HAL
archives-ouvertes.fr

Effet Dynamo : Etudes des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique

Francois Pétrélis

To cite this version:

Francois Pétrélis. Effet Dynamo : Etudes des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2002. Français. <tel-00003842>

HAL Id: tel-00003842

https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00003842

Submitted on 26 Jan 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE PARIS 6

Spécialité

Physique des Solides

présentée par

M. François PÉTRÉLIS

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE DE PARIS 6

Sujet de la thèse:

Effet Dynamo: Étude des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique

soutenue le 19 décembre 2002

devant le jury composé de :

M. Bernard CASTAING	Rapporteur
M. Stéphan FAUVE	Directeur de thèse
M. Keith MOFFATT	Examinateur
M. Alain PUMIR	Rapporteur
M. Stéphane ZALESKI	Examinateur

Remerciements

Au moment difficile où je cherchais une thèse, Mr Balibar m'a très gentiment accueilli et informé sur les différentes équipes travaillant au sein du laboratoire qu'il dirigeait. Je tiens à l'en remercier ainsi que son successeur Mr Meunier et tout le personnel du Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

J'ai ensuite débuté cette thèse sous la direction de Stéphan Fauve. Inutile de dire que ce travail lui doit beaucoup sinon tout. Mais au-delà de ces quelques pages, j'ai l'impression d'avoir beaucoup appris à son contact et de l'avoir fait avec plaisir. Je le remercie donc d'avoir passé du temps à tout m'apprendre sur ce sujet (parmi d'autres) ainsi que d'animer de façon si agréable son équipe.

Je remercie Messieurs Pumir et Castaing pour leur travail et leurs remarques en tant que rapporteurs de ma thèse. Merci aussi aux examinateurs Messieurs Moffatt et Zaleski.

Lorsque nous partions à Cadarache, nous étions accompagnés des membres de l'équipe VKS: Mickaël Bourgoin, Louis Marié, Arnaud Chiffaudel, Philippe Odier, François Daviaud, Jean-François Pinton et Jean-Baptiste Luciani. J'ai passé de bons et instructifs moments avec eux. Je garde un très bon souvenir des journées provençales en leur compagnie, malgré des réveils souvent trop matinaux.

Quand j'étais de retour de Cadarache, j'ai eu l'occasion de travailler avec différentes personnes. Raoul Labbé m'a beaucoup appris sur les méthodes de mesures expérimentales, avec Alvaro Nunez nous avons débuté le calcul de la saturation de la dynamo de Ponomarenko. Auparavant, Eric Falcon m'avait initié aux surprises des ferrofluides. Plus généralement de nombreux résultats ont été obtenus grace aux discussions et à l'aide de mes amis de la D24. Sébastien avec qui j'ai étudié l'effet d'une vibration aléatoire sur l'instabilité de Rosensweig, Jean avec qui j'ai beaucoup discuté entre autre de bruit, ainsi que Nicolas, Artem, Régis, Remy, Stéfania et plus récemment Guillaume. Je tiens à les remercier, à la fois pour leur aide et pour leur compagnie toujours agréable.

Parfois, le soir, il me fallait rentrer chez moi. Tout aurait été différent si mes successifs colocataires Alexis, Caro, Fred, Nico, Christelle et Tibo n'avaient pas eu la patience de me supporter.

J'ai eu l'occasion d'aller quelques semaines au Chili et je remercie ceux avec qui j'ai travaillé et toute la famille Mujicá pour son accueil.

Enfin, je remercie toute ma famille pour son soutien constant.

Table des matières

1 Du champ magnétique créé par un mouvement **11**
1.1 Bref historique de la notion de dynamo 11
1.2 Obtention des équations dans l'approximation de la MHD 16
1.3 Théorèmes anti-dynamo 19
1.4 Analogies et limites de l'équation d'induction 20
1.5 Mécanismes élémentaires d'instabilité 23
1.6 Écoulements modèles générateurs d'effet dynamo 27
1.7 Quelques problèmes intéressants 30

I Seuil d'instabilité dynamo **33**

1 Dynamo de Ponomarenko **37**
1.1 Description 37
1.2 Formulation en terme d'opérateur 39
1.3 Problème adjoint 41
Compléments 43
1.A L'analyse de Ponomarenko 43
1.B Limite de petit nombre de Rossby 44

2 Mise en mouvement d'une couche externe **49**
2.1 Calcul du seuil 50
2.1.1 Principe de la résolution 50
2.1.2 Conditions aux limites entre les différents milieux 51
2.1.3 Résolution 52
2.2 Résultats 52
2.2.1 Milieu extérieur isolant 52
2.2.2 Milieu extérieur conducteur 55
2.3 Conclusion 58
Compléments 61
2.A Perturbation d'un opérateur non auto-adjoint 61
2.A.1 Principe 61
2.A.2 Application 62

2.B Invariance par changement de référentiel 64
2.B.1 Référentiel en translation 65
2.B.2 Référentiel en rotation 65

3 Effet de la turbulence sur le seuil d'instabilité 67
3.1 Objectif de l'étude 67
3.2 Développement perturbatif 69
3.3 Applications 71
3.3.1 Première correction au seuil 73
3.3.2 Seconde correction au seuil 74
Compléments 79
3.A Étude de diverses dynamos alpha-alpha laminaires 79
3.A.1 Problème cinématique pour un écoulement simple 79
3.A.2 Effet d'un second écoulement hélicoïdal 82
3.A.3 Effet d'un forçage paramétrique 83
3.B L'effet alpha turbulent 85

II Mécanismes de saturation et énergie magnétique au dessus du seuil d'instabilité 89

1 Saturation de la dynamo de Ponomarenko 93
1.1 Développement perturbatif 93
1.2 Calcul du taux de croissance cinématique 96
1.3 Calcul de β_0: réponse à fréquence nulle 97
1.4 Calcul de β_d: réponse à fréquence double 99
1.5 Équation d'amplitude et régime saturé 102
Compléments 107
1.A Dynamo de Ponomarenko dans la limite de forte rotation 107
1.A.1 Calcul du taux de croissance 107
1.A.2 Saturation: calcul du coefficient β 108
1.A.3 Champs à saturation 109

2 Lois d'échelle pour l'énergie magnétique 111
2.1 Étude par analyse dimensionnelle 111
2.2 Interprétation physique des lois d'échelles 112
2.3 Ordres de grandeur et applications 114

Compléments 116

II.A Dynamo de Bullard fluide 117
II.A.1 Description et problème cinématique 117
II.A.2 Mise en équation du problème dynamique 120
II.A.3 Étude de la solution saturée 122

II.A.4 Stabilité de l'écoulement 123
II.A.5 Description du régime saturé 125

III Étude d'un écoulement de sodium liquide 127

1 Description de l'expérience 131
1.1 La boucle de sodium et les instruments de mesure 131
1.2 Les différents écoulements 133
1.3 Principe des mesures 135

2 Mesures d'induction moyenne 139
2.1 Écoulement à deux disques contrarotatifs 139
2.2 Écoulement à un disque 142
Compléments 151
2.A Induction pour l'écoulement de Ponomarenko 151
2.A.1 Champ appliqué axial 152
2.A.2 Champ appliqué transverse 152

3 Mesures des fluctuations d'induction 165

IV Complément: Effet d'un bruit multiplicatif sur une instabilité 169
4.1 Principe de l'étude 173
4.2 Bifurcation stationnaire dont le paramètre de contrôle est bruité 174
Développement perturbatif 174
Résultats expérimentaux 177
4.3 Effet d'un bruit de phase sur un oscillateur forcé paramétriquement . . 186

Présentation du document

Dans ce manuscrit, j'expose divers travaux liés à l'étude de l'instabilité dynamo. Afin de ne pas alourdir sa lecture, je présente dans des compléments des résultats utilisés dans la thèse mais qui ne sont pas essentiels à sa compréhension. Suivant le lien du complément avec le texte, il est situé en fin de chapitre ou de partie.

Le premier chapitre est une brève introduction au problème de l'instabilité dynamo: la création d'énergie électromagnétique à partir d'énergie mécanique. Ce sont des résultats connus utilisés ou discutés ultérieurement.

Dans la première partie, je m'intéresse au "Seuil d'instabilité dynamo". En partant des résultats existants pour la dynamo de Ponomarenko, je formule le problème d'instabilité linéaire en terme d'un opérateur. Le calcul de cet opérateur et de son adjoint sont une étape cruciale pour toute étude perturbative d'un problème dynamo. Par ailleurs, j'étudie la limite de cette dynamo pour de petits nombres de Rossby, une limite qui permet de mettre en évidence les mécanismes d'instabilité.

Afin d'évaluer l'effet sur le seuil d'instabilité de la "Mise en mouvement d'une couche externe", je décris un modèle de dynamo proche du précédent pour lequel est mis en mouvement une couche d'un métal conducteur qui entoure la zone où a lieu l'écoulement. Je présente une étude numérique de la valeur du seuil d'instabilité en fonction du mouvement et de la taille de la couche externe et la compare aux résultats prédits par un développement perturbatif détaillé en complément. Dans certains cas, l'invariance de l'équation d'induction par changement de référentiel en mouvement solide est utile pour calculer le seuil d'instabilité. Bien que ce résultat soit connu, j'en donne une preuve en complément car je n'en ai trouvé aucune détaillée.

Avec la récente mise en évidence par des expériences de laboratoire de l'instabilité dynamo, s'est posée la question de l'influence sur le seuil d'instabilité de la partie fluctuante du champ de vitesse créée par la turbulence. Pour ces expériences où l'écoulement est très contraint, la turbulence n'est pas trop importante et son effet sur le seuil semble être très faible. Je calcule cet effet perturbativement et donne un développement de la valeur du seuil en fonction de l'amplitude de la partie fluctuante du champ de vitesse. Dans le cas particulier d'une dynamo de Roberts, le premier coefficient non nul du développement est déterminé et est relié à la valeur de l'effet alpha turbulent, une notion connue présentée en complément.

