Exercice 7.2: Intégration par parties

Rappel: $\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ dx\ =\ [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ dx.$

Dans la suite le terme en bleu sera intégré et le terme en rouge sera dérivé.

(1) $I_1 = \int_1^2 x^\alpha \cdot \ln x\ dx.$

La fonction $x :\rightarrow x^\alpha \cdot \ln x$ est continue sur $[1,2]$ donc intégrable sur $[1,2]$. En faisant une intégration par parties, on obtient;

$$\begin{aligned} I_1 &= [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \cdot \ln x]_1^2 - \frac{1}{\alpha+1} \cdot \int_1^2 x^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x}\ dx \\ &= \frac{1}{\alpha+1}[x^{\alpha+1} \cdot \ln x]_1^2 - \frac{1}{\alpha+1} \cdot \int_1^2 x^\alpha\ dx \\ &= \frac{1}{\alpha+1}[x^{\alpha+1} \cdot \ln x - \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_1^2 \end{aligned}$$

Donc:

$$I_1 = \frac{1}{\alpha+1}(2^{\alpha+1}\ln 2 - \frac{1}{\alpha+1}2^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}).$$

(2)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 x^2 \cdot 2^x\ dx \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot e^{x\ln 2}\ dx. \end{aligned}$$

La fonction $x :\rightarrow x^2 \cdot e^{x\ln 2}$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$. En faisant une intégration par parties, on obtient;

$$I_1 = [x^2 \cdot \frac{1}{\ln 2}e^{x\ln 2}]_0^1 - \frac{2}{\ln 2} \cdot \int_0^1 x \cdot e^{x\ln 2}\ dx$$

Il faut refaire une I.P.P.

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \cdot ([x \cdot \frac{e^{x\ln 2}}{\ln 2}]_0^1 - \frac{1}{\ln 2} \cdot \int_0^1 e^{x\ln 2}\ dx) \\ &= \frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \cdot \left(\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}[\frac{e^{x\ln 2}}{\ln 2}]_0^1\right) \\ &= \frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \cdot \left(\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}(\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2})\right) \end{aligned}$$

Donc:

$$I_2 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{4}{\ln^2 2} + \frac{2}{\ln^3 2}.$$