

Exercice 4.10 -

soient: $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ a - \frac{b}{x} & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

f est continue sur $] -\infty; 2]$ et $]4; +\infty[$ car f est constante.

f est continue sur $] -2; 4]$ car $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est continue sur $] -2; 4]$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R} - \{2; 4\}$.

f est continue en 2 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} a - \frac{b}{x} = f(2) = 0$.

f est continue en 4 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) = a - \frac{b}{4}$.

Or:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = a - \frac{b}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 1$$

On doit donc résoudre:

$$\begin{cases} a - \frac{b}{2} = 0 \\ a - \frac{b}{4} = 1 \end{cases}$$

Les solutions sont $a = 2$ et $b = 4$.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$ ssi $a = 2$ et $b = 4$.