Introduction à la **M**agnéto**H**y**D**rodynamique

Jean Boisson Enseignant-chercheur Unité de Mécanique

jean.boisson@ensta-paristech.fr

Déroulement de l'enseignement thématique:

- Cours d'ouvertures.
- 3 thématiques complémentaires

  fluides complexes, granulaire, MHD

- <u>Le cours MHD :</u>
  - 5 séances cours + PC (pas forcément cloisonné)
  - Examen : lors de la dernière séance (fin mai), <u>**VOUS**</u> présentez une partie du cours non abordée lors des séances précédentes
    - Sujet et bibliographie présélectionnés
    - Biblio disponible sur le web (vous pourrez la compléter)
    - Tirage au sort pour les sujets/ binômes
    - Libre à vous de faire le cours comme vous voulez (tableau, ppt,…)
    - 15 min par binôme
    - Articulez vos parties de cours avec celles des autres pour déterminer l'ordre de passage par exemple

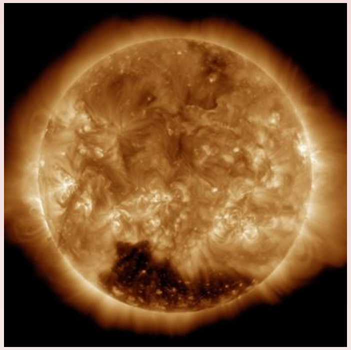
Qu’est ce que la MHD?

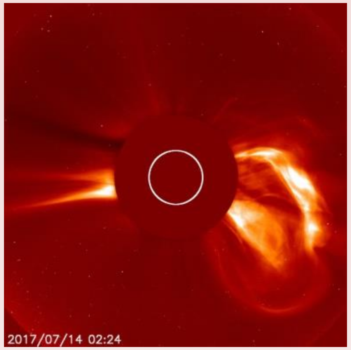
- Mécanique des fluides conducteurs en présence ou non d’un champ magnétique.

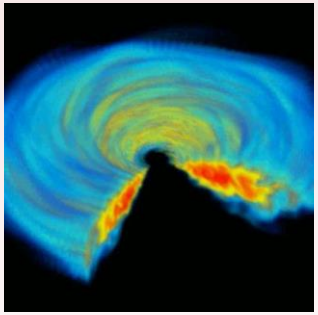
- Fluides conducteurs :
  - Plasmas (Matière ionisée, 99.9 % de la matière)
  - Métaux liquides (Sodium, mercure, galium…)

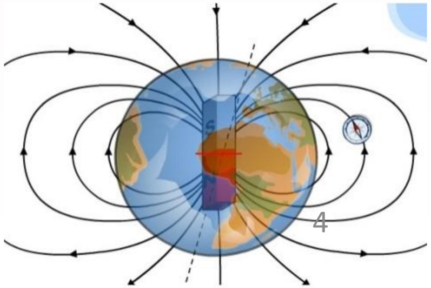
- Historiquement :
  - 1937 Hartmann
  - 1942 Alfven
    ➡ lien Electromagnétisme/Hydrodynamique
    Nobel 1970

