Exercice 1.63**: fonctions de 2 variables: Convexité**

(1) $f(x,y) = \sqrt{x} + 3\ln x - 2e^{x+y}$
sur $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x > 0, y > 0\} = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

- la fonction $f_1 : \ x \to \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et
$$f_1''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}.$$
Donc f_1 est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Donc d'aprés le lemme d'extension, $(x,y) \to \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
- la fonction $f_2 : \ y \to \ln y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et
$$f_2''(y) = -\frac{1}{y}^2 < 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^{+*}.$$
Donc d'aprés le lemme d'extension, $(x,y) \to \ln y$ est concave sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
- la fonction $f_3 : \ u \to -2e^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et
$$f_3''(u) = -2e^u < 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$
Donc f_3 est concave sur $\mathbb{R}$.
La fonction $(x,y) \to x + y$ est une fonction affine donc par composition avec une fonction concave, $(x,y) \to -2e^{x+y}$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Ainsi, par combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions concaves sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$:
$$f(x,y) = \sqrt{x} \ + \ 3\ln x \ + \ (-2e^{x+y})$$
est concave sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

(2) $g(x,y) = x^2 + y^4$ sur $\mathbb{R}^2$.

- la fonction $g_1 : \ x \to x^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $g_1''(x) = 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Donc g_1 est convexe sur $\mathbb{R}$.
Donc d'aprés le lemme d'extension, $(x,y) \to x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
- la fonction $g_2 : \ y \to y^4$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $g_2''(y) = 4y^2 > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Donc g_2 est convexe sur $\mathbb{R}$.

Donc d'aprés le lemme d'extension, $(x, y) \to y^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, par combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$:

$$g(x, y) = x^2 \ + \ y^4$$

est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

(3) $h(x, y) = \sqrt{2x + 3y} \quad \text{sur } \mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 2x + 3y > 0\}$.

Comme démontré en (1), la fonction $h_3 : u \to \sqrt{u}$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La fonction $(x, y) \in \mathcal{V} \to 2x + 3y$ est une fonction affine à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc par composition avec h_3, fonction concave sur $\mathbb{R}^{+*}$, $h(x, y)$ est concave sur $\mathcal{V}$.