Exercice 1.69: Extrema liés

(1)

$\star$

(2)

$\star$

(3) $f(x,y) = x^3 + y^3$ sous la contrainte $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

$D_f = D_g = \mathbb{R}^2$ ensemble ouvert.
f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f.

- **Recheche des points critiques de deuxième espèce:**
On cherche les points (x,y) tels que:

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} g(x,y)=1 \\ \nabla g(x,y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ 2\cdot x=0 \\ 2\cdot y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$$

Contradicion car $0^2 + 0^2 \neq 1$. Donc il n'existe pas de points critiques de deuxième espèce.

- **Recheche des points critiques de première espèce:**
Soit $L_\lambda(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)\,[+\lambda]$.
Le coefficient $+\lambda$ n'est pas indispensable.
On cherche les points (x,y) tels que : $\nabla g(x,y) \neq 0$
et : $(S_2)\left\{\begin{array}{l} g(x,y)=1 \\ \nabla L_\lambda(x,y)=0 \end{array}\right.$.

$$\begin{aligned}(S_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} g(x,y)=1 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial y}(x,y)=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ 3x^2-2\lambda x=0 \\ 3y^2-2\lambda y=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x\cdot(3x-2\lambda)=0 \\ y\cdot(3y-2\lambda)=0 \end{array}\right.\end{aligned}$$

$L_2 \Rightarrow x = 0$ ou $3x - 2\lambda = 0$:

- si $x = 0$:
  $L_1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -1$. Donc
  - si $y = 1$: $L_3 \Rightarrow 3 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$.
    Donc $P_1 = (0, 1)$ est un point critique de première espèce associé à $\lambda_1 = \frac{3}{2}$.
  - si $y = -1$: $L_3 \Rightarrow -3 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$.
    Donc $P_2 = (0, -1)$ est un point critique de première espèce associé à $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$.

- si $3x - 2\lambda = 0$ donc $\lambda = \frac{3}{2} \cdot x$.
  $L_3 \Rightarrow y \cdot (3x - 3y) = 0 \Rightarrow 3y \cdot (x - y) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $x = y$.
  - si $y = 0$:
    $L_1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$. Donc
    * si $x = 1$: $L_3 \Rightarrow 3 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$.
      Donc $P_3 = (1, 0)$ est un point critique de première espèce associé à $\lambda_3 = \frac{3}{2}$.
    * si $x = -1$: $L_3 \Rightarrow -3 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$.
      Donc $P_4 = (-1, 0)$ est un point critique de première espèce associé à $\lambda_4 = -\frac{3}{2}$.
  - si $x = y$:
    $L_1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc
    * si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: alors $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
      $L_3 \Rightarrow 3\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$.
      Donc $P_5 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ est un point critique de première espèce associé à $\lambda_5 = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$.
    * si $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: alors $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
      $L_3 \Rightarrow -3\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$.
      Donc $P_6 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ est un point critique de première espèce associé à $\lambda_6 = -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$.

Récapitulatif: 6 points critiques:

$$\begin{array}{lll}
P_1=(0,1), & \lambda_1=\frac{3}{2} & \to f(P_1)=1\\
P_2=(0,-1), & \lambda_2=-\frac{3}{2} & \to f(P_2)=-1\\
P_3=(1,0), & \lambda_3=\frac{3}{2} & \to f(P_3)=1\\
P_4=(-1,0), & \lambda_4=-\frac{3}{2} & \to f(P_1)=-1\\
P_5=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}), & \lambda_5=\frac{3}{4}\sqrt{2} & \to f(P_5)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
P_6=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}), & \lambda_6=-\frac{3}{4}\sqrt{2} & \to f(P_6)=-\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{array}$$

• **Nature des points critiques de première espèce:**

La contrainte $x^2+y^2=1$ représente la boule $B((0,0),1)$ qui est un compact, donc il existe un maximum global et un minimum global.

Comme:

$$f(P_2)=f(P_4)<f(P_6)<f(P_5)<f(P_3)=f(P_1)$$

$f(P_2)$ et $f(P_4)$ sont des mimima globaux de f sous la contrainte $g(x,y)=1$.