C'est un exemple de l'effet d'un bruit multiplicatif sur une instabilité. Dans le développement perturbatif réalisé, s'introduit une condition de solvabilité qui nécessite de définir une forme bilinéaire. Compte-tenu du caractère stochastique des champs et de la partie fluctuante de la vitesse, la forme bilinéaire doit être définie pour des variables

aléatoires et elle fait intervenir une moyenne sur les réalisations du bruit. Cette idée est testée sur d'autres types d'instabilités: une instabilité stationnaire simple qui modélise l'état de la surface d'un ferrofluide soumis à un champ magnétique vertical et l'instabilité paramétrique d'un pendule vibré. Le détail des calculs et la comparaison aux expériences sont exposés en quatrième partie. C'est un complément en ce sens qu'il ne s'agit pas d'une étude de l'effet dynamo mais d'une généralisation à d'autres instabilités de la technique utilisée pour l'étude de l'instabilité dynamo bruitée.

La seconde partie concerne l'étude des "Mécanismes de saturation et énergie magnétique au-dessus du seuil d'instabilité". Dans le cas de la dynamo de Ponomarenko je présente un développement perturbatif qui permet de calculer l'amplitude du champ magnétique saturé près du seuil d'instabilité. Dans le chapitre suivant, la formule trouvée est généralisée par analyse dimensionnelle à d'autres types d'écoulements et comparée aux mesures expérimentales. En complément à cette partie est présentée une variante fluide de la dynamo de Bullard. L'étude de sa saturation est plus simple et peut être faite non perturbativement car la structure spatiale du champ magnétique est triviale.

En troisième partie est décrite l' "Étude d'un écoulement tourbillonnaire de sodium liquide". Il s'agit de mesures réalisées avec l'équipe VKS. Deux effets d'induction ont été mis en évidence: l'effet oméga et un effet non-linéaire qui peut être interprété comme un effet alpha. Je compare les mesures aux valeurs calculées pour l'écoulement modèle de Ponomarenko. Enfin je présente les mesures des fluctuations d'induction magnétique qui résultent de l'advection du champ magnétique appliqué par l'écoulement turbulent.

Chapitre 1

Du champ magnétique créé par un mouvement

1.1 Bref historique de la notion de dynamo

Le sens le plus commun du mot dynamo est associé à la génération de courant électrique à partir d'une action mécanique. Pour être plus précis, l'exemple de dynamo le plus répandu est le système qui permet sur une bicyclette de créer un courant électrique allumant les phares en transformant une partie de l'énergie mécanique récupérée par frottement sur la roue.

Le principe est simple et nous le schématisons en figure 1.1. La roue met en mouvement un aimant qui est placé près d'un circuit électrique. Le mouvement de l'aimant provoque une variation de flux magnétique dans le circuit et y induit un courant I par un simple effet d'induction. Le courant est ensuite utilisé pour allumer une lampe.

Au lieu d'utiliser le courant pour allumer une lampe, nous pouvons envisager de nous en servir pour créer un champ magnétique. Si ce champ magnétique est conçu de manière à induire un champ électromoteur dans le circuit, il peut jouer le rôle de l'aimant. Il semble donc possible d'engendrer du courant électrique et donc du champ magnétique à partir d'énergie mécanique sans utiliser d'aimant. Une réalisation simple est la dynamo de Bullard que nous avons schématisée en figure 1.2. Le mécanisme suppose l'existence d'une fluctuation de courant électrique dans le circuit. Ce courant parcourt une spire et crée un champ magnétique. Le mouvement du disque en rotation dans le champ magnétique induit une force électromotrice le long du rayon AP. Celle-ci engendre un courant qui s'ajoute à la fluctuation. Nous venons de décrire en quelques lignes un mécanisme d'instabilité très simple: une fluctuation initiale, qui est toujours présente ne serait-ce que par agitation thermique, va croître.

Cette instabilité peut être nommée "effet dynamo solide": il s'agit de la génération d'énergie électrique à partir d'énergie mécanique en utilisant un ensemble de circuits électriques et d'éléments mobiles solides. Ce système a été réalisé pour la première fois par Siemens. De nos jours, des alternateurs dont le fonctionnement est basé sur ce principe sont utilisés industriellement [1].

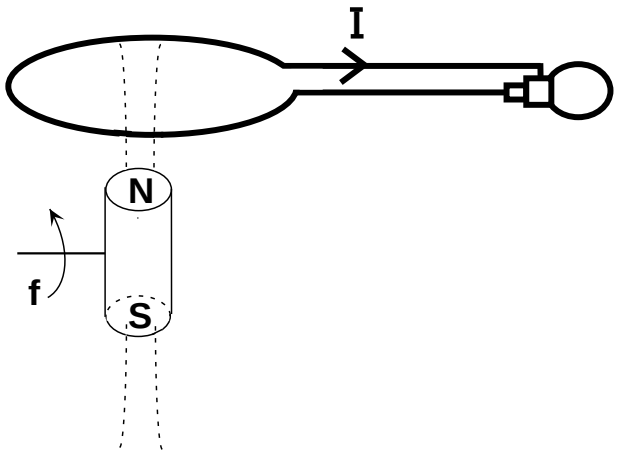

FIG. 1.1 – *Schéma de principe du fonctionnement d'une dynamo de bicyclette. L'aimant, dont les pôles sont notés S et N, est en rotation à la fréquence f et produit une variation périodique du flux, donc un courant I alternatif, dans le circuit fixe (en gras) contenant la lampe.*

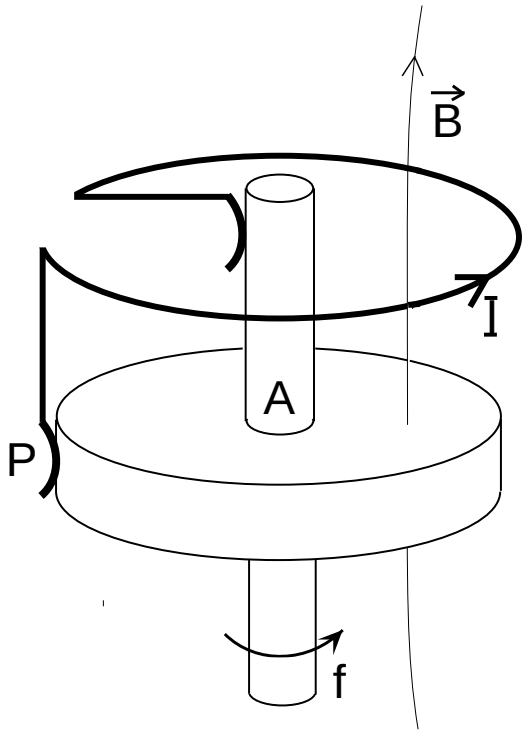

FIG. 1.2 – *Schéma de principe du fonctionnement d'une dynamo de Bullard. Le disque mobile est en rotation à la fréquence f, un courant I est induit dans le circuit fixe (en gras).*

De façon complètement indépendante, la présence de champ magnétique sur Terre était déjà connue par les chinois au huitième siècle avant Jésus-Christ. Il est couramment utilisé par les voyageurs, car l'aiguille des boussoles s'oriente parallèlement à la projection horizontale des lignes de champ, ce qui permet de repérer la direction dite du nord magnétique. Une explication possible de la présence de ce champ pourrait être l'existence au centre de la Terre d'un gigantesque aimant. Une simple objection à cette interprétation est qu'il n'y a pas de matériau ferromagnétique connu qui puisse se comporter comme un aimant aux températures et pressions qui y règnent. Il faut donc trouver un autre mécanisme pour expliquer l'existence de ce champ magnétique.

C'est Larmor [2] qui eut l'idée d'un mécanisme similaire à "l'effet dynamo solide" qu'il décrit ainsi dans le cas du Soleil: "Such internal motion induces an electrical field acting on the moving matter: and if any conducting path around the solar axis happens to be open, an electric current will flow round it, which may in turn increase the inducing magnetic field. In this way it is possible for the internal cyclic motion to act after the manner of the cycle of a self-exciting dynamo". Il ajoute que ce mécanisme peut s'appliquer à la Terre mais nécessite l'existence de mouvements fluides en son centre: "it would require fluidity and residual circulation in deepseated regions". Notons que son article est antérieur à la mise en évidence de l'existence d'un noyau liquide sous la croûte terrestre, comme nous l'avons dessiné en figure 1.3. Depuis que cela a été vérifié, le mécanisme d'une instabilité dynamo dite "effet dynamo fluide" est couramment admis pour expliquer la présence de champ magnétique sur Terre.

Peu à peu, les astrophysiciens ont réalisé des mesures du champ magnétique de différents objets stellaires. Il s'avère qu'une grande majorité possède un champ magnétique et que le mécanisme de génération semble dans de nombreux cas être l'instabilité dynamo fluide. La plupart des planètes de notre système solaire ont un champ magnétique, ainsi que le Soleil et d'autres étoiles. Mais ce n'est pas tout, notre galaxie, ainsi que les amas galactiques en ont un et ce champ n'est pas la simple somme des champ magnétiques créés par les planètes et étoiles qui les composent.

Diverses grandeurs caractéristisant des objets stellaires sont présentées dans le tableau 1 [4].

