Exercice 10.2
Soit:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x\in[0;\frac{1}{2}[\\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x\in[\frac{1}{2};1[\\ 0 & \text{si } x\notin[0;1[\end{cases}$$

(1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}-\{0;\frac{1}{2};1\}$ car elle est définie avec des fonctions continues sur $\mathbb{R}-\{0;\frac{1}{2};1\}$.
Il reste Ã étudier la continuité en $x=0, x=\frac{1}{2}, x=1$.
Si parmi ces valeurs de x, dés qu'on trouve une valeur de x en laquelle f n'est pas continue, on s'arrête. f ne sera pas continue sur $\mathbb{R}$.
En $x=0$:
$f(0)=\dfrac{1}{2(1-0)^2}=\frac{1}{2}$.
$\lim\limits_{\substack{x->0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x->0\\x<0}} 0=0$.
Ainsi: $f(0)\neq\lim\limits_{\substack{x->0\\x<0}} f(x)$, donc f n'est pas continue en 0 donc n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

(2) *Rappel: f dérivable en $x=\frac{1}{2}$ si:*

$$\lim_{\substack{x->\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{\substack{x->\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=l\in\mathbb{R}$$

Ainsi, $f'(\frac{1}{2})=l$.

- Pour $x<\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} &= \frac{\dfrac{1}{2(1-x)^2}-2}{x-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-4(1-x)^2}{2x-1}\\ &= \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-2(1-x))\cdot(1+2(1-x))}{2x-1}\\ &= \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{(2x-1)\cdot(3-2x)}{2x-1}\\ &= \frac{1}{(1-x)^2}\cdot(3-2x)\end{aligned}$$

Donc:

$$\lim_{\substack{x->\frac{1}{2} \\ x<\frac{1}{2}}} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = 8$$

- Pour $x > \frac{1}{2}$:

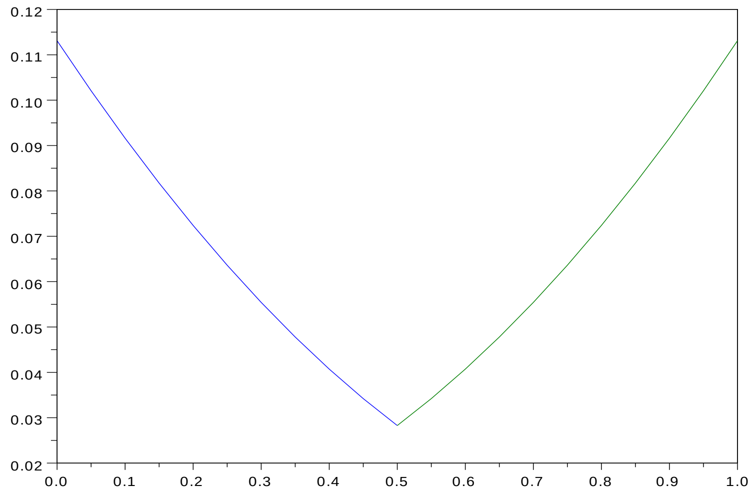
$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} &= \frac{\dfrac{1}{2x^2}-2}{x-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1-4x^2}{2x-1} \\ &= \frac{1}{x^2}\cdot\frac{(1-2x)\cdot(1+2x)}{2x-1} \\ &= -\frac{1}{x^2}\cdot(1+2x)\end{aligned}$$

Donc:

$$\lim_{\substack{x->\frac{1}{2} \\ x>\frac{1}{2}}} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = -8$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable en $x = \frac{1}{2}$.

(3)



(4) La suite reste à faire.