$f(P_1)$ et $f(P_3)$ sont des maxima globaux de f sous la contrainte $g(x,y)=1$.

$\to$ Nature de $f(P_5)$ et $f(P_6)$:

Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$,

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad |D^2L_\lambda(x,y)|=\begin{vmatrix} 6x-2\lambda & 0\\ 0 & 6y-2\lambda\end{vmatrix}=(6x-2)\cdot(6y-2)$$

Ainsi,

- en $P_5=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $\lambda_5=\frac{3}{4}\sqrt{2}$:
  $|D^2L_{\lambda_5}(P_5)|=9\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ et $\frac{\partial^2 L_{\lambda_5}}{\partial x^2}(P_5)=3\frac{\sqrt{2}}{4}>0.$
  Donc $f(P_5)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donne un minimum local de f sous la contrainte $g(x,y)=1$.
- en $P_6=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $\lambda_6=-\frac{3}{4}\sqrt{2}$:
  $|D^2L_{\lambda_6}(P_6)|=9\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ et $\frac{\partial^2 L_{\lambda_6}}{\partial x^2}(P_6)=-3\frac{\sqrt{2}}{4}>0.$
  Donc $f(P_6)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ donne un maximum local de f sous la contrainte $g(x,y)=1$.

⋆

(4) $f(x,y) = x + 2y$ sous la contrainte $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 + y - \frac{13}{9} = 0$

$D_f = D_g = \mathbb{R}^2$ ensemble ouvert.
f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f.

• **Recheche des points critiques de deuxième espèce:**
On cherche les points $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ tels que: $(S_1) \left\{ \begin{array}{l} g(x,y) = 0 \\ \nabla g(x,y) = 0 \end{array} \right.$.
Or $\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ x = \frac{1}{3} \end{array} \right.$.
Donc $\nabla g(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = 0$, mais $g(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{16}{9} \neq 0$ donc il n'existe pas de points critiques de deuxième espèce.

• **Recheche des points critiques de première espèce:**
Soit $L_\lambda(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$.
On cherche les points (x,y) tels que : $\nabla g(x,y) \neq 0$
et : $(S_2) \left\{ \begin{array}{l} g(x,y) = 0 \\ \nabla L_\lambda(x,y) = 0 \end{array} \right.$.

$$
\begin{aligned}
(S_2) \quad &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(x,y) = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(x,y) = 0 \\ 1 - 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ 2 - \lambda x - 2\lambda y - \lambda = 0 \quad L_3 - 2L_2 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(x,y) = 0 \\ 1 - 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ \lambda \cdot (3x - 1) = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Donc soit $\lambda = 0$, soit $3x - 1 = 0$.
• Si $\lambda = 0$ alors $L_2 \Rightarrow 1 = 0$ donc $\lambda \neq 0$.
• Si $3x - 1 = 0$, i.e. $x = \frac{1}{3}$:

$$
\begin{aligned}
(S_2) \quad &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 + \frac{4}{3}y - \frac{12}{9} = 0 \\ 1 - 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (y + \frac{2}{3})^2 = (\frac{4}{3})^2 \\ 1 - 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Donc $L_3 \Rightarrow y + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ ou $y + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$.

– Si $y + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, i.e; $y = \frac{2}{3}$, alors
$L_2 \Rightarrow 1 - \frac{4}{3}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}$.
Ainsi,
$A = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \lambda_A = \frac{3}{4}$ est un point critique de premi"re espèce et $f(A) = \frac{5}{3}$.

– Si $y + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, i.e; $y = -2$, alors
$L_2 \Rightarrow 1 + \frac{4}{3}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$.
Ainsi,
$B = (\frac{1}{3}, -2), \lambda_B = -\frac{3}{4}$ est un point critique de premi"re espèce et $f(B) = -\frac{11}{3}$.