Milieu	B	ρ	L	v	ν	η	$\frac{L^2}{\eta}$	$\frac{B^2L^3}{2\mu_0}$	$\frac{B^2L\eta}{2\mu_0}$
Notre galaxie	10^{-10}	$2\,10^{-21}$	10^{19}	10^4	$5\,10^{13}$	10^{17}	10^{13}	10^{43}	10^{22}
Soleil	10^{-4}	1	$2\,10^8$	10^3	$3\,10^{-5}$	10^3	10^6	$4\,10^{22}$	10^9
Jupiter	$4\,10^{-4}$	10^3	$5\,10^7$	$5\,10^{-2}$	$3\,10^{-6}$	10	10^7	10^{22}	$4\,10^7$
Terre	10^{-4}	10^4	$3\,10^6$	$4\,10^{-4}$	10^{-6}	3	10^5	$2\,10^{17}$	10^5
Naines blanches	10^2 - 10^4	10^{10}	10^7						
Étoiles à neutrons	10^6 - 10^9	10^{19}	10^4						

Tableau 1: Valeurs typiques du champ magnétique, de la densité, de la taille, de la vitesse, de la viscosité cinématique, de la viscosité magnétique, du temps de diffusion magnétique, de l'énergie magnétique totale et de la puissance dissipée par effet Joule. Toutes les grandeurs sont en unités MKSA sauf le temps de diffusion qui est en années. Nous présenterons ultérieurement la signification des grandeurs qui n'ont pas encore été introduites.

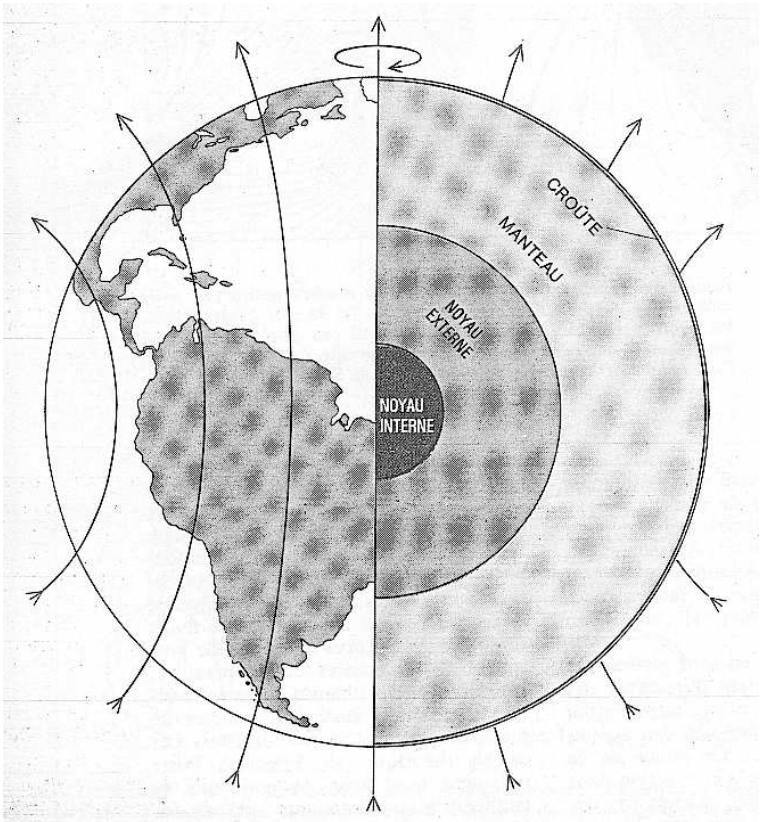

FIG. 1.3 – *Structure interne de la Terre et lignes de champ magnétique. Le noyau interne est solide tandis que le noyau externe est liquide et en mouvement. Figure extraite de [3].*

Nous donnons, à titre de comparaison, les valeurs correspondantes aux naines blanches et aux étoiles à neutrons bien qu'il soit peu probable que le mécanisme de génération du champ soit similaire aux instabilités dynamos existant dans les autres objets. Les valeurs du champ magnétique sont extrêmement variées. Notons qu'elles croissent lorsque nous passons des objets les plus étendus (galaxie) aux plus petits (Terre). Néanmoins si nous calculons l'ordre de grandeur de l'énergie magnétique $B^2\,L^3/\mu_0$ de chaque objet, celle-ci s'ordonne bien dans un sens croissant avec la taille de l'objet étudié.

Par ailleurs des mesures de l'évolution du champ au cours du temps ont été réalisées pour la Terre et le Soleil. Dans les deux cas, le champ n'est pas constant et il s'inverse au cours du temps.

Alors que l'évolution semble être globalement périodique pour le soleil avec une période d'environ vingt-deux années [4], le cas de la Terre est différent. A l'aide de mesures géomagnétiques très pointues, la valeur du champ magnétique a été évaluée sur plusieurs millions d'années. Le champ est en première approximation celui d'un dipole et, en figure

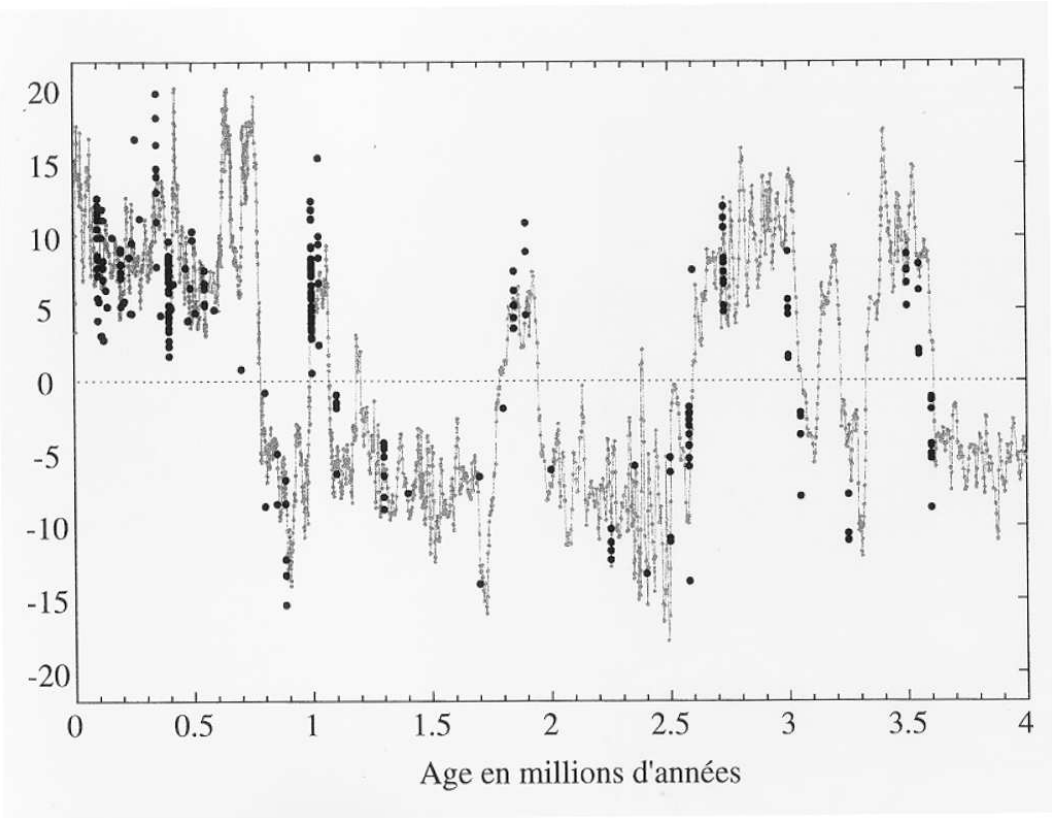

FIG. 1.4 – *Moment dipolaire du champ magnétique terrestre (en* $10^{22} A.m^2$*) durant les quatre derniers millions d'années [6, 7].*

1.4, nous traçons la valeur de ce dipole en fonction du temps. Le champ est fluctuant autour de valeurs non nulles durant de longues périodes avant de s'inverser brusquement de façon aléatoire. Ces dynamiques complexes et variées rendent particulièrement intéressantes l'étude et la modélisation de l'instabilité dynamo.

Depuis Larmor, de nombreux travaux ont été réalisés. Principalement théoriques, les premières études ont tenté d'infirmer ou de confirmer la possibilité de génération de champ magnétique par un écoulement. Ces études ont ensuite été aidées par le développement des simulations numériques. Si des avancées récentes ont été réalisées concernant la dynamique du champ [5], les paramètres physiques utilisés différent énormément de ceux des systèmes qu'elles sont censées modéliser. Dans l'état actuel de la puissance des ordinateurs, une modélisation réaliste de la dynamo terrestre est totalement exclue. Durant les vingt dernières années, la réalisation d'expériences de laboratoire tentant de mettre en évidence l'instabilité dynamo a permis de vérifier des décénies de résultats théoriques et pourrait permettre de comprendre certaines caractéristiques dynamiques du champ créé dans des conditions proches de celles de la Terre.

1.2 Obtention des équations dans l'approximation de la MHD

Les équations qui régissent l'évolution du champ magnétique se déduisent des équations de Maxwell qui sont

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,, \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \epsilon_0\, \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,, \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}\,, \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0\,, \tag{1.4}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique, $\vec{B}$ le champ magnétique, μ la perméabilité magnétique du milieu considéré, ρ_e sa densité volumique de charges et $\vec{\jmath}$ la densité volumique de courant électrique.

