Ne pas rendre l'énoncé avec la copie
La présentation de la copie sera prise en compte dans le barème

Exercice 1 :

1. Soit $g(x) = e^{-e \cdot \frac{\ln x}{x} + 1} = \exp(-e \cdot \frac{\ln x}{x} + 1)$.

En vous aidant de son tableau de variation, montrer que : $\forall x > 0, g(x) \geq 1$.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_g =]0; +\infty[$.

Donc $\forall x \in \mathcal{D}_g : g'(x) = [\dots] = \frac{e}{x} \cdot (\ln(x) - 1) \cdot g(x)$.

Comme $\forall x \in \mathcal{D}_g, x^2 > 0$ et $g(x) > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\ln(x) - 1$, ainsi :

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	+ ∞ 	$\searrow$ 1	$\nearrow$ + ∞

Donc $\forall x > 0, g(x) \geq g(e) = 1$.

2. Etudiez la continuité et la dérivabilité, en $x = 0$ et $x = 1$, de :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x| \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

$$\forall x \neq 1, f(x) = \frac{|x| \cdot \sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{|x| \cdot |x-1|}{x-1}.$$

- Continuité :

- f est continue en 0 comme produit de fonctions continues.
- Pour $x > 1$:

$$f(x) = \frac{x \cdot (x - 1)}{x - 1} = x \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 1 = f(1)$$

Pour $0 < x < 1$:

$$f(x) = \frac{x \cdot (x - 1)}{x - 1} = x \cdot (-1) \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -1 \neq f(1)$$

Donc f n'est pas continue en $x = 1$.

- Dérivabilité :

– On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{|x - 1|}{x - 1} = \frac{|x|}{x} \cdot (-1)$$

Car au voisinage de $x = 0$, $x - 1 < 0$ donc $|x - 1| = -(x - 1)$.

Or

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} \cdot (-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} \cdot (-1) = 1 \in \mathbb{R}$$

Mais

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} \cdot (-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{+x}{x} \cdot (-1) = -1 \in \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable en $x = 0$ car $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$

– f n'est pas continue en $x = 1$ donc ne peut pas être dérivable en $x = 1$.

3. (a) Factoriser le trinôme : $x^2 + x - 6$

$$x^2 + x - 6 = (x + 3) \cdot (x - 2)$$

(b) En utilisant le a. et en faisant apparaître un taux d'accroissement, calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6}$$

$$\frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6} = \frac{e^x - e^2}{(x + 3) \cdot (x - 2)} = \frac{e^x - e^2}{x - 2} \cdot \frac{x - 2}{(x + 3) \cdot (x - 2)} = \frac{e^x - e^2}{x - 2} \cdot \frac{1}{x + 3}$$

La fonction $h : x \rightarrow h(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en $x = 2$ et

$$h'(2) = e^2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x + 3} = \frac{e^2}{5}$$

Exercice 2 : (≈ 11 points)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = [\ln(x)]^2 - 2 \cdot \ln(x) - 1$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

cf cours

2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

$$\forall x > 0, f'(x) = 2 \cdot \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x} \cdot (\ln x - 1)$$

(b) En déduire l'unique point critique de f .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

3. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

On peut écrire : $f(x) = \ln(x) \cdot (\ln(x) - 2 - \frac{1}{\ln(x)})$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - 2 - \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) \cdot (\ln(x) - 2 - \frac{1}{\ln(x)}) = +\infty$.

4. Ecrire le tableau de variation de f . En déduire le minimum global de f sur $\mathcal{D}_f$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	+ ∞ 	$\searrow$ $f(e) = -2$	$\nearrow$ + ∞

5. (a) Trouver les ensembles sur lesquels f est convexe, concave.
 f est $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et :

$$f''(x) = [\dots] = \frac{2}{x^2} \cdot (2 - \ln x)$$

Donc

$$f \text{ convexe} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^2$$

et

$$f \text{ concave} \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq e^2$$

(b) En déduire que :

i. au voisinage de $x = 1$: $f(x) \geq -2x + 1$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 1$ est $y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$. Comme f est convexe sur $]0; e^2]$ et $1 \in]0; e^2]$ donc :

$$f(x) \geq -2x + 1$$

ii. au voisinage de $x = e^3$: $f(x) \leq \frac{4}{e^3}x - 2$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = e^3$ est $y = f'(e^3) \cdot (x - e^3) + f(e^3)$. Comme f est concave sur $[e^2; +\infty[$ et $e^3 \in [e^2; +\infty[$ donc :

$$f(x) \leq \frac{4}{e^3}x - 2$$

6. Montrer que sur $]e; +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\tilde{x}$.

Déterminer $\tilde{x}$.

f est strictement croissante sur $[e; +\infty[$ à valeurs dans $[-2; +\infty[$, donc f est une bijection de $[e; +\infty[$ dans $[-2; +\infty[$. Donc $\forall y_0 \in [-2; +\infty[$, $\exists! x_0 \in [e; +\infty[$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Comme $2 \in [-2; +\infty[$, il existe un unique $\tilde{x} \in [e; +\infty[$ tel que $f(\tilde{x}) = 2$.

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Leftrightarrow [\ln(x)]^2 - 2 \cdot \ln(x) - 1 = 2 \\ &\Leftrightarrow [\ln(x)]^2 - 2 \cdot \ln(x) - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow X^2 - 2 \cdot X - 3 = 0, \quad \text{où } X = \ln x \\ &\Leftrightarrow X = \ln(x) = 3 \text{ ou } X = \ln x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = e^3 \text{ ou } x = e^{-1} \end{aligned}$$

Comme $\tilde{x} \in [e; +\infty[$,

$$\tilde{x} = e^3$$