Exercice 10.1
Soit:

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1) \end{array} \qquad (*)$$

(1) *Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ -*

$x \to e^x + 1$ est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $]1; +\infty[\subset \mathbb{R}^{+*}$.

$u \to \ln(u)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $x \to -2\ln(e^x + 1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$x \to x + 2$ est une fonction affine donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

conclusion: Par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

(2) *Montrer que pour tout x réel, on a :*

$$f(x) = -x + 2 - 2 \cdot \ln(e^{-x} + 1)$$

En déduire que f est paire sur $\mathbb{R}$ -

$$\begin{array}{rrcl} \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) & = & x + 2 - 2 \cdot \ln(\ e^x(1 + e^{-x})\ ) \\ & & = & x + 2 - 2 \cdot \ln(e^x) - 2 \cdot \ln(1 + e^{-x}) \\ & & = & x + 2 - 2x - 2 \cdot \ln(1 + e^{-x}) \\ \Rightarrow & f(x) & = & -x + 2 - 2 \cdot \ln(1 + e^{-x}) \end{array}$$

En remplaçant x par $-x$ dans $(*)$, on obtient:

$$\begin{array}{rrcl} \forall x \in \mathbb{R}, & f(-x) & = & -x + 2 - 2 \cdot \ln(e^{-x} + 1) \\ & & = & f(x) \\ \Rightarrow & f(x) & = & -x + 2 - 2 \cdot \ln(1 + e^{-x}) \end{array}$$

(3) *Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ -*

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x \to +\infty} -x + 2 - 2 \cdot \ln(1 + e^{-x}) \\ & = & -\infty \end{array}$$

(4) *Démontrer que la droite D d'équation : $y = -x + 2$ est asymptote à C en $+\infty$. En déduire que C admet une asymptote en $-\infty$ dont on donnera l'équation -*

RAPPEL: ASYMPTOTE (OBLIQUE)

La droite d'équation $y = a \cdot x + b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (a \cdot x + b) = 0.$●

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x+2) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2 \cdot \ln(e^{-x}+1) = 0$
$\Rightarrow$ la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à C en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x+2) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Or } \lim_{x \to +\infty} f(x) - (-x+2) &= \lim_{\tilde{x} \to -\infty} f(-\tilde{x}) - (\tilde{x}+2) \quad \text{on a posé } \tilde{x} = -x \\ &= \lim_{\tilde{x} \to -\infty} f(\tilde{x}) - (\tilde{x}+2) \end{aligned}$$

car f est paire donc $f(-\tilde{x}) = f(\tilde{x})$.
Donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à C en $-\infty$.

(5) *Donner le tableau de variations de f*
Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2 \cdot \tfrac{e^x}{e^x+1} \\ &= 1 - 2 \cdot (\tfrac{e^x+1}{e^x+1} - \tfrac{1}{e^x+1}) \\ &= -1 + \tfrac{2}{e^x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Rightarrow -1 + \tfrac{2}{e^x+1} \geq 0 \\ &\Rightarrow \tfrac{2}{e^x+1} \geq 1 \\ &\Rightarrow e^x + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow e^x \leq 1 \end{aligned}$$

Donc: $f'(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq \ln(1) = 0$.
Et $f(0) = 2 - \ln(2)$, donc:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
			$2 - 2\ln(2)$		
g		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

(6) *Déterminer la solution, notée α , de l'équation $f(x) = x$ -*

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Rightarrow 2 - 2 \cdot \ln(e^x+1) &= 0 \\ &\Rightarrow 2 \cdot \ln(e^x+1) &= 2 \\ &\Rightarrow \ln(e^x+1) &= 1 \end{aligned}$$

Donc $(f(x) = x \Rightarrow x = \ln(e-1)\ )$.

(7) *Montrer que f est concave sur $\mathbb{R}$*
$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = -\frac{2}{(e^x+1)^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ est concave sur } \mathbb{R}.$$

(8) *Tracer le graphe de f et ses asymptotes*
voir FIGURE 1.

FIGURE 1. Tracé de la courbe représentative de f et des 2 tangentes