• **Nature des points critiques de première espèce:**
Remarque: La contrainte ne définit pas un ensemble convexe.
Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |D^2 L_\lambda(x,y)| = \begin{vmatrix} -2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -2\lambda \end{vmatrix} = 3 \cdot \lambda^2 \quad > 0$$

- En $A = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \lambda_A = \frac{3}{4}$, $|D^2 L_{\lambda_A}| = \frac{27}{4} \geq 0$ et $\frac{\partial^2 L_{\lambda_A}}{\partial x^2}(A) = -2 \cdot \lambda_A = -\frac{3}{2} < 0$. Donc A donne un maximum de f en $f(A)$.
- En $B = (\frac{1}{3}, 2), \lambda_B = -\frac{3}{4}$, $|D^2 L_{\lambda_B}| = \frac{27}{4} \geq 0$ et $\frac{\partial^2 L_{\lambda_B}}{\partial x^2}(B) = -2 \cdot \lambda_B = \frac{3}{2} > 0$. Donc B donne un minimum de f en $f(B)$.

⋆

(5)

⋆

(6)

⋆

(7) **ATTENTION: Ce n'est pas exactement la même fonction.....**
$f(x,y) = 2x - y$ sous la contrainte $g(x,y) = x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$

$D_f = D_g = \mathbb{R}^2$ ensemble ouvert.
f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f.

- **Recheche des points critiques de deuxième espèce:**
  On cherche les points (x, y) tels que:

$$(S_1) \begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - y^2 - 1 = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - y^2 - 1 = 0 \\ y = -2x \\ x + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \\ y \\ x \end{cases}$$

Contradicion car $0^2 + 0 \cdot 0 - 0^2 - 1 \neq 0$. Donc il n'existe pas de points critiques de deuxième espèce.

- **Recheche des points critiques de première espèce:**
  Soit $L_\lambda(x, y) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$.
  On cherche les points (x, y) tels que : $\nabla g(x, y) \neq 0$
  et : $(S_2) \begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla L_\lambda(x,y) = 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} (S_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + xy - y^2 - 1 = 0 \\ 2 - 2\lambda x - \lambda y = 0 & L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_3 \\ -1 - \lambda x + 2\lambda y = 0 & L_3 \leftrightarrow 2L_3 + 2L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + xy - y^2 - 1 = 0 \\ 4 - 5\lambda y = 0 \\ \lambda \cdot (3y - 4x) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$L_3 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $3y - 4x = 0$:
- si $\lambda = 0$:
  $L_2 \Rightarrow 4 = 0$. Impossible donc $\lambda \neq 0$.
- si $3y - 4x = 0$ alors $y = \frac{4}{3}x$.

Le système S_2 devient ainsi:

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{9}x^2 - 1 = 0 \\ 4 - 5\lambda y = 0 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = +\frac{3}{\sqrt{5}} \text{ ou } x = -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ \lambda = \frac{4}{5 \cdot y} \text{ car } y \neq 0 \text{ d'aprés } L_1 \text{ et } L_3 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$$

On a donc 2 points critiques:

$$\begin{array}{lll} A = (\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}), & \lambda_A = \frac{1}{\sqrt{5}} & \to f(A) = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ B = (-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}), & \lambda_B = -\frac{1}{\sqrt{5}} & \to f(B) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}$$

• **Nature des points critiques de première espèce:**
Remarque: La contrainte ne définit pas un ensemble convexe.
Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ |D^2 L_\lambda(x,y)| = \begin{vmatrix} -2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = -5 \cdot \lambda^2$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^2$, $|D^2 L_\lambda(x,y)| < 0$ donc $D^2 L_\lambda$ n'est ni convexe ni concave, on ne peut donc pas conclure à ce niveau.

Donc **linéarisation de la contrainte** en ces 2 points:
• en $A = (\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}), \lambda_A = \frac{1}{\sqrt{5}}$:
On étudie le signe de:

$$d^2 L_{\lambda_A}(h,k) = -\frac{2}{\sqrt{5}} h^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} hk + \frac{2}{\sqrt{5}} k^2$$

sachant que h et k sont tels que:$< (h,k) \ ; \ \nabla g(A) >= 0$.
C'est à dire: $2\sqrt{5} \cdot h - \sqrt{5} \cdot k = 0$ donc tels que: $k = 2 \cdot h$.
Ainsi, sous cette condition:

$$d^2 L_{\lambda_A}(h,k) = d^2 L_{\lambda_A}(h,2h) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot h^2 \ \geq 0$$

