Exercice 6.4 **-**

Soit $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{array} \right.$.

Pour simplifier certains calculs à venir on peut écrire:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -\sqrt{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{array} \right. .$$

(1)

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -\sqrt{-x} = 0$

Donc:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

(2)

- $$\left. \begin{array}{l} \forall x > 0, f \text{ est continue} \\ \forall x < 0, f \text{ est continue} \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

- $$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) & = & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{|-x|}{-x}\sqrt{|-x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{array} \right. \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{array} \right. \\ & = & f(x) \end{array}$$

  Donc f est impaire sur $\mathbb{R}$.

(3) On utilise la définition d'une fonction croissante et non l'étude du signe de la dérivé pour éviter le problème de la dérivation en 0.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq x_1 < x_2 & \Leftrightarrow & 0 \leq \sqrt{x}_1 < \sqrt{x}_2 \text{ car } x \to \sqrt{x} \text{ est croissante.} \\ & \Leftrightarrow & f(x_1) < f(x_2) \end{array}$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On montre de même que f est croissante sur $\mathbb{R}^-$ donc on conclut que f est croissante sur $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}$.
Ainsi f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(4) f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! f^{-1} | (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Vérifions que $f^{-1}(x) = x \cdot |x|$ est cette fonction.

- Pour $x = 0$: $(f^{-1} \circ f)(0) = f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0) = 0 \cdot |0| = 0$.
  Donc
  $$(f^{-1} \circ f)(0) = 0$$

- Pour $x \neq 0$: $$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f(x) \cdot |f(x)| \\ &= \tfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} \cdot \left|\tfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|}\right| \\ &= \tfrac{|x|}{x} \cdot |x| \\ &= \tfrac{x}{|x|} \cdot |x| \text{ car } \tfrac{x}{|x|} = \tfrac{|x|}{x} \\ &= x \end{aligned}$$.
  Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

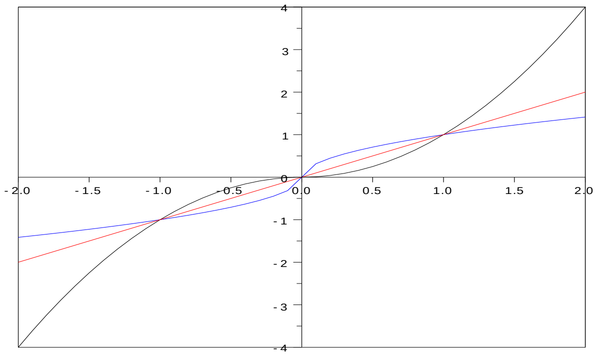
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1} \circ f)(x) = x$.
Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = x \cdot |x|$$

- Tracé des courbes:

'-': courbe représentative de f
'-': courbe représentative de f^{-1}
'-': y=x

On vérifie bien que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ et $\mathcal{C}_f$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0