

Exercice 10.1

Soit:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x + 2 - 2 \ln(e^x + 1) \end{aligned} \quad (*)$$

- (1) *Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ -*

$x \rightarrow e^x + 1$ est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $]1; +\infty[\subset \mathbb{R}^{+*}$.

$u \rightarrow \ln(u)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$,
 $x \rightarrow -2 \ln(e^x + 1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$x \rightarrow x + 2$ est une fonction affine donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

conclusion: Par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

- (2) *Montrer que pour tout x réel, on a :*

$$f(x) = -x + 2 - 2 \cdot \ln(e^{-x} + 1)$$

En déduire que f est paire sur $\mathbb{R}$ -

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= x + 2 - 2 \cdot \ln(e^x(1 + e^{-x})) \\ &= x + 2 - 2 \cdot \ln(e^x) - 2 \cdot \ln(1 + e^{-x}) \\ &= x + 2 - 2x - 2 \cdot \ln(1 + e^{-x}) \\ \Rightarrow \quad f(x) &= -x + 2 - 2 \cdot \ln(1 + e^{-x}) \end{aligned}$$

En remplaçant x par $-x$ dans (*), on obtient:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) &= -x + 2 - 2 \cdot \ln(e^{-x} + 1) \\ &= f(x) \\ \Rightarrow \quad f(x) &= -x + 2 - 2 \cdot \ln(1 + e^{-x}) \end{aligned}$$

- (3) *Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ -*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 2 - 2 \cdot \ln(1 + e^{-x}) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

- (4) *Démontrer que la droite D d'équation : $y = -x + 2$ est asymptote à C en $+\infty$. En déduire que C admet une asymptote en $-\infty$ dont on donnera l'équation -*

RAPPEL: ASYMPTOTE (OBLIQUE)

La droite d'équation $y = a \cdot x + b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (a \cdot x + b) = 0. \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \cdot \ln(e^{-x} + 1) = 0$$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à C en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + 2) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + 2) &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} f(-\tilde{x}) - (\tilde{x} + 2) \quad \text{on a posé } \tilde{x} = -x \\ &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} f(\tilde{x}) - (\tilde{x} + 2) \end{aligned}$$

car f est paire donc $f(-\tilde{x}) = f(\tilde{x})$.

Donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à C en $-\infty$.

(5) *Donner le tableau de variations de f*

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2 \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= 1 - 2 \cdot \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{1}{e^x + 1} \right) \\ &= -1 + \frac{2}{e^x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Rightarrow -1 + \frac{2}{e^x + 1} \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{2}{e^x + 1} \geq 1 \\ &\Rightarrow e^x + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow e^x \leq 1 \end{aligned}$$

Donc: $f'(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq \ln(1) = 0$.

Et $f(0) = 2 - \ln(2)$, donc:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
g	$-\infty$	$2 - 2\ln(2)$	$-\infty$

(6) *Déterminer la solution, notée α , de l'équation $f(x) = x$*

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Rightarrow 2 - 2 \cdot \ln(e^x + 1) = 0 \\ &\Rightarrow 2 \cdot \ln(e^x + 1) = 2 \\ &\Rightarrow \ln(e^x + 1) = 1 \end{aligned}$$

Donc ($f(x) = x \Rightarrow x = \ln(e - 1)$).

(7) *Montrer que f est concave sur $\mathbb{R}$*

$\forall x \in \mathbb{R} :$

$$f''(x) = -\frac{2}{(e^x + 1)^2} < 0 \Rightarrow f \text{ est concave sur } \mathbb{R}.$$

(8) *Tracer le graphe de f et ses asymptotes*

voir FIGURE 1.

FIGURE 1. Tracé de la courbe représentative de f et des 2 tangentes