Nous considérons l'écoulement de métaux liquides conducteurs dont la perméabilité magnétique est celle du vide $\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$ en unités $MKSA$. Si la vitesse locale du fluide est $\vec{v}$, les lois de transformation classique des champs permettent d'exprimer la densité locale de courant dans un fluide conducteur par

$$\vec{\jmath} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\,. \tag{1.5}$$

Le terme $\sigma\,\vec{E}$ correspond à la loi d'Ohm pour un conducteur au repos, σ étant sa conductivité électrique. L'autre terme est proportionnel au champ électromoteur $\vec{v} \times \vec{B}$ induit par le mouvement du fluide à vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$. Pour pouvoir appliquer la loi 1.5, plusieurs critères doivent être vérifiés. D'une part, pour pouvoir utiliser la conductivité électrique σ définie pour des champs stationnaires, il faut que le temps de collision τ des électrons dans le métal soit petit devant le temps caractéristique d'évolution du champ électromagnétique [9]. En notant f sa fréquence, il faut

$$\tau\, f \ll 1\,. \tag{1.6}$$

D'autre part, pour considérer que la conductivité est indépendante du champ magnétique B, il faut que celui-ci modifie peu la trajectoire des électrons. En utilisant la fréquence de Larmor $f_l = e\,B/m$ d'un électron de masse m et de charge $-e$ dans un champ magnétique B, il faut vérifier que

$$\tau\, f_l \ll 1\,. \tag{1.7}$$

Le temps de collision est relié à la conductivité électrique par la loi $\sigma = n\,e^2\tau/m$ où n est la densité volumique d'électrons. En considérant un métal liquide typique pour lequel $\sigma \simeq 10^6\,\Omega^{-1}.m^{-1}$ et $n \simeq 10^{28} m^{-3}$ [8], les deux approximations précédentes sont

justifiées si la fréquence du champ électromagnétique est inférieures à $10^{14}\,Hz$ et si le champ magnétique est inférieur à $1000\,T$.

Nous en déduisons une équation vérifiée par le champ magnétique en prenant le rotationnel de l'équation 1.2

$$\frac{1}{\mu_0\sigma}\nabla^2\vec{B} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) + \frac{\epsilon_0}{\sigma}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\,. \tag{1.8}$$

Le rapport entre les termes de dérivées temporelles vaut

$$\frac{\epsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}{\mu_0\,\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} = \frac{\epsilon_0\,f}{\sigma} = \frac{f}{fc}\,, \tag{1.9}$$

où f est la fréquence d'évolution du champ magnétique et $f_c = \sigma/\epsilon_0$ est une fréquence caractéristique du métal conducteur. Elle est associée au temps de décroissance d'une densité locale de charge dans un métal au repos. Ce temps est très bref et, pour un métal moyennement conducteur tel que $\mu_0\sigma \simeq 1$, nous avons $f_c \simeq 10^{17}\,Hz$. Cette fréquence est considérablement plus grande que celles sur lesquelles varie le champ magnétique, que ce soit dans les objets stellaires ou dans les expériences de laboratoire. En effet, le champ magnétique est créé par l'écoulement et il est naturel de supposer que ses fréquences de variation vont être proches des fréquences hydrodynamiques. Cette limite est par ailleurs moins contraignante que celle de l'équation 1.6. Nous pourrons donc toujours négliger le terme de dérivée temporelle plus élevée de l'équation 1.8, ce qui revient à négliger le courant de déplacement de l'équation 1.2. Notons que cette approximation est cohérente avec la loi 1.5 qui est l'expression de la loi d'Ohm valide dans la limite non relativiste [9]. L'équation du champ magnétique prend alors le nom d'équation d'induction et s'écrit

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) + \eta\,\nabla^2\vec{B}\,, \tag{1.10}$$

où la viscosité magnétique du fluide est $\eta = (\mu_0\sigma)^{-1}$. Ce sont les équations de l'électromagnétisme dans la limite dite pré-maxwellienne puisqu'est négligé le courant de déplacement introduit par Maxwell. Dans cette limite, la connaissance de $\vec{B}$ permet de connaître le champ $\vec{E}$ à l'aide des équations 1.2 et 1.5. Par ailleurs, contrairement à un métal conducteur au repos, la densité de charge n'est pas nulle et vaut $\rho_e = -\epsilon_0\,\nabla\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$.

Souvent le métal est situé dans un volume entouré par une surface $\mathcal{S}$, l'extérieur étant le vide. Là encore, à partir des équations de Maxwell, nous déduisons les équations dont est solution le champ magnétique dans le vide, à savoir $\nabla\times\vec{B} = 0$ et $\nabla\cdot\vec{B} = 0$. Nous détaillerons sur des exemples quelles sont les conditions aux limites que vérifie le champ aux parois.

Il y a génération de champ magnétique par effet dynamo quand la solution triviale $\vec{B} = \vec{0}$ des équations 1.4 et 1.10 est instable.

Il faut aussi préciser l'équation qui régit l'évolution du champ de vitesse du fluide. Les écoulements de métaux liquides sont bien décrits par l'équation de Navier-Stokes [10]

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla P + \rho\,\nu\nabla^2\vec{v} + \vec{\jmath}\times\vec{B}\,, \tag{1.11}$$

où ρ est la densité du fluide, ν la viscosité cinématique et P le champ de pression. Le terme $\vec{\jmath} \times \vec{B}$ est la force de Laplace par unité de volume qui s'exerce sur le fluide. C'est le terme de couplage qui régit l'influence du champ magnétique sur le champ de vitesse.

L'écoulement peut être créé soit par un forçage volumique et il nous faut rajouter la densité volumique de cette force dans l'équation, soit par le mouvement des parois solides et c'est par les conditions aux limites que le champ de vitesse est forcé.

L'équation de conservation de la matière s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \, \vec{v}) = 0 \, . \tag{1.12}$$

Les écoulements sont généralement considérés comme incompressibles car les vitesses du fluide sont faibles devant la vitesse des ondes sonores. Avec cette hypothèse, l'équation précédente prend la forme

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \, . \tag{1.13}$$

Nous introduisons le nombre sans dimension qui compare le terme advectif $\vec{v}.\nabla \, \vec{v}$ au terme diffusif $\nu \, \nabla^2 \vec{v}$ de l'équation 1.11. Il s'agit du nombre de Reynolds cinétique Re

$$Re = \frac{V \, L}{\nu} \, , \tag{1.14}$$

où V et L sont la vitesse et la taille caractéristique de l'écoulement. A bas Re, le champ de vitesse est laminaire. Si nous augmentons sa valeur, des instabilités peuvent apparaître et, à haut Re, l'écoulement est turbulent [11]. Nous introduirons au paragraphe 1.4 un nombre équivalent pour l'équation d'induction.

Etudier un problème de dynamo fluide consiste à résoudre le système des quatre équations 1.4, 1.10, 1.11 et 1.13. Ce sont des équations différentielles non linéaires couplées dont les inconnues sont des champs vectoriels.

Une façon de s'y attaquer consiste à les résoudre numériquement. Le temps diffusif caractéristique du champ de vitesse est $\tau_v = L^2/\nu$ tandis que celui du champ magnétique est $\tau_B = L^2/\eta$, où L est la taille caractéristique sur laquelle a lieu la diffusion. Le rapport de ces deux temps s'écrit $\frac{\tau_B}{\tau_v} = \frac{\nu}{\eta} = P_m$ où par définition le Prandtl magnétique P_m est le rapport des deux viscosités. Dans le cas de la dynamo terrestre, les géophysiciens estiment que $P_m \simeq 10^{-6}$. Les deux champs évoluent sur des temps caractéristiques extrêmement différents, ce qui nécessite des durées de calculs numériques immenses. En outre, pour ces valeurs de P_m, nous verrons que le nombre de Reynolds Re est très grand. Dans cette limite, la résolution de l'équation de Navier-Stokes nécessite de résoudre des échelles spatiales très petites ce qui est aussi extrêmement coûteux en mémoire de calcul. Il est donc pour l'instant vain d'espérer résoudre par simulation numérique directe le problème pour des valeurs réalistes des paramètres.

Il a donc fallu développer d'autres méthodes d'étude. Une première consiste à supposer que le champ de vitesse est fixé et à étudier l'évolution du champ magnétique. Il s'agit donc de ne résoudre que les deux équations (1.4 et 1.10) régissant l'évolution du

champ magnétique. C'est ce qui est appelé le problème de la "dynamo cinématique". Le problème est alors linéaire en champ magnétique. Il permet donc d'étudier certains aspects, notamment ceux liés à sa formation qui requièrent l'étude de la stabilité linéaire du problème dynamo. Néanmoins, il ne permet pas l'étude des effets non linéaires comme ceux liés à la saturation et à la dynamique du champ qui nécessitent en outre la résolution des équations du champ de vitesse. C'est ce qui est appelé problème de la "dynamo dynamique".

C'est dans le cadre de la dynamo cinématique que les premiers travaux ont été menés. Dans le prochain paragraphe, nous allons revenir sur certains résultats nommés théorèmes anti-dynamo parce qu'ils prouvent que certains écoulements ne peuvent jamais créer du champ magnétique par effet dynamo. Nous verrons ensuite que dans la limite de viscosité magnétique faible, le champ magnétique a des propriétés simples qui permettent de comprendre les mécanismes élémentaires d'une instabilité dynamo. Basés sur ces mécanismes, des écoulements ont été proposés qui, théoriquement, sont générateurs d'effet dynamo. Pour certains de ces écoulements, cela a été vérifié expérimentalement.

1.3 Théorèmes anti-dynamo

Avant de mettre en évidence certains écoulements créant du champ magnétique par effet dynamo, plusieurs études ont réussi à montrer que dans certaines conditions cet effet ne peut se produire. Ce sont les théorèmes anti-dynamo. Nous ne donnons pas ici leurs démonstrations et des références peuvent être trouvées dans diverses revues [12, 17]. Nous classons ces théorèmes en trois catégories. Les théorèmes que nous nommons "d'écoulements" et qui affirment que certains types d'écoulements ne peuvent jamais créer de champ magnétique. Les théorèmes "de champs magnétiques" qui montrent que certains types de champs ne peuvent pas être créés par effet dynamo. Les théorèmes "mixtes" qui prohibent la génération de champs magnétiques ayant une certaine structure si l'écoulement a lui-même une certaine forme. Nous allons énumérer quelques théorèmes sans prétendre être exhaustifs.

Commençons par les théorèmes d'écoulements.