Manifestations





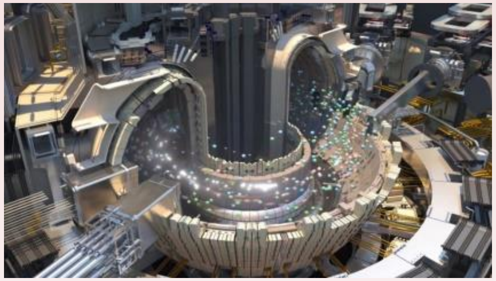


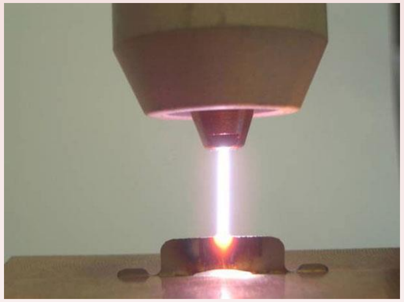


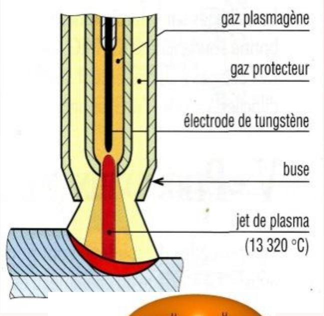
- Plasmas:
  - Soleil, étoiles
  - Vents solaires/stellaire
  - Ejection masse coronale
  - Aurore boréale
  - Disques d’accrétion
  - Instabilité Magneto-Rotationnelle
  - Dynamo solaire
- Métaux liquides:
  - Numérotation des pistes des aéroports
  - Dynamo Terrestre

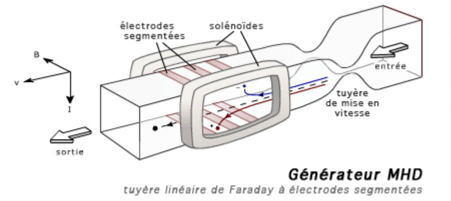
Applications

- Plasmas:
  - Confinement plasma fusion thermonucléaire
  - Propulsion
  - Protection satellite
  - Soudages plasmas

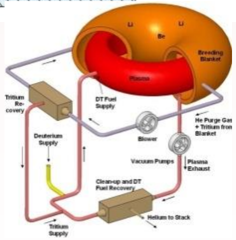


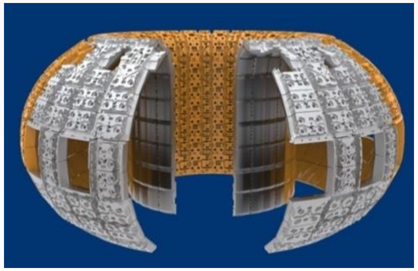






- Métaux liquides:
  - Pompe MHD
  - Electrolyse aluminium
  - Ejection chaleur fusion thermonucléaire





Plan du cours complet:

1. Rappel d'électromagnétisme
   - TD effet Meissner
2. Equation de la MHD
   - Les nombres sans dimensions
   - TD Couche Hartmann
3. Validité de la MHD
4. MHD idéale
   - TD Alfven
5. Confinement Plasma
   - Z-pinch
   - TD θ-pinch
6. Notions Instabilités
7. Exemples d'instabilité MHD
   - Hall Heroult
   - MRI
   - Confinement plasma
8. Examen : Dynamo et autres phénomènes

Références

- J. D. Jackson: *Electrodynamique classique*
- N. Feynman : *Electromagnétisme 1*
- J. Ferreira: *Magnétostatique (Univ. J. Fourier)*

- S. Galtier : *Magnétohydrodynamique*
- J. Ferreira: *Magnétohydrodynamique Plasma (Univ. J. Fourier)*
- Thèses : M. Berhanu, R. Monchaux
- T. Gomez : *Magnétohydrodynamique (UPMC)*
- R. Moreau : *Magnétodydrodynamics*
- *www.ampere.cnrs.fr*
- …

Rappel d'électromagnétique

- <u>Définition</u>:

Le champ magnétique $\vec{B}$ et champ électrique $\vec{E}$ sont définis à partir ***force de Lorentz*** qu'ils engendrent sur une charge électrique situé en $\vec{r}$ à l'instant t :

$$\vec{F} = q(\underbrace{\vec{E}(\vec{r},t)}_{\substack{\text{Électrique} \\ \equiv \\ \text{Loi de Coulomb}}} + \underbrace{\vec{v}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)}_{\text{Magnétique}})$$

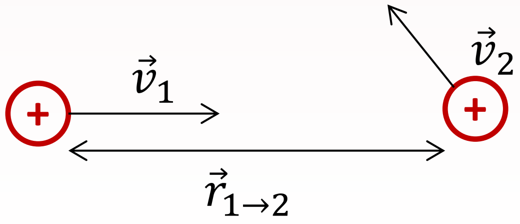
- Toutes les charges sont affectées par un champ électrique $\vec{E}$
- Les charges mobiles sont affectées par un champ magnétique $\vec{B}$
- ***Lorentz*** est microscopique contrairement à la force de ***Laplace***

