Exercice 5.3 **-**

- **d-** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = ?$
  $f(x) = \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ donc en $x = 0$.
  Ainsi
  $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$
  Or: $f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$.
  Donc
  $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$
  $$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$$
  $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e$$
  On a posé $y = \frac{1}{x}$.

- **e-** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = ?$
  $f(x) = \sqrt{1+x}$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ donc en $x = 0$.
  Ainsi
  $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x}.$$
  Or: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$.
  Donc
  $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x} = \frac{1}{2}.$$
  $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = -\lim_{y\to -\infty} y \cdot (\sqrt{1-\frac{1}{y}} - 1)$$
  On a posé $y = -\frac{1}{x}$ et donc
  $$\lim_{y\to -\infty} y \cdot (\sqrt{1-\frac{1}{y}} - 1) = -\frac{1}{2}$$