Le théorème de Zeldovich ou théorème des **écoulements plans** prohibe la génération de champ magnétique par des écoulements incompressibles et plans, c'est-à-dire dont la vitesse $\vec{v}$ exprimée dans un repère cartésien $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ vérifie $\vec{v}.\vec{u}_z = 0$.

Deux autres théorèmes concernent les écoulements dans des sphères et sont donc d'un grand intérêt pour les géophysiciens et les astrophysiciens.
Le théorème de la **vitesse "purement radiale"** concerne les champs de vitesse qui s'écrivent $\vec{v} = v(r,t)\,\vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire radial en coordonnées sphériques.
Le théorème de la **vitesse "nullement radiale"** s'applique au champ vérifiant $\vec{v}.\vec{u}_r = 0$.

Dans ces deux cas, l'instabilité dynamo ne peut pas apparaître.

Comme nous le détaillerons dans le complément 2.B, l'équation d'induction est invariante par tout changement de référentiel en rotation et translation à vitesse constante. Nous pouvons énoncer un résultat général sur les **transformées des champs de vitesse**. Si τ est une transformation qui laisse invariante l'équation d'induction, et si $\vec{v}$ est un champ de vitesse qui ne crée pas de champ magnétique alors le champ de vitesse $\tau(\vec{v})$ n'en crée pas non plus.

Les théorèmes des champs magnétiques sont relatifs à la structure des champs qui peuvent croître par effet dynamo.

Le théorème du **"champ axisymétrique"** ou théorème de Cowling, concerne les champs magnétiques invariants par rotation autour d'un axe.

Le théorème du **"champ bidimensionnel"** s'applique aux champs qui, dans un jeu de coordonnées spatiales, sont indépendants d'une des coordonnées. Dans les deux cas, ces champs ne peuvent être engendrés par effet dynamo et ce, quel que soit l'écoulement.

Les théorèmes mixtes sont des résultats qui dépendent à la fois de la structure du champ magnétique et de celle de l'écoulement. Un théorème dérivé du théorème des champs axisymétriques indique que la partie axisymétrique d'un champ magnétique ne peut être entretenue par un champ de vitesse axisymétrique.

Notons qu'il est difficile de prouver ces théorèmes dans un cadre très général. En effet, les conditions aux limites que doit vérifier le champ dépendent de la nature du milieu extérieur et sont très variées. Elles sont donc omises dans un certain nombre de preuves ou alors c'est la structure des champs magnétiques étudiés qui est contrainte.

Ces théorèmes sont très utiles pour rechercher des écoulements qui soient susceptibles d'engendrer l'instabilité dynamo. Nous voyons que le champ de vitesse et le champ magnétique doivent avoir un niveau minimum de complexité spatiale et, dans les cas que nous étudierons, verrons comment ces théorèmes s'appliquent. Sachant désormais dans quels cas l'instabilité ne peut pas exister, il est important de voir quels mécanismes entrent en jeu pour qu'elle se développe et, pour bien les comprendre, nous commençons par étudier certaines propriétés de l'équation d'induction.

1.4 Analogies et limites de l'équation d'induction

L'équation d'induction 1.10 est analogue à d'autres équations largement étudiées en hydrodynamique. Un exemple est l'analogie avec l'équation qui régit le champ de vorticité dans un fluide incompressible ou plus généralement barotrope, c'est-à-dire dont l'équation d'état s'écrit comme une loi $P(\rho)$ reliant la pression P à la densité ρ. A partir de l'équation de Navier-Stokes 1.11, dans la limite où l'effet du champ magnétique est négligeable, il

est facile de montrer que l'équation d'évolution de la vorticité $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$ est

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\Omega}) + \nu \nabla^2 \vec{\Omega} \,. \tag{1.15}$$

C'est la même que l'équation d'induction dans laquelle la viscosité cinématique ν a remplacé la viscosité magnétique η. Si cette analogie a permis d'étendre au champ magnétique quelques résultats concernant la vorticité, elle est aussi trompeuse. Mis à part l'écart significatif entre les valeurs des viscosités, deux différences très importantes existent. D'une part la vorticité est, par définition, une fonction du champ de vitesse et l'équation 1.15 est non linéaire en $\vec{\Omega}$; d'autre part les conditions aux limites ne sont pas les mêmes. Cette dernière propriété rend caduques des raisonnements simplistes qui viseraient à étendre à l'instabilité dynamo des mécanismes d'instabilités engendrant de la vorticité.

Citons aussi l'analogie avec l'équation régissant l'évolution d'un champ scalaire quelconque $S(\vec{r},t)$ diffusé et advecté par l'écoulement

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v}.\nabla S = \kappa \nabla^2 S \,, \tag{1.16}$$

où κ est la constante de diffusivité du champ S. L'équation ressemble à celle du champ magnétique mais il manque l'équivalent du terme $\vec{B}.\nabla \vec{v}$ du développement $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{B}.\nabla \vec{v} - \vec{v}.\nabla \vec{B}$, valable pour des champs incompressibles. Or, nous allons voir que ce terme est la source du processus de génération de champ magnétique par induction.

Étudions maintenant certaines limites de l'équation d'induction. Quand le fluide conducteur est au repos, elle devient une simple équation de diffusion

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B} \,. \tag{1.17}$$

Il est facile de montrer que s'il n'y a pas de champ imposé aux parois, la solution de cette équation tend vers zéro aux temps longs. Le temps caractéristique de décroissance d'un champ initial B_0 occupant un volume de taille caractéristique L se calcule par analyse dimensionnelle et vaut $\tau_B = L^2/\eta$. Dans le cas de la terre, prenons $\eta \simeq 2\, m^2.s^{-1}$ et $L \simeq 1000\, km$. Nous trouvons $\tau_B \simeq 15000\, ans$. Ce temps est très bref devant la durée depuis laquelle le champ magnétique existe sur Terre qui est estimée à 3.5 milliards d'années. Cet argument prohibe l'hypothèse simple que le champ terrestre est un champ fossile, c'est-à-dire qu'il ait été formé il y a longtemps par un processus quelconque et qu'il soit actuellement dans la phase de décroissance à zéro. Il est donc bien nécessaire pour expliquer la présence du champ terrestre de faire appel aux phénomènes d'induction.

Nous venons d'étudier la limite de vitesse nulle; prenons maintenant la limite contraire où le terme d'induction est très supérieur au terme de diffusion. En développant le terme $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$, il apparaît que le champ magnétique vérifie l'équation

$$\frac{D\,\vec{B}}{D\,t} = \frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} + \vec{v}.\nabla \vec{B} = \vec{B}.\nabla \vec{v} \,, \tag{1.18}$$

où par définition $\frac{D\vec{B}}{Dt}$ est la dérivée particulaire de $\vec{B}$.

Dans cette limite le théorème dit "d'Alfvèn" permet de décrire de façon simple l'évolution du champ magnétique. Pour le démontrer, calculons l'équation d'évolution d'un vecteur infinitésimal $\delta\vec{r}$ reliant deux particules fluides situées en $\vec{r}$ et $\vec{r}+\delta\vec{r}$. Nous avons

$$\frac{D\delta\vec{r}}{Dt} = \frac{D(\vec{r}+\delta\vec{r})}{Dt} - \frac{D\vec{r}}{Dt} = \vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{r},t) - \vec{v}(\vec{r},t) = \delta\vec{r}.\nabla\vec{v}\,. \tag{1.19}$$

C'est la même équation différentielle que pour le champ magnétique. Ainsi, si nous choisissons à l'instant initial une distance entre deux particules fluides $\delta\vec{r}$ proportionnelle au champ magnétique $\vec{B}$, les évolutions des deux champs sont identiques. Cela signifie que le champ magnétique est gelé dans le fluide ("frozen field"): quelle que soit l'évolution (rotation, translation, étirement) que le champ de vitesse fait subir à $\delta\vec{r}$, il fait subir la même transformation au champ $\vec{B}$. C'est l'un des premiers résultats théoriques de magnéto-hydrodynamique. Ses applications sont nombreuses, notamment car il permet de se faire facilement une idée de l'évolution d'un champ local uniquement en connaissant les trajectoires des particules fluides. Ce résultat est l'analogue du théorème de Kelvin [10] pour la vorticité dans un fluide parfait et c'est un cas où l'analogie entre l'équation d'induction et l'équation de la vorticité est utile. Notons que dans le cas où le fluide est compressible, le résultat s'applique au champ $\frac{\vec{B}}{\rho}$.

Nous venons d'étudier deux limites: celle de vitesse nulle où le champ magnétique diffuse et tend vers zéro et celle de viscosité magnétique négligeable où les phénomènes d'induction sont présents et où l'effet dynamo existe peut-être. Pour se situer par rapport à ces deux limites, il est naturel d'introduire le rapport sans dimension entre l'induction et la diffusion dans l'équation d'induction. Nous définissons ainsi le nombre de Reynolds magnétique

$$R_m \simeq \frac{\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})}{\eta\nabla^2\vec{B}}, \text{ soit } \; R_m = \frac{VL}{\eta}\,, \tag{1.20}$$

où V et L sont la vitesse et la taille caractéristiques de l'écoulement. Ce nombre est, pour l'équation d'induction, ce que le nombre de Reynolds cinétique Re est pour l'équation de Navier-Stokes. Notons que leur rapport vaut le Prandtl magnétique $P_m = R_m/Re$.

Dans la limite de petit R_m, nous nous attendons à retrouver des comportements diffusifs du champ magnétique tandis que la limite où s'applique le théorème d'Alfvèn correspond à R_m infini. Nous verrons plus tard que pour certains écoulements, il existe une valeur du R_m, nommée nombre de Reynolds magnétique critique R_{mc}, au dessus de laquelle la solution nulle de l'équation d'induction devient instable et du champ magnétique est alors engendré. Pour comprendre comment cela se produit, il faut détailler les différents mécanismes qui entrent en jeu dans cette instabilité. Pour cela, la limite de très haut R_m dans laquelle l'évolution du champ est simple permet d'appréhender ces mécanismes "avec les mains".