Donc L_{λ_A} est localement convexe en A et donc A donne en $f(A)$ un minimum local de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

- en $B = (-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}), \lambda_B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$:
  C'est la même méthode.
  On étudie le signe de:

$$d^2L_{\lambda_B}(h,k) = \frac{2}{\sqrt{5}}h^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}hk - \frac{2}{\sqrt{5}}k^2$$

sachant que h et k sont tels que:$< (h,k)\ ;\ \nabla g(B) >= 0$.
C'est à dire tels que: $k = 2 \cdot h$.
Ainsi, sous cette condition:

$$d^2L_{\lambda_B}(h,k) = d^2L_{\lambda_B}(h,2h) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot h^2 \ \leq 0$$

Donc L_{λ_B} est localement concave en B et donc B donne en $f(B)$ un minimum local de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

$\star$

(8) $f(x,y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{y}$ sous la contrainte $g(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$

$D_f = D_g = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ensemble ouvert.
f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f.

- **Recheche des points critiques de deuxième espèce:**
  On cherche les points (x,y) tels que: $(S_1)\left\{\begin{array}{l} g(x,y) = 0 \\ \nabla g(x,y) = 0 \end{array}\right.$.
  Or $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} \\ -\frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$, donc $\nabla g(x,y) = 0$ n'a pas de solutions.

Donc il n'existe pas de points critiques de deuxième espèce.

- **Recheche des points critiques de première espèce:**
  Soit $L_\lambda(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)\ [+\frac{1}{2} \cdot \lambda]$.
  Le terme $+\frac{1}{2} \cdot \lambda$ n'est pas indispensable car indépendant de x et y.
  On cherche les points $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tels que :

$\nabla g(x,y) \neq 0$ et : $(S_2) \left\{ \begin{array}{l} g(x,y) = \frac{1}{2} \\ \nabla L_\lambda(x,y) = 0 \end{array} \right.$.

$$
\begin{aligned}
(S_2) \ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} g(x,y) = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} & \\ -\frac{1}{x^2} + 2\lambda \cdot \frac{1}{x^3} = 0 & L_2 \to -x^3 \cdot L_2 \text{ car } x^3 \neq 0 \\ -\frac{1}{y^2} + 2\lambda \cdot \frac{1}{y^3} = 0 & L_3 \to -y^3 \cdot L_3 \text{ car } y^3 \neq 0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} \\ x - 2\lambda = 0 \\ y - 2\lambda = 0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{2} \\ x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1 \\ x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi 2 points critique de première espèce:

$$
\begin{array}{l}
A = (2,2), \lambda_A = 1 \ \to f(A) = 1 \\
B = (-2,-2), \lambda_B = -1 \ \to f(B) = -1
\end{array}
$$

- **Nature des points critiques de première espèce:**
  - en $A = (2,2)$ et $\lambda_A = 1$:
    $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $L_{\lambda_A}(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2}$ et :
    $|D^2 L_{\lambda_A}(x,y)| = \begin{vmatrix} \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} - \frac{6}{y^4} \end{vmatrix}$ n'est pas de signe constant donc A ne donnera pas un extremum global de L_{λ_A}.
    Mais, $|D^2 L_{\lambda_A}(A)| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{64} \ > 0$ et $\frac{\partial^2 L_{\lambda_A}}{\partial x^2}(A) = -\frac{1}{8} \ < 0$ donc $A = (2,2)$ donne un maximum local pour f sous la contrainte $g(x,y) = \frac{1}{2}$ qui est $f(A) = 1$.
  - en $B = (-2,-2)$ et $\lambda_B = -1$:
    $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $L_{\lambda_B}(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}$ et :

$|D^2L_{\lambda_A}(x,y)| = \begin{vmatrix} \frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3}+\frac{6}{y^4} \end{vmatrix}$ n'est pas de signe constant donc B ne donnera pas un extremum global de L_{λ_B}.
Mais, $|D^2L_{\lambda_B}(B)| = \begin{vmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{64} > 0$ et $\frac{\partial^2 L_{\lambda_B}}{\partial x^2}(B) = \frac{1}{8} > 0$ donc $B = (-2,-2)$ donne un minimum local pour f sous la contrainte $g(x,y) = \frac{1}{2}$ qui est $f(B) = -1$.

