Exercice 7.4

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = x + \frac{3 + 2\ln(x)}{x},$$
$$\forall x > 0, \qquad g(x) = x^2 - 2\ln(x) - 1.$$

(1) (a) *Calculer la dérivée de g*

g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ car elle est une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
Ainsi:
$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} \qquad \forall x > 0$$

(b) *Donner le tableau de variarions de g*

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x - \tfrac{2}{x} \\ &= \tfrac{2}{x}(x^2 - 1) \\ &= \tfrac{2}{x}(x-1)(x+1), \end{aligned}$$

donc:
$\forall x > 0,\ \ g'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$
$\qquad\qquad g'(x) \leq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$.
De plus, $g(x) = x^2(1 - 2\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2})$, donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Et de manière évidente: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.
On déduit ainsi le tableau de variations de g:

x	0		1		$+\infty$
	$+\infty$				$+\infty$
g	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$\|\|$		0		

(c) *Quel est le signe de g*

D'aprés le tableau de variations de g:
$$\forall x > 0, \qquad g(x) \geq g(1) = 0.$$
Donc g est positive sur $]0;+\infty[$.

(2) (a) *Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$*

$x \to 3 + 2\ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
$x \to \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $x \neq 0$.
Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(b) *Déterminer la limite de f quand x tend vers 0^+.*
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3+2\ln(x)}{x} = (\frac{-\infty}{O^+}) = -\infty$, donc:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

(c) *Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.*
Comme $f(x) = x + \frac{3}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(d) *Calculer la dérivée de f*
Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{array}{rcl} \forall x > 0,\ f'(x) & = & 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^2} - 2\frac{\ln(x)}{x^2} \\ & = & \frac{1}{x^2}(x^2 - 2\ln(x) - 1) \\ & = & \frac{1}{x^2} g(x) \end{array}$$

(e) *Donner le tableau de variations de f*
$x \to \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x > 0$ et d'aprés 1., $g(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$ donc:

$$f'(x) \geq 0 \qquad \forall x > 0$$

Avec 2.b et 2.c, le tableau de variations de f est:

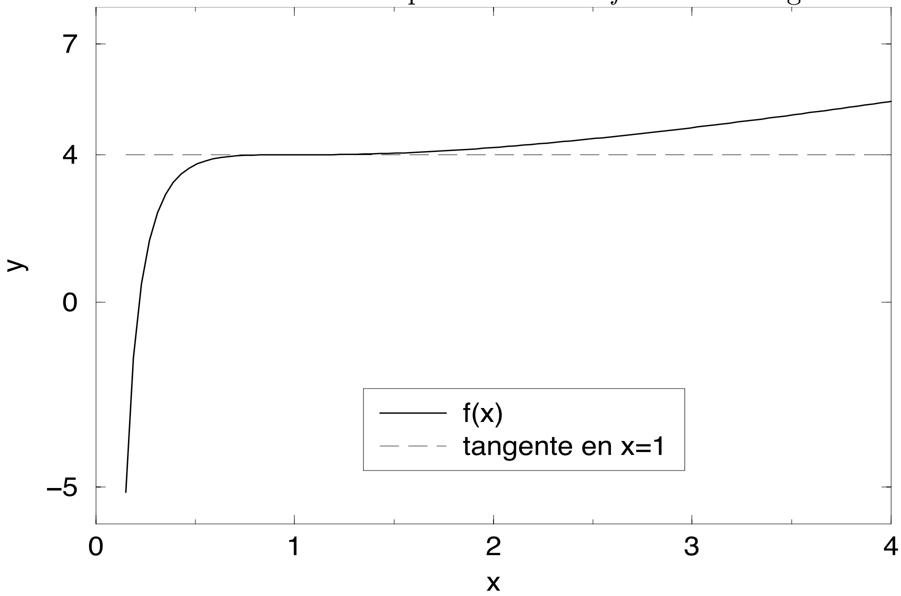
x	0		$+\infty$
	$\|\|$		$+\infty$
f	$\|\|$	$\nearrow$	
	$-\infty$		

(f) *Sur quel intervalle f est elle convexe, concave?*
f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc:

$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & (f'(x))' \\ & = & (\frac{1}{x^2} g(x))' \\ & = & -2\frac{g(x)}{x^3} + \frac{g'(x)}{x^2} \\ & = & \frac{1}{x^3} \cdot (xg'(x) - 2g(x)) \end{array}$$

Donc $f''(x)$ est du signe de $xg'(x) - 2g(x)$ car $x^3 > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Or $\begin{array}{rcl} xg'(x) - 2g(x) & = & 2x^2 - 2 - 2x^2 + 4\ln(x) + 2 \\ & = & 4\ln(x), \end{array}$
donc: $\forall 0 < x \leq 1,\ f''(x) \leq 0 \ \Rightarrow\ f$ est concave sur $]0;1[$
$\forall x \geq 1,\ f''(x) \geq 0 \ \Rightarrow\ f$ est convexe sur $]1;+\infty[$

FIGURE 1. 2-i: Tracé de la courbe représentative de f et de sa tangente en x=1



(g) *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée a. Montrer que $a \in]0;1[$*
D'aprés $2.d$ et $2.e$, f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $f(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$. Donc, a fortiori, une bijection de $]0;+1[\subset]0;+\infty[$ dans $f(]0;+1[) =]f(0);f(1)[$ car f est croissante.
Comme $]f(0);f(1)[=]-\infty;4[$ et comme $0 \in]-\infty;4[$:

$$\exists! a \in]0;1[| f(a) = 0.$$

(h) Soit T_1, la tangente à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, au point x=1. Ainsi:

$$\begin{aligned} T_1 : \; y &= f'(1) \cdot (x-1) + f(1) \\ &= 0 \cdot (x-1) + 4 \end{aligned}$$

Donc $y = 4$ est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point (1,f(1)=4).

(i) *Tracer le graphe de f*
voir FIGURE 1.