1.5 Mécanismes élémentaires d'instabilité

L'idée de ces raisonnements est de comprendre comment une petite perturbation locale de champ magnétique peut croître. Nous cherchons comment un champ $\vec{b}_0$ dans une direction peut être amplifié en un champ $\vec{b}_1 = c_1\,\vec{b}_0$ dans une autre direction puis réitérons le processus jusqu'à obtenir un champ $\vec{b}_n = c_n.c_{n-1}...c_1\,\vec{b}_0$ qui soit de même direction que le champ initial $\vec{b}_0$. Le seuil est alors obtenu formellement par la condition $c_n.c_{n-1}...c_1 = 1$. Ce raisonnement n'est exact que si nous considérons pour $\vec{b}_0$ une composante du mode instable du champ. Toutefois, en étudiant l'évolution d'une perturbation localisée nous espérons comprendre qualitativement les mécanismes de l'instabilité.

Avant de décrire les divers effets, nous allons introduire une décomposition du champ qui est très largement utilisée en magnéto-hydrodynamique. Il est facile de montrer [17] que tout champ magnétique peut s'écrire sous la forme

$$\vec{B} = \vec{B}_p + \vec{B}_t \;\text{ où }\; \vec{B}_p = \nabla \times (\nabla \times (P\,\vec{r})) = -\nabla \times (\vec{r} \times \nabla P)\,,$$
$$\vec{B}_t = \nabla \times (T\,\vec{r}) = -\vec{r} \times \nabla T\,. \tag{1.21}$$

Le champ est ainsi séparé en deux champs vectoriels nommés respectivement champ poloïdal et champ toroïdal. Ces deux composantes s'expriment simplement en fonction de deux champs scalaires P et T. Cette décomposition est utile notamment pour prouver certains théorèmes anti-dynamo, mais aussi pour traduire numériquement les conditions aux limites du champ magnétique. Dans la limite où le champ est axisymétrique, la décomposition est encore plus simple. En utilisant les coordonnées cylindriques, la composante toroïdale est portée par le vecteur $\vec{u}_\theta$ et correspond à la composante azimutale ou orthoradiale. La composante poloïdale est portée par le plan méridien défini par les deux vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$. Dans de nombreux travaux, la description des mécanismes d'instabilité consiste à étudier comment un champ magnétique poloïdal va être transformé en champ magnétique toroïdal et réciproquement. Enfin, notons qu'il est parfois utile d'appliquer cette décomposition au champ de vitesse pour un écoulement incompressible.

L'effet le plus simple est nommé effet oméga. Si nous écrivons l'équation d'induction sous la forme

$$\frac{D\,\vec{B}}{D\,t} = \frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} + \vec{v}.\nabla\vec{B} = \vec{B}.\nabla\vec{v} + \eta\nabla^2\vec{B}\,, \tag{1.22}$$

le premier terme du second membre est un terme source pour l'équation. Étudions le cas où $\vec{B}$ a une composante B_0 le long d'une direction $\vec{u}_0$ suivant laquelle le champ de vitesse présente du cisaillement. Nous supposons que le champ de vitesse s'écrit $\vec{v} = v_\perp(x_0)\vec{u}_\perp$ où $\vec{u}_\perp$ est orthogonal à $\vec{u}_0$. Le terme $\vec{B}.\nabla\vec{v}$ a une composante suivant $\vec{u}_\perp$ qui s'écrit $B_0\frac{\partial v_\perp}{\partial x_0}$, c'est un terme source pour le champ perpendiculaire au champ considéré initialement et qui traduit le couplage entre ces deux composantes. Traditionnellement ce mécanisme est étudié dans le cas de géométries axisymétriques où le cisaillement est créé par la rotation différentielle. Le nom d'effet oméga vient de ce que le terme source fait alors intervenir le vecteur vitesse de rotation souvent noté $\vec{\Omega}$. Dans ce cas, il traduit la conversion d'un champ

poloïdal en un champ toroïdal et, dans la limite de R_m infini, il est aisé de comprendre comment la rotation différentielle permet cette conversion (voir figure 1.5).

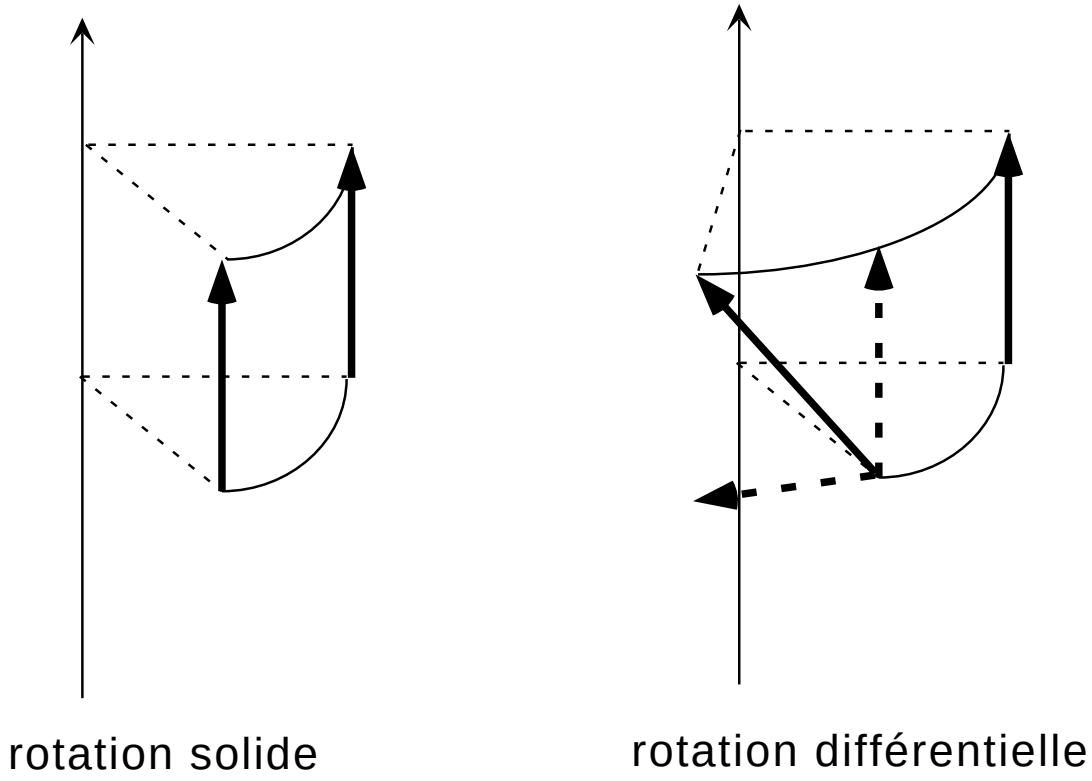

FIG. 1.5 – *Principe de l'effet oméga. Les lignes du champ de vitesse sont les portions de cercle en traits pleins. Le champ magnétique est en traits gras. La rotation solide ne fait que déplacer le champ magnétique. La rotation différentielle étire le champ magnétique et crée une composante orthoradiale parallèle au cisaillement. Le champ non étiré et la composante créée sont dessinés en traits gras pointillés.*

Une ligne reliant deux particules fluides initialement orthogonale au cisaillement est étirée par l'écoulement dans la direction parallèle au cisaillement. D'après le théorème d'Alfvèn, il en va de même pour le champ magnétique et nous comprenons comment un champ magnétique poloïdal, donc orthogonal au cisaillement, est étiré et crée un champ parallèle au cisaillement donc toroïdal.

Un autre effet est nommé effet alpha. Il est relié à la nature hélicitaire de l'écoulement, c'est-à-dire à la présence d'un champ de vitesse dont les trajectoires sont localement des hélices. En figure 1.6, nous schématisons le mécanisme. Le champ magnétique initial $\vec{B}_0$ est déformé par l'écoulement jusqu'à décrire un lacet dont la boucle n'est pas dans le plan du dessin (étapes 1 et 2). La suite du processus consiste à prendre en compte l'effet de la diffusion et il est couramment admis que le lacet se referme et forme une spire