⋆

(9) $f(x,y) = x^2+y^2$ sous la contrainte $g(x,y) = x^2+y^2+2y-2x-6 = 0$

$D_f = D_g = \mathbb{R}^2$ ensemble ouvert.
f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f.

- **Recheche des points critiques de deuxième espèce:**
  On cherche les points (x,y) tels que: $(S_1)\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla g(x,y) = 0 \end{cases}$.
  On a $\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ Mais :$g(1,-1) = -8 \neq 0$ donc il n'existe pas de points critiques de deuxième espèce.

- **Recheche des points critiques de première espèce:**
  Soit $L_\lambda(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$.
  On cherche les points (x,y) tels que : $\nabla g(x,y) \neq 0$
  et : $(S_2)\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla L_\lambda(x,y) = 0 \end{cases}$.

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial L_\lambda}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2y-2x-6 = 0 \\ 2\cdot(2x-y-\lambda x+\lambda) = 0 \\ 2\cdot(2y-x-\lambda y-\lambda) = 0 \end{cases}$$

$L_2 + L_3 \Rightarrow (x+y)\cdot(1-\lambda) = 0.$

- si $1-\lambda=0$ alors $\lambda=1$:

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y-x-1=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y=x+1 \\ x^2+(x+1)^2+2\cdot(x+1)-2x-6=0 \end{cases}$$

$L_3 \Rightarrow 2x^2+2x-3=0$.
donc:

$$x=\frac{-1+\sqrt{7}}{2} \text{ ou } x=\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$$

On obtient ainsi 2 points critique de première espèce:

$$A=(\tfrac{-1+\sqrt{7}}{2};\tfrac{1+\sqrt{7}}{2}), \lambda_A=1 \ \to f(A)=5$$
$$B=(\tfrac{-1-\sqrt{7}}{2};\tfrac{1-\sqrt{7}}{2}), \lambda_B=1 \ \to f(B)=5$$

- si $x+y=0$, alors $y=-x$: Ainsi: $g(x,y)=0 \Leftrightarrow g(x,-x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$.
Donc: $x=-1$ (etdonc $y=1$) ou $x=3$ (et donc $y=-3$).
De plus $L_3 \Rightarrow 2y-x-\lambda y-\lambda=0$.
Donc:
Pour $C=(-1,1)$, $2y-x-\lambda y-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\lambda_C=\frac{3}{2}$. Et $f(C)=6$
Pour $D=(3,-3)$, $2y-x-\lambda y-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\lambda_D=\frac{9}{2}$. Et $f(D)=54$

- **Nature des points critiques de première espèce:**

La contrainte $x^2+y^2+2y-2x-6=0$ peut s'écrire:

$$(x-1)^2+(y+1)^2=8=(2\sqrt{2})^2$$

donc elle définit le cercle de centre $(1,-1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$ qui est un ensemble compact. Ainsi, il existe au moins un minimum absolu et un maximum absolu.

Or: $f(A)=f(B)<f(C)<f(D)$, donc $f(A)$ et $f(B)$ sont des minima absolus et $f(D)$ est un maximum absolu.

Il reste à déterminer la nature de $f(C)$.

Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |D^2 L_\lambda(x,y)| = \begin{vmatrix} 4-2\lambda & -2 \\ -2 & 4-2\lambda \end{vmatrix}$$

Donc $|D^2 L_{\lambda_C}(C)| = -3 \ < 0$

Donc **linéarisation de la contrainte** en C: On étudie le signe de:

$$d^2 L_{\lambda_C}(h,k) = \frac{1}{2}h^2 - 2hk + \frac{1}{2}k^2$$

sachant que h et k sont tels que:$< (h,k) \ ; \ \nabla g(C) >= 0$.

C'est à dire: $-4h + 4k = 0$ donc tels que: $k = h$.

Ainsi, sous cette condition:

$$d^2 L_{\lambda_C}(h,k) = d^2 L_{\lambda_C}(h,h) = -h^2 \ \leq 0$$

Donc L_{λ_C} est localement concave en C et donc C donne en $f(C)$ un maximum local de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.