Université Paris-Dauphine Année 2013-2014
prérentrée DEGEAD1 **Contrôle 2**
Groupe 5

Correction controle 2

Exercice 1 :
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^2 |x^2 - 3x + 2| \cdot \mathrm{d}x.$

   $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x+2)$ donc $\begin{array}{c|ccccc} x & & 1 & & 2 & \\ \hline x^2-3x+2 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$ Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 3x + 2) \cdot \mathrm{d}x \ + \ \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) \cdot \mathrm{d}x \\ & = & \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_1^2 \\ & = & 1 \end{array}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot (x - 2\sqrt{x}) \cdot \mathrm{d}x$

$$\begin{array}{rcl} I_2^N & = & \displaystyle\int_0^N \sqrt{x} \cdot (x - 2\sqrt{x}) \cdot \mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_0^N (x^{\frac{3}{2}} - 2x) \cdot \mathrm{d}x \\ & = & \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2\right]_0^N \\ & = & N^2 \cdot (\frac{2}{5}\sqrt{N} - 1) \end{array} .$$

   $\lim\limits_{N \to +\infty} I_2^N = +\infty$ donc I_2 est divergent.

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^{e^2} (2x^3 + 1) \cdot \ln(x) \cdot \mathrm{d}x$ en faisant une intégration par partie.

   On pose :
   $u'(x) = (2x^3 + 1)$ donc $u(x) = \frac{1}{2}x^4 + x$
   $v(x) = \ln(x)$ donc $v'(x) = \frac{1}{x}$.
   Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} I_3 & = & [(\frac{1}{2}x^4 + x)\ln x]_1^{e^2} - \displaystyle\int_1^{e^2} (\frac{1}{2}x^4 + x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \\ & = & e^8 + 2e^2 - \displaystyle\int_1^{e^2} (\frac{1}{2}x^3 + 1) \cdot \mathrm{d}x \\ & = & e^8 + 2e^2 - [\frac{1}{8}x^4 + x]_1^{e^2} \\ & = & \frac{7}{8}e^8 + e^2 + \frac{9}{8} \end{array} .$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_1^2 (1 + 2x) \cdot \ln(1 + \frac{1}{x}) \cdot \mathrm{d}x$ en faisant une intégration par partie.

   On pose :

$u'(x) = (2x+1)$ donc $u(x) = x^2 + x$
$v(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$ donc $v'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$.
Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} I_4 & = & [(x^2+x)\ln(1+\frac{1}{x})]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 (-1) \cdot \mathrm{d}x \\ & = & [(x^2+x)\ln(1+\frac{1}{x})]_1^2 + [x]_1^2 \\ & = & 6\ln 3 - 8\ln 2 + 1 \end{array}.$$

5. $I_5 = \displaystyle\int_2^3 \frac{2x^2+x}{x^2+x-2} \cdot \mathrm{d}x$.
   Or $\frac{2x^2+x}{x^2+x-2} = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2}$, donc :

$$\begin{array}{rcl} I_5 & = & \displaystyle\int_2^3 (2 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2}) \cdot \mathrm{d}x \\ & = & [2x + \ln(x-1) - 2\ln(x+2)]_2^3 \\ & = & 2 + 5\ln 2 - 2\ln 5 \end{array}.$$

6. $I_6 = \displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \sqrt{\ln x + 1}}$
   On pose $u = \ln x$ donc :
   $du = \frac{dx}{x}$
   $1 \leqslant x \leqslant e \Rightarrow 0 \leqslant u \leqslant 1$ et

$$\begin{array}{rcl} I_6 & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\ & = & \left[2 \cdot \sqrt{u+1}\right]_0^1 \\ & = & 2\sqrt{2} - 2 \end{array}.$$

Exercice 2 :
Trouver la fonction f telle que : $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2$ et $f(0) = 1$.
$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \Leftrightarrow \ln f(x) \ = \ 2 \cdot x + k$ où k est une constante réelle.
Donc $f(x) = e^{2 \cdot x + k}$.
Ainsi $f(0) = e^k$. Or on veut $f(0) = 1$ donc on obtient $k = 0$ car $e^k = 1 \Leftrightarrow k = 1$.
La fonction recherchée est donc : $f(x) = e^{2x}$