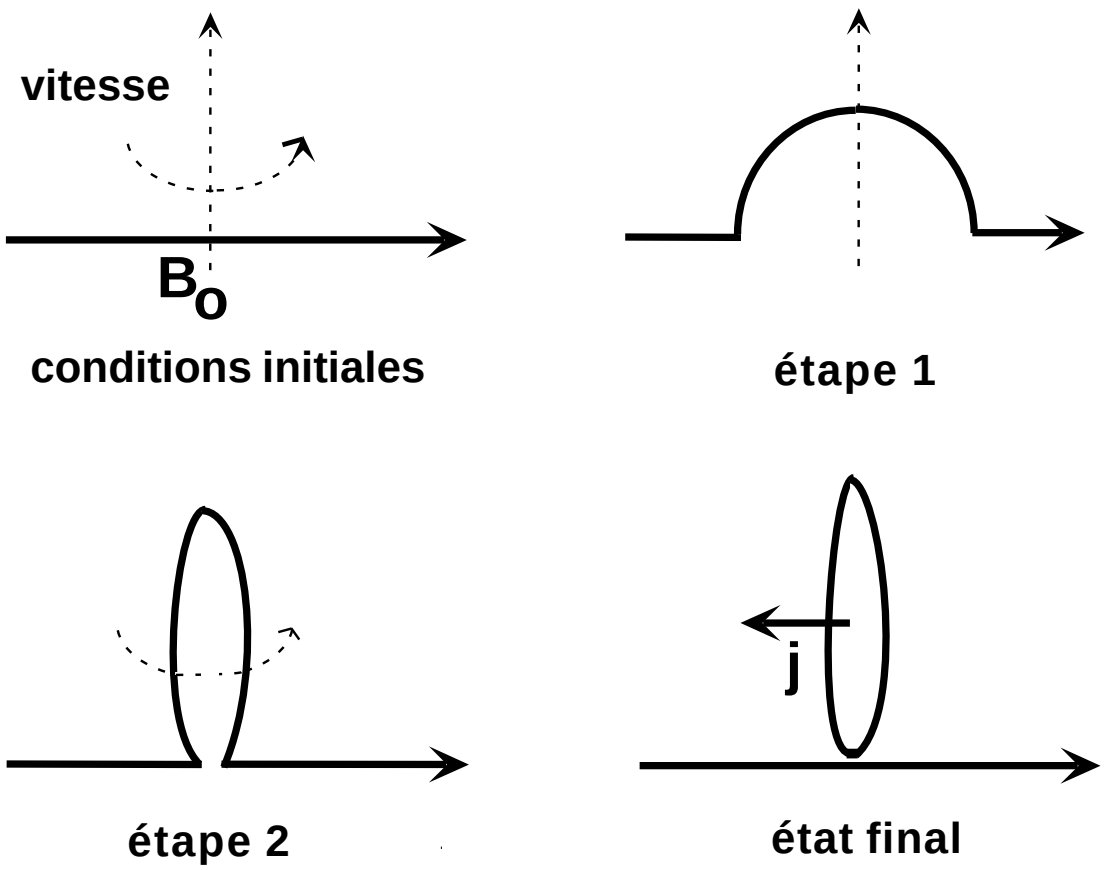

FIG. 1.6 – *Principe de l'effet alpha. Le champ de vitesse est en pointillé. Il déforme le champ magnétique (traits continus) et crée une spire dont le courant associé j a une composante parallèle au champ appliqué B_0.*

(étape finale). A cette spire est associé un courant j qui n'est pas orthogonal au champ initial B_0. Même si cette description est très phénoménologique, le principe de l'effet alpha apparaît clairement: il s'agit d'induire un courant ayant une composante parallèle au champ appliqué.

Il existe plusieurs façons de comprendre cet effet dans l'équation d'induction. Sans préciser de quelle moyenne il s'agit, notons $\langle f \rangle$ la moyenne de f et décomposons toute grandeur f entre sa partie moyenne et sa partie fluctuante $f' = f - \langle f \rangle$. La moyenne du terme d'induction s'écrit

$$\left\langle \vec{v} \times \vec{B} \right\rangle = \langle v \rangle \times \left\langle \vec{B} \right\rangle + \left\langle \vec{v'} \times \vec{B'} \right\rangle . \tag{1.23}$$

Le premier terme du second membre est l'induction liée aux deux champs moyens. Le second terme est lié aux fluctuations des champs de vitesse et magnétique. Dans certains

cas il peut être relié au champ moyen par une loi linéaire

$$\left\langle \vec{v'} \times \vec{B'} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{B} \right\rangle . \tag{1.24}$$

Le terme α détermine l'importance de cet effet. Son nom vient simplement de sa place dans l'alphabet grec, et n'a à notre connaissance pas de lien avec le mécanisme physique. En général, α est un tenseur. Dans certains cas, il est proportionnel à l'identité et apparaît dans l'équation 1.24 comme un pseudo-scalaire, c'est-à-dire un nombre qui est changé en son opposé par toute symétrie transformant un trièdre direct en un trièdre indirect. Son amplitude peut parfois être calculée dans la limite de faible R_m. A l'aide de la loi d'Ohm 1.5, nous interprétons le terme $\left\langle \vec{v'} \times \vec{B'} \right\rangle$ comme un courant moyen proportionnel au champ magnétique, ce qui est le mécanisme décrit qualitativement en figure 1.6.

Pour des écoulement laminaires, le modèle le plus simple est celui de G.O. Roberts [13] que nous détaillerons au paragraphe suivant car c'est un exemple d'écoulement engendrant la dynamo. Il s'agit d'un ensemble périodique d'écoulements hélicoïdaux dont les hélicités sont identiques alors que les champs de vitesses sont opposés. La moyenne est dans ce cas une moyenne spatiale sur une période de l'écoulement.

Ce modèle a été étendu au cas d'écoulements turbulents de façon indépendante par Krause, Rädler et Moffatt [16, 17]. L'existence dans les écoulements turbulents de tourbillons permet de traiter leurs effets de façon similaire au traitement de Roberts. La moyenne est alors une moyenne temporelle et spatiale sur des intervalles étendus par rapport à ceux où ont lieu les événements turbulents mais de petites tailles par rapport à ceux où ont lieu les variations du champ magnétique moyen. L'équation qui régit l'évolution des fluctuations du champ magnétique $\vec{B'}$ s'obtient en retranchant sa moyenne à l'équation d'induction, il vient

$$\frac{\partial \vec{B'}}{\partial t} - \nabla \times (\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B'}) - \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B'} - \left\langle \vec{v} \times \vec{B'} \right\rangle \right) - \eta \nabla^2 \vec{B'} = \nabla \times \left(\vec{v'} \times \left\langle \vec{B} \right\rangle \right) . \tag{1.25}$$

Nous en déduisons alors que $\vec{B'}$ est un fonction linéaire de $\left\langle \vec{B} \right\rangle$. Sans pousser ce calcul, nous pouvons développer $\left\langle \vec{v'} \times \vec{B'} \right\rangle$ en une fonction faisant intervenir $\langle B \rangle$ et ses dérivées. Les premiers termes de ce développement s'écrivent

$$\left\langle \vec{v'} \times \vec{B'} \right\rangle_i = \alpha_{i\,j} \left\langle \vec{B} \right\rangle_j + \beta_{i\,j\,k} \frac{\partial \left\langle \vec{B} \right\rangle_j}{\partial x_k} ... \tag{1.26}$$

Suivant le modèle utilisé pour décrire l'écoulement, il est possible de relier les coefficients aux propriétés statistiques du champ de vitesse. C'est l'effet alpha turbulent que nous détaillerons en complément du chapitre I.3. Remarquons que le second terme correspond à un autre effet dit effet béta. Dans le cas d'un écoulement isotrope sa contribution au courant moyen s'écrit $\left\langle \vec{v'} \times \vec{B'} \right\rangle = -\beta \nabla \times \left\langle \vec{B} \right\rangle$ où β est un scalaire. Il donne donc une

contribution supplémentaire à la viscosité magnétique dans l'équation d'induction pour le champ moyen et il faut y remplacer η par $\eta+\beta$. Notons que certains écoulements modèles peuvent être instables dans le cas où la viscosité totale est négative [18].

D'autres écoulements présentant un effet alpha sont les écoulements presque axi-symétriques pour lesquels Braginsky a montré qu'il était possible de construire un terme $\vec{v'} \times \vec{B'}$ de moyenne azimutale non nulle [19].

Nous venons de citer plusieurs exemples qui entrent dans notre définition générale de l'effet alpha: la génération d'un courant ayant une composante parallèle au champ appliqué. Certains sont liés aux propriétés turbulentes et d'autres à la structure spatiale d'un écoulement laminaire. Notons que dans le cas d'écoulements ayant des symétries particulières, Krause et Rädler ont développé le terme moyen de l'équation 1.26 aux ordres supérieurs faisant apparaître d'autres effets [16].

Nous avons vu comment certains mécanismes simples permettent le couplage des différentes composantes du champ magnétique; ils sont essentiels au développement de l'instabilité. Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter des écoulements modèles qui engendrent du champ magnétique par effet dynamo et nous verrons comment les mécanismes précédents entrent en jeu.

1.6 Écoulements modèles générateurs d'effet dynamo

La justification théorique et la vérification expérimentale du fonctionnement des dynamos solides sont anciennes. Au contraire, il a fallu attendre plusieurs dizaines d'années entre l'hypothèse de Larmor et la découverte, au moins théorique, de la génération du champ magnétique par effet dynamo fluide. Entre temps, les nombreux théorèmes anti-dynamo avaient permis d'exclure certaines classes d'écoulements. Afin de pouvoir résoudre plus facilement les équations d'induction, les premiers modèles ont concerné des champs de vitesse de type rotation et translation solide. Pour commencer, citons la dynamo de Lowes et Wilkinson [20, 21]. L'écoulement est une rotation solide qui a lieu dans deux cylindres disjoints dont les axes ne sont pas parallèles et dont le plan des axes ne contient pas la droite reliant les centres des deux cylindres. Un schéma de principe de cette dynamo est présenté en figure 1.7. Ces deux cylindres sont placés dans un métal conducteur au repos.

Ce modèle est similaire au modèle de Hertzenberg [4] où les cylindres sont remplacés par des sphères. Les mécanismes sont identiques et peuvent être décrits assez simplement.