Rappel d'électromagnétique

- Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t))$$

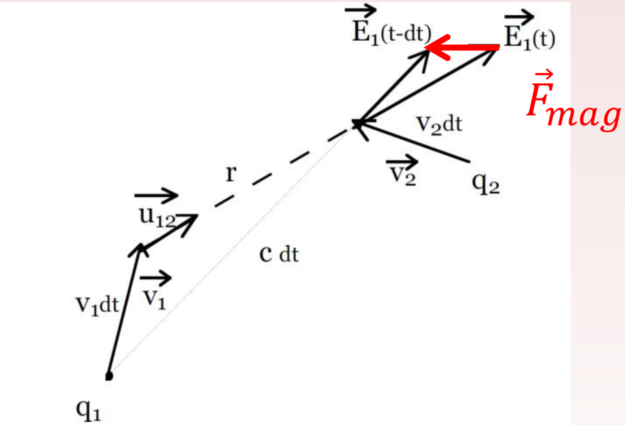
- La composante magnétique ne travaille pas
- la force magnétique est une correction en $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ à la force de Coulomb
- Violation du principe d'action-réaction (voir plus tard)



Rappel d'électromagnétique

Charges mobiles

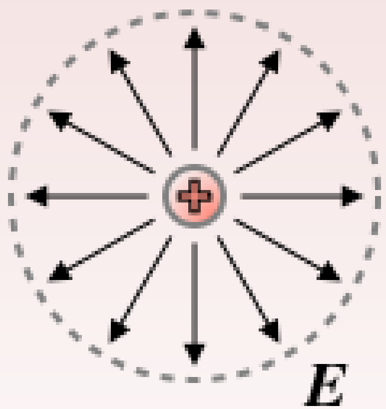
- <u>Exemple :</u> Dans un référentiel fixe, q_1 est animée d'une vitesse v_1. Action de q_1 sur une particule q_2 animée d'une vitesse v_2?



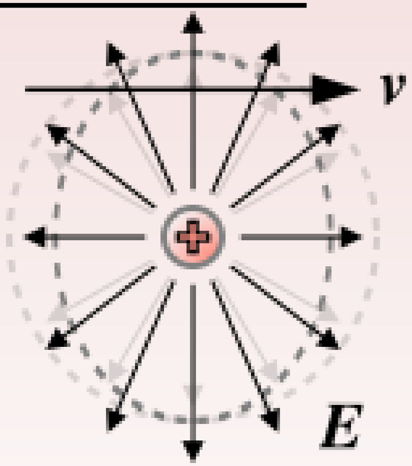
- dt temps qu'il faut à l'information (le champ $\overrightarrow{E_1}$ créé par q_1) pour se propager de q_1à q_2.
- Pendant dt, q_1 parcourt une distance $v_1 dt$ et $q_2$parcourt la distance $v_2 dt$.
- Donc lorsque $q_2$ressent les effets électrostatiques dus à q_1, ceux-ci ne sont pas selon $\vec{r}$:
  le champ $\overrightarrow{E_1}\ (t - dt)$ « vu » par $q_2$est dirigé vers l'ancienne position de q_1 et dépend de la distance cdt et non pas de la distance r.
- la loi de Coulomb $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}, t)$est fausse (suppose vitesse infinie de l'information)
- **Force Magnétique ≡ Correction**

Rappel d’électromagnétique

<u>Autre version : le champ $\vec{B}$ est d’origine relativiste</u>



Une particule chargée, au **repos** par rapport à l'observateur, dans le vide, engendre un champ électrique **isotrope**, identique dans toutes les directions de l'espace.



En revanche, son **déplacement** par rapport à l'observateur **brise cette symétrie**, à cause d'effets relativistes : cette déformation est à l'origine du champ magnétique.

- Le champ magnétique est une manifestation relativiste du champ électrique

Rappel d'électromagnétique

- Principe de Curie:

L'ensemble des conséquences est au moins aussi invariant que les causes *i.e. :*

Le champ engendré par les sources possède les mêmes symétries que celles-ci.

