INTEGRATION : Calcul Direct

Correction de quelques exercices

Ex 3 : *Calcul par integration par parties*

(h) $\sqrt{x}.\ln(x)$:

$$\begin{array}{rcl} \int \sqrt{x}.\ln(x)dx & = & \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.\ln(x) - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x}dx + K \\ & = & \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.\ln(x) - \frac{2}{3}\int \sqrt(x)dx + K \\ & = & \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.\ln(x) - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + K \\ & = & \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ (\ln(x) - \frac{2}{3}) + K \end{array}$$

oú $K \in \mathbb{R}$.

(j) $e^x cos^2(x)$:

$$\begin{array}{rcl} \int e^x cos^2(x)dx & = & \int \frac{e^x}{2}dx + \frac{1}{2}\int e^x cos(2x)dx \\ & = & \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{I} \end{array}$$

oú $K \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} & = & \int e^x cos(2x)dx \\ & = & e^x cos(2x) + 2\int e^x sin(2x)dx \\ & = & e^x cos(2x) + 2e^x sin(2x) - 4\int e^x cos(2x)dx \\ & = & e^x(cos(2x) + 2sin(2x)) - 4\mathcal{I} \end{array}$$

Donc, $\mathcal{I} = \frac{e^x}{5}(cos(2x) + 2sin(2x) + K$.

Ainsi, $\int e^x cos^2(x)dx = \frac{e^x}{10}(5e^x + cos(2x) + 2sin(2x)) + K, \ \ K \in \mathbb{R}$.

(k) $sin(\ln(x))$;

$$\begin{array}{rcl} \int sin(\ln(x))dx & = & \int x.\frac{1}{x}\,sin(\ln(x))dx \\ & = & -x\,cos(\ln(x)) + \int cos(\ln(x))dx \\ & = & -x\,cos(\ln(x)) + \mathcal{J} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J} & = & \int cos(\ln(x))dx \\ & = & \int x.\frac{1}{x}\,cos(\ln(x))dx \\ & = & x.sin(\ln(x)) - \int sin(\ln(x))dx \end{array}$$

Donc,

$\int sin(\ln(x))dx = \mathcal{I} = -x\,cos(\ln(x)) + x\,sin(\ln(x)) - \mathcal{I}$.

Ainsi, $\mathcal{I} = \frac{x}{2}(sin(\ln(x)) - cos(\ln(x))) + K, \ \ K \in \mathbb{R}$.

Ex 4 :

1. $\int_0^1 t^2 e^t dt$:

$$\begin{array}{rcl} \int_0^1 t^2 e^t dt & = & [t^2e^t]_0^1 - 2\int_0^1 te^t dt \\ & = & [t^2e^t - 2te^t]_0^1 + 2\int_0^1 e^t dt \\ & = & [t^2e^t - 2te^t + 2e^t]_0^1 \\ & = & 2.(e-1) \end{array}$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\, t. \ln(1+cos\, t)dt$:

$$\begin{array}{rcl} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\, t. \ln(1+cos\, t)dt & = & [sin\, t \ln(1+cos\, t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, t \frac{sin\, t}{1+cos\, t}dt \\ & = & 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1_c os^2\, t}{1+cos\, t}dt \\ & = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - cos\, tdt \\ & = & [t - sin\, t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ & = & \frac{\pi}{2} - 1 \end{array}$$

3. $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$

$$\begin{array}{rcl} \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt & = & \int_1^2 \ln(1+t)\frac{1}{t^2}dt \\ & = & [-\frac{\ln(1+t)}{t}]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t}\frac{1}{1+t}dt \\ & = & [-\frac{\ln(1+t)}{t}]_1^2 + \mathcal{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} & = & \int_1^2 \frac{1}{t+t^2}dt \\ & = & \int_1^2 \frac{2t+1-2t}{t^2+t}dt \\ & = & \int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t} - 2\frac{1}{t+1}dt \\ & = & [\ln(t^2+t) - 2\ln(1+t)]_1^2 \end{array}$$

Donc,

$$\begin{array}{rcl} \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt & = & [-\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln(t^2+t) - 2\ln(1+t)]_1^2 \\ & = & \ln(5) - \frac{5}{3}\ln(3) + 2\ln(2) \end{array}$$

Ex 5 :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} & = & \int_1^e cos(\pi \ln\, x)dx \\ & = & \int_1^e 1.cos(\pi \ln\, x)dx \\ & = & [xcos(\pi \ln\, x)]_1^e + \int_1^e \pi sin(\pi \ln\, x)dx \\ & = & 1 - e + \pi\mathcal{J} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J} & = & \int_1^e 1.sin(\pi \ln\, x)dx \\ & = & [xsin(\pi \ln\, x)]_1^e - \pi\int_1^e cos(\pi \ln\, x)dx \\ & = & 0 - \pi\mathcal{I} \qquad\qquad (1) \end{array}$$

Donc : $\mathcal{I} = 1 - e - \pi^2\mathcal{I}$
Ainsi, $\mathcal{I} = \frac{1}{1+\pi^2}(1-e)$
Et , $\mathcal{J} = \frac{\pi}{1+\pi^2}(e-1)$, d'aprés (1).

