

Donc:

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{e} + 1\right)$$

OU

- On peut remarquer que $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$.

Ainsi:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 -2xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x \\ &= -\tfrac{1}{2} \cdot [e^{-x^2}]_0^1 \end{aligned}$$

Donc:

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{e} + 1\right)$$

(2) $I_2 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^3}\ \mathrm{d}x$.

La fonction $x \to x^2\sqrt{1-x^3}$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$.

- Changement de variables:

$$u = x^3 \longrightarrow \begin{array}{l} \text{bornes: } u : 0^3 = 0 \to 1^3 = 1, \\ \mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x, \\ x^2\sqrt{1-x^3}\ \mathrm{d}x = \sqrt{1-u}\ \mathrm{d}u \end{array}$$

Donc:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{1-u}\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}(1-u)^{3/2}\right]_0^1 \end{aligned}$$

Donc:

$$I_2 = \frac{2}{9}$$

OU

- On peut remarquer que $\left(\ (1-x^3)^{\frac{3}{2}}\ \right)' = -\frac{9}{2}x^2\sqrt{1-x^3}$.

Ainsi:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{2}{9}\cdot\int_0^1 -\frac{9}{2}x^2\sqrt{1-x^3}\ \mathrm{d}x \\ &= -\tfrac{2}{9}\cdot[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 \end{aligned}$$

Donc:

$$I_2 = \frac{2}{9}$$

(3) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \to \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$.

Et $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} = e^x \cdot (1+e^x)^{-1/2}$

- Changement de variables:

$$
\begin{aligned}
u = e^x \longrightarrow\ & \text{bornes: } u : e^0 = 1 \to e^1 = e, \\
& \mathrm{d}u = e^x \mathrm{d}x, \\
& \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x = (1+u)^{-1/2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Donc:

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_1^e (1+u)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \Big[2 \cdot (1+u)^{1/2}\Big]_1^e
\end{aligned}
$$

Donc:

$$I_3 = 2\sqrt{1+e} - 2\sqrt{2}$$

OU

- On peut remarquer que $\big(\ (1+e^x)^{1/2}\ \big)' = \frac{1}{2}e^x \cdot (1+e^x)^{-\frac{1}{2}}$.

Ainsi:

$$
\begin{aligned}
I_3 &= 2\int_0^1 \frac{1}{2}e^x \cdot (1+e^x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot [(1+e^x)^{1/2}]_0^1
\end{aligned}
$$

Donc:

$$I_3 = 2\sqrt{1+e} - 2\sqrt{2}$$

(4) $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

La fonction $x \to \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ est continue sur $[1,2]$ donc intégrable sur $[1,2]$.

- Changement de variables:

$$u = \sqrt{x} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{bornes: } u : \sqrt{1} = 1 \to \sqrt{2}, \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \\ \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = e^u \mathrm{d}u \end{array}$$

Donc:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^{\sqrt{2}} e^u \,\mathrm{d}u \\ &= [e^u]_1^{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Donc:

$$I_4 = e^{\sqrt{2}} - e$$

OU

- On peut remarquer que $\left(e^{\sqrt{x}} \right)' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

Ainsi:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= [e^{\sqrt{x}}]_1^2 \end{aligned}$$

Donc:

$$I_4 = e^{\sqrt{2}} - e$$

(5) $I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)^2}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x(1+\ln x)^2}$ est continue sur $[1,2]$ donc intégrable sur $[1,2]$.

Et $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)^2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}(1+\ln x)^{-2}$.

- Changement de variables:

$$u = \ln x \longrightarrow \begin{array}{l} \text{bornes: } u : ln1 = 0 \to \ln 2, \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x, \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)^2} = \dfrac{\mathrm{d}u}{(1+\ln x)^2} \end{array}$$

Donc:

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^{\ln 2} (1+u)^{-2}\ \mathrm{d}u \\ &= \left[-(1+u)^{-1}\right]_0^{\ln 2} \end{aligned}$$

Donc:

$$I_5 = 1 - \frac{1}{1+\ln 2}$$

OU

- On peut remarquer que $\left(\ (1+\ln x)^{-1}\ \right)' = -\frac{1}{x}(1+\ln x)^{-2}$.

Ainsi:

$$\begin{aligned} I_5 &= -\int_1^2 (\ -(1+\ln x)^{-1}\ )'\ \mathrm{d}x \\ &= -[(\ (1+\ln x)^{-1}\ ]_1^2 \end{aligned}$$

Donc:

$$I_5 = 1 - \frac{1}{1+\ln 2}$$

(6) $I_6 = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{5}{2}} x \, \mathrm{d}x$.

La fonction $x \to (1-x^2)^{\frac{5}{2}} x$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$.

- Changement de variables:

$$u = x^2 \longrightarrow \begin{array}{l} \text{bornes: } u : 0^2 = 0 \to 1^2 = 1, \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x, \\ (1-x^2)^{\frac{5}{2}} x \, \mathrm{d}x = (1-u)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} \, \mathrm{d}u \end{array}$$

Donc:

$$\begin{aligned} I_5 &= (1-u)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{2}{7} (1-u)^{\frac{7}{2}} \right]_0^1 \end{aligned}$$

Donc:

$$I_6 = \frac{1}{7}$$

OU

- On peut remarquer que $\left((1-x^2)^{\frac{7}{2}} \right)' = -7 \cdot x(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$.

Ainsi:

$$\begin{aligned} I_6 &= -\tfrac{1}{7} -7 \cdot (1-x^2)^{\frac{5}{2}} \, \mathrm{d}x \\ &= -\tfrac{1}{7} [(1-x^2)^{\frac{7}{2}}]_0^1 \end{aligned}$$

Donc:

$$I_6 = \frac{1}{7}$$

(7) $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\ \mathrm{d}x.$

La fonction $x \to \dfrac{e^x}{1+e^x}$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$.

- Changement de variables:

$$u = e^x \longrightarrow \begin{array}{l} \text{bornes: } u : e^0 = 1 \to e^1 = e, \\ \mathrm{d}u = e^x \mathrm{d}x, \\ \dfrac{e^x}{1+e^x}\ \mathrm{d}x = (1+u)^{-1}\ \mathrm{d}u \end{array}$$

Donc:

$$\begin{aligned} I_7 &= \frac{1}{1+u}\ \mathrm{d}u \\ &= [\ln(1+u)]_1^e \end{aligned}$$

Donc:

$$I_7 = \ln(\frac{1+e}{2})$$

OU

- On peut remarquer que :$\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{(1+e^x)'}{1+e^x}$

donc: $\dfrac{e^x}{1+e^x} = (\ \ln(1+e^x)\ )'.$

Ainsi:

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_0^1 (\ \ln(1+e^x)\ )'\ \mathrm{d}x \\ &= [\ \ln(1+e^x)\ ]_0^1 \end{aligned}$$

Donc:

$$I_7 = \ln(1+e) - \ln 2$$