- Principe de Superposition :

Lorsqu'une distribution peut se voir comme la réunion de 2distributions $\boldsymbol{I}$et $\boldsymbol{II}$, le champ en un point M (en $\vec{r}$) quelconque est la superposition du champ créé par $\boldsymbol{I}$comme si $\boldsymbol{II}$n'existait pas et du champ créé par $\boldsymbol{II}$comme si $\boldsymbol{I}$n'existait pas :

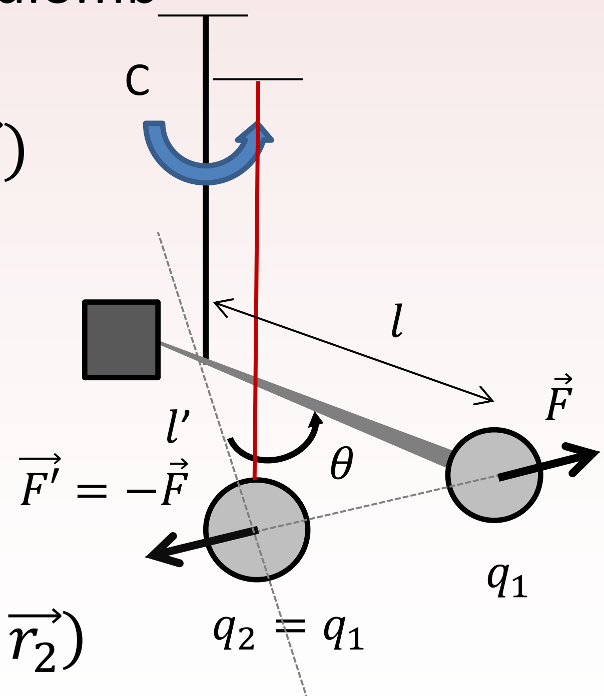
$$E(\vec{r}) = E_I(\vec{r}) + E_{II}(\vec{r})$$
$$B(\vec{r}) = B_I(\vec{r}) + B_{II}(\vec{r})$$

Rappel d'électrostatique

- Electrostatique : Loi de Coulomb

« L'intensité de la force électrostatique entre deux charges électriques est proportionnelle au produit des deux charges et est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux charges. La force est portée par la droite passant par les deux charges. »

- Démontré en 1795 grâce à la balance de coulomb



$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})^3}(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})$$

Avec :

ε_0 permittivité du matériau : $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ *As/(Vm)*

A : Ampère, s: Seconde, *V* : Volt

La force que subit q_1 dans $\vec{E}$: $\vec{F} = q_1\vec{E}$

Le champ électrique en q_1: $\vec{E} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})^3}(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})$

On peut évaluer la force à partir de θ : $C\theta\overrightarrow{e_z} = \vec{l'} \times (\overrightarrow{F'}) + \vec{l} \times \vec{F}$

Rappel d'électrostatique

- Grâce à la superposition un ensemble de charges ponctuelles *i* génèrent :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0(\vec{r} - \vec{r_i})^3}(\vec{r} - \vec{r_i})$$

Qui devient en continu si on peut définir $\rho(\vec{r}')$ densité de volume de charges :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^3}(\vec{r} - \vec{r}')d^3r'$$