Ex 8 :

$\mathcal{I} = \int_0^\pi \frac{x\ sin\,x}{3+sin^2\,x}dx$

Changement de variable :
$t = \pi - x$, donc :
$x = \pi - t$
$sin\,x = sin(\pi - t) = sin\,t$
$dx = (-1)dt$
$x : 0...\pi \Rightarrow t : \pi...0$
Donc,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} & = & \int_\pi^0 \frac{(\pi-t)sin\,t}{3+sin^2\,t}.(-1)dt \\ & = & \int_0^\pi \frac{(\pi-t)sin\,t}{3+sin^2\,t}dt \\ & = & \int_0^\pi \frac{\pi sin\,t}{3+sin^2\,t}dt - \mathcal{I} \end{array}$$

Et ainsi : $\mathcal{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{sin\,t}{3+sin^2\,t}dt$

Comme $3 + sin^2\,t = 4 - cos^2\,t = (2 - cos\,t)(2 + cos\,t)$, on peut écrire :
$\mathcal{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{sin\,t}{(2-cos\,t)(2+cos\,t)}dt$
Et en décomposant en éléments simples, on a :
$\mathcal{I} = \frac{\pi}{8}\int_0^\pi (\frac{sin\,t}{2-cos\,t} + \frac{sin\,t}{2+cos\,t})dt$, qu'on peut écrire :
$\mathcal{I} = \frac{\pi}{8}\int_0^\pi (\frac{sin\,t}{2-cos\,t} - \frac{-sin\,t}{2+cos\,t})dt$ pour faire apparaitre les dérivés logarithmiques...
Finalement : $\mathcal{I} = \frac{\pi}{8}[\ln|2 - cos\,t| - \ln|2cos\,t|]_0^\pi = \frac{\pi}{4}\ln(3)$.

N.B. : La décomposition en éléments simples n'est pas naturelle, mais a priori, la seule chance de trouver une primitive et d'ecrire $\frac{sin\,t}{(2-cos\,t)(2+cos\,t)}$ sous la forme :$\frac{a.sin\,t}{2-cos\,t} + \frac{b.sin\,t}{2+cos\,t}$ et comme la vie est bien faite, on trouve : $a = b = 1/4$.

Ex 9 :

(e) : $\int^t \frac{x^3+2}{x^2+3x+2}dx$

$$\begin{array}{rcl} \frac{x^3+2}{x^2+3x+2} & = & \frac{x^3+3x^2+2x+2-3x^2-2x}{x^2+3x+2} \\ & = & x - \frac{3x^2+2x-2}{x^2+3x+2} \\ & = & x - \frac{3x^2+9x+6-7x-8}{x^2+3x+2} \\ & = & x - 3 + \frac{7x+8}{(x+1)(x+2)} \\ & = & x - 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{6}{x+2} \end{array}$$

Donc les primitives recherchées sont de la forme :
$\frac{t^2}{2} - 3x + \ln|t+1| + 6\ln|t+2| + K,\ K \in \mathbb{R}$.

(f) : $\int^t \frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)}dx$

$\frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)} = \frac{5}{3}\frac{1}{x} - \frac{3}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{11}{12}\frac{1}{x+3}$

Donc les primitives recherchées sont de la forme :

$\frac{5}{3}\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{11}{12}\ln|x+3| + K,\ K \in \mathbb{R}.$

Ex 11 :

Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. .
$$\begin{array}{rcl} I_n & = & \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^{n-1}dt \\ & = & \int_0^1 (1-t^2)^{n-1}dt + \int_0^1 \frac{t}{2n}.(-2nt)(1-t^2)^{n-1}dt \\ & = & I_{n-1} + [\frac{t}{2n}(1-t^2)^n]_0^1 - \frac{1}{2n}\int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ & = & I_{n-1} - \frac{1}{2n}I_n \end{array}$$
Donc, $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$ (1)

2. D'aprés (1), on déduit :
$$I_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} * I_0.$$
Et $I_0 = 1$, donc :
$$I_n = 2^n\,(n-1)!\,\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+1)!}.$$

3. Pour calculer I_n, on peur aussi ecrire :
$$\begin{array}{rcl} I_n & = & \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ & = & \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k}(-t^2)^k dt \\ & = & \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_0^1 t^{2k}dt \\ & = & \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{1}{2k+1} \end{array}$$
On conclut que : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{1}{2k+1} = 2^n\,(n-1)!\,\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+1)!}.$

Quelques conseils :

- Pour calculer la primitive d'une fonction qui est le produit d'une exponentielle et d'une fonction trigo, on fait 2 integrartions par parties et on se ramene à une équation à résoudre. (cf ex 3).

- pour les changements de variables : $u = f(x)$:
  $du = f^{'}(x)dx$ ou alors $dx = (f^{-1})'(u)du$

- Fonctions rationelles :
  Se ramener à qqch de la forme : f(x)=A(x) + $\frac{N(x)}{D(x)}$. $A(x)$ est un polynome et il y autant de fractions $\frac{N(x)}{D(x)}$ que necessaires.
  Il faut simplement que : $deg(N(x)) < deg(D(x))$.