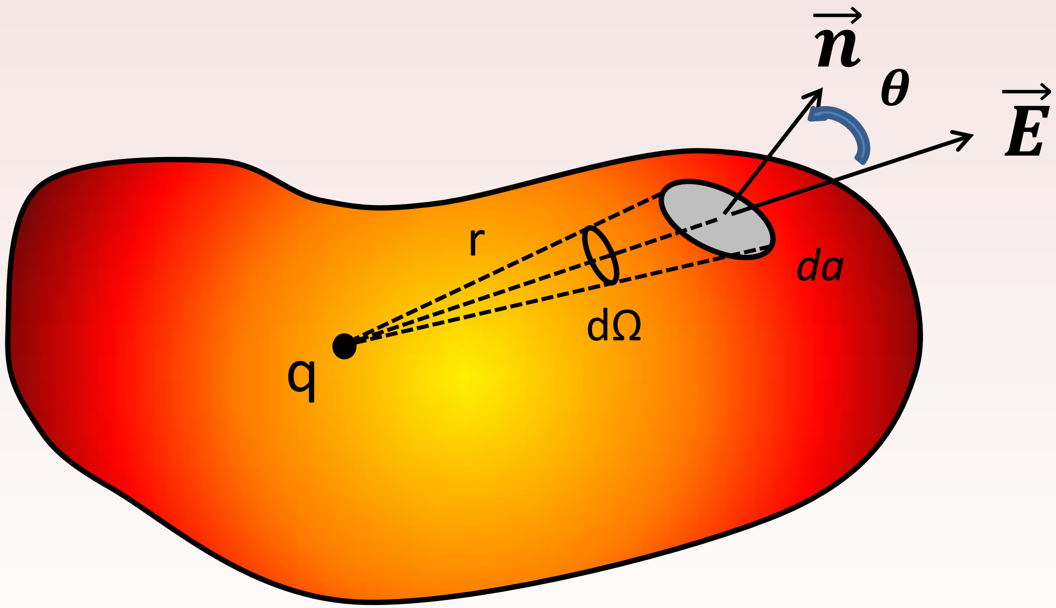
Avec $d^3r' = dx'dy'dz'$ le volume élémentaire attaché au point r'

On peut noter que la densité de charges se définie par :

$$\Delta q = \rho(r)\Delta x'\Delta y'\Delta z'$$

Rappel d'électrostatique

Soit une charge q et une surface fermée *S* définie par $\vec{n}$ vecteur surface.
Soit *da* un élément de surface
Soit $\vec{E}$ le champ électrique généré par q



La loi de coulomb nous donne le champ $\vec{E}$
Le flux de champ à travers da est : $\vec{E}.\vec{n}da$
L'angle entre *da* et $d\Omega$ est θ : $\cos\theta\ da = r^2 d\ \Omega$
Et quand on intègre sur la surface *S* on obtient…

Rappel d'électrostatique

Théorème de Gauss

- Soit une distribution quelconque de charges et une surface fermée S – éventuellement fictive – quelconque. Nous pouvons alors écrire:

$$\oiint \vec{E}(\vec{r})\,.\,\vec{n}da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- $\vec{E}(\vec{r})$ est le champ électrique en un point quelconque de S ;
- $\vec{n}$ est le vecteur surface au point$\vec{r}$ considéré, toujours normal et vers l'extérieur ;
- q_{int} est la charge contenue dans le volume délimité par la surface de contrôle ;
- ε_0 est la permittivité du vide (en F.m−1).

Rappel d'electrostatique

Théorème de Green-Ostrogradski appliqué à $\vec{E}$:

$$\iiint \vec{\nabla}.\vec{E}dV = \oiint \vec{E}\,.\overrightarrow{dS}$$

A partir de Gauss: $\oiint \vec{E}(\vec{r})\,.\vec{n}da = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\iiint \vec{\nabla}.\vec{E}dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho(r)\,dV$$

$$\iiint (\vec{\nabla}.\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0})\,dV = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ Equation Maxwell Gauss

Rappel d'électrostatique

- Maxwell-Faraday à partir de la loi de Coulomb:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|^3}\left(\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right) dV$$

grâce à $\vec{\nabla}\frac{\vec{r}-\overrightarrow{r'}}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|^3} = -\vec{\nabla}\frac{1}{\vec{r}-\overrightarrow{r'}}$, on peut écrire :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\iiint \rho\left(\overrightarrow{r'}\right)\frac{1}{\vec{r}-\overrightarrow{r'}} dV$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

Donc il existe un potentiel V tel que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\mathrm{V}$$

Et la différence de potentiel :

$$\mathrm{U} = \Delta\mathrm{V} = \int_A^B \vec{E}(\vec{r}).\overrightarrow{dl}$$

$U = 0$ sur un contour fermé