La partie toroïdale du champ créé par le cylindre 1 apparaît pour le cylindre 2 comme ayant une composante qui lui est poloïdale. Compte-tenu du cisaillement existant à la frontière du cylindre 2, celui-ci crée par effet oméga du champ toroïdal à partir du champ du cylindre 1. A son tour, le champ toroïdal créé par le cylindre 2 a, pour le cylindre 1, une composante poloïdale. Celle-ci est comme précédemment transformée par le cylindre 1 en un champ qui lui est toroïdal. Nous voyons que le couplage entre les deux champs est réalisé par deux effets oméga qui donnent à cette dynamo le nom de dynamo oméga-oméga. Une

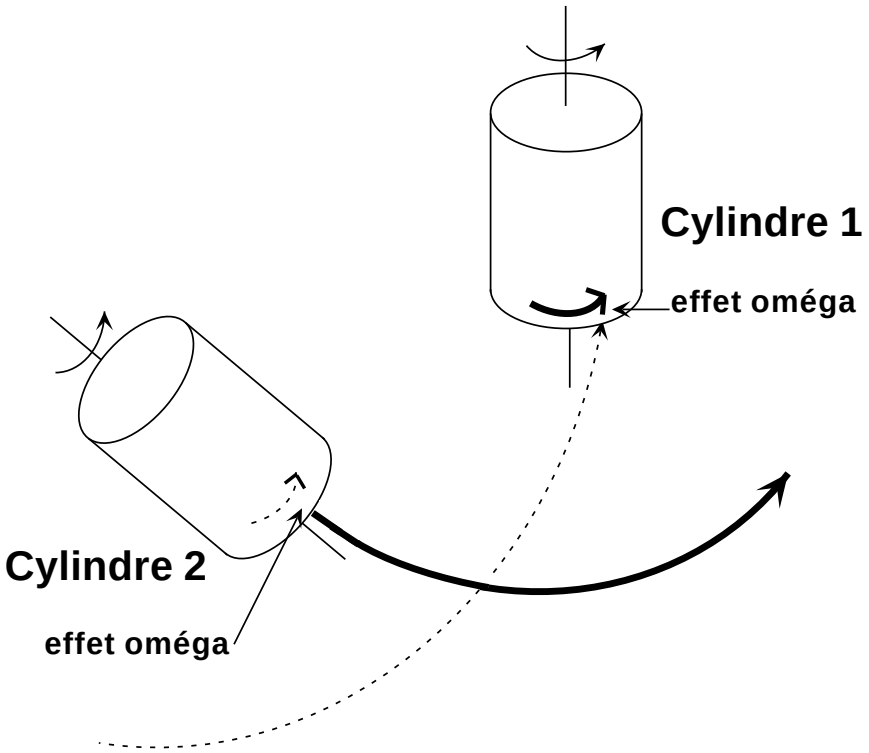

FIG. 1.7 – *Schéma de principe de la dynamo de Lowes et Wilkinson. Le champ toroïdal du cylindre* 2 *(traits pointillés) est un champ poloïdal pour le cylindre* 1 *et celui-ci le transforme par effet oméga en un champ qui est, pour lui, toroïdal (traits pleins).*

réalisation expérimentale en a été faite par Lowes et Wilkinson en utilisant des cylindres métalliques solides. Si nous remplaçons ces cylindres par une coquille cylindrique remplie d'un métal liquide, le mouvement de l'ensemble reste une rotation solide, tout au moins avant le seuil d'instabilité. Celui-ci est donc atteint pour la même vitesse de rotation que dans le cas où le cylindre est solide de même resistivité et même perméabilité magnétique. C'est un exemple de dynamo fluide. Même si l'écoulement n'est pas localisé dans un volume connexe et ne peut que difficilement modéliser une situation astrophysique ou géophysique, il reste intéressant du point de vue du mécanisme d'instabilité. Ajoutons que lors des expériences ont été mis en évidence des comportements instationnaires du champ avec notamment des inversions correspondant au passage d'un état du champ à son opposé [22]. Cependant le phénomène physique responsable de ces inversions est peut-être lié aux non-linéarités des cylindres ferromagnétiques utilisés.

Un autre exemple est la dynamo de Ponomarenko [23]. Il s'agit d'un écoulement de rotation solide et translation situé dans un cylindre infini. Nous développerons plus longuement l'étude de cette instabilité et présentons un dessin de l'écoulement en figure 1.1 page 38. Compte-tenu de la structure du mode instable, la nature de l'instabilité n'est pas

triviale mais nous l'interprétons comme un dynamo alpha-oméga car ces deux mécanismes interviennent. La première mise en évidence expérimentale de l'instabilité dynamo fluide a été réalisée avec un écoulement inspiré de celui de Ponomarenko [52]. Un croquis de l'expérience est présenté en figure 1.8.

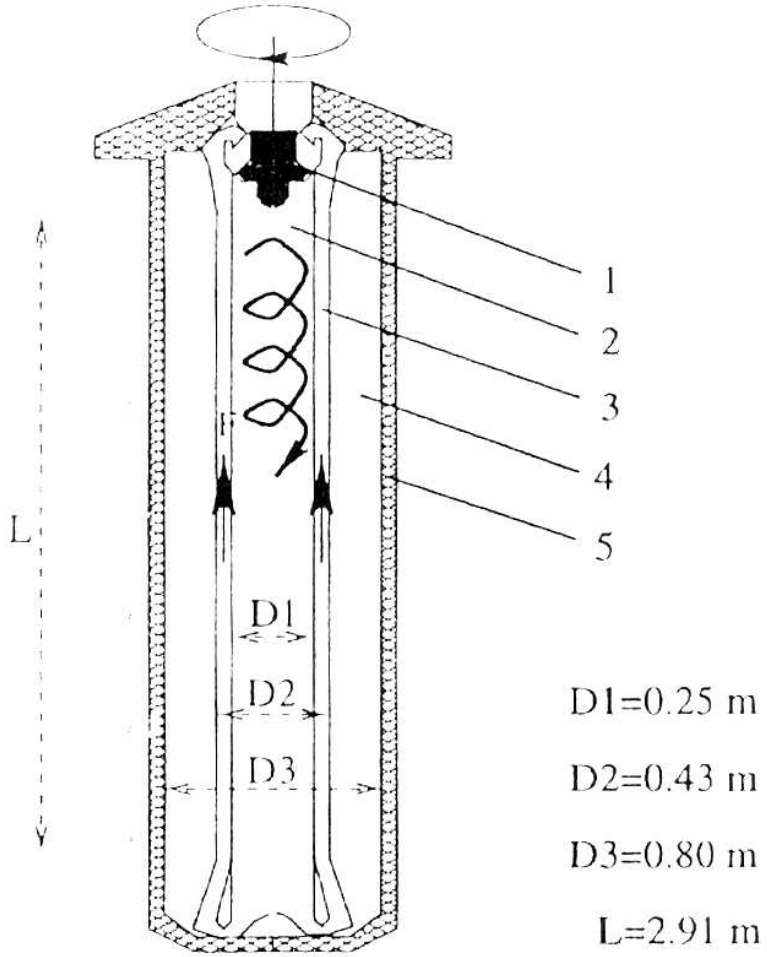

FIG. 1.8 – *Schéma de l'expérience de Riga [52]. L'écoulement hélicoïdal a lieu dans le tube central de diamètre $D1$. Dans la coquille cylindrique de diamètre extérieur $D2$ a lieu l'écoulement de retour tandis que la coquille externe de diamètre $D3$ contient un couche de sodium au repos.*

Enfin, toute une classe d'écoulements a été introduite par G.O. Roberts [13]. Il s'agit d'un ensemble périodique de cellules où la vitesse est hélicoïdale et l'hélicité est non nulle. Un exemple de champ de vitesse est en coordonnées cartésiennes $\vec{v} = (cos\, y - cos\, z, sin\, z, sin\, y)$ dont nous traçons l'allure en figure 1.9 page 32.

C'est en étudiant ce type d'écoulements qu'ont été calculés les premiers modèles d'effet alpha. La nature hélicitaire de l'écoulement dans chaque cellule est à la source du mécanisme d'instabilité et les dynamos sont de type alpha-alpha. L'autre groupe expérimental ayant observé l'instabilité dynamo a utilisé un écoulement inspiré de ce modèle [51]. Il est localisé dans un réseau de tubes agencés de manière à imiter l'écoulement de Roberts et nous donnons un schéma de l'expérience en figure 1.10.

Ces trois exemples sont parmi les premiers modèles générateurs d'effet dynamo et ont inspiré des réalisations expérimentales. Il en existe d'autres comme la dynamo à deux anneaux de Gailitis, qui est détaillée dans [17], ainsi que de nombreuses études numériques, comme celle de Dudley et James qui étudie divers écoulements localisés dans une sphère [24]. Nous avons choisi de présenter les trois exemples qui sont à la fois les plus simples en ce qui concerne leur modélisation analytique et les plus proches des expériences actuelles.

1.7 Quelques problèmes intéressants

L'étude de l'effet dynamo est un problème ancien et nous avons déjà parlé de l'article fondateur de Larmor qui date de 1919. De nombreuses communautés scientifiques s'y intéressent. Les géophysiciens ont été parmi les premiers car le champ magnétique est une des rares sources d'information sur la structure interne de la terre. Les astrophysiciens l'étudient pour des raisons similaires et aussi car certains aspects dynamiques de l'évolution des astres sont supposés être reliés à la présence de champ magnétique.

Les hydrodynamiciens, et plus particulièrement la communauté de la turbulence, s'y intéressent, par exemple pour la génération et la saturation d'un champ magnétique par la turbulence ou pour l'effet du couplage entre le spectre de vitesse et le spectre de champ magnétique. Enfin, pour la communauté du non-linéaire, l'instabilité dynamo est un très bel exemple de bifurcation d'un champ vectoriel (le champ magnétique) forcé par un autre champ vectoriel (le champ de vitesse). La dynamique chaotique présentée par le champ terrestre montre la pertinence d'une approche du problème par des techniques de physique non-linéaire.

Un problème similaire concerne la convection thermique. Il s'agit de la bifurcation d'un champ vectoriel (la vitesse) forcé par un champ scalaire (la température). Les comportements et les variations possibles des champs sont extrémements variés [25]. Citons aussi le problème de la formation de dunes granulaires au fond d'un écoulement fluide. Cela peut être vu comme la bifurcation d'un champ vectoriel (la vitesse dans le milieu granulaire) forcé par un autre champ vectoriel (la vitesse dans le fluide). Dans ce cas, le couplage est limité à l'interface grains-liquide. L'instabilité dynamo est au moins du même degré de complexité et les paramètres de contrôle peuvent être très nombreux si nous prenons en compte les effets existant dans les objets stellaires comme la précession, la convection thermique, la convection chimique....

Par ailleurs, la réalisation récente d'expériences de magnéto-hydrodynamique et la mise en évidence de l'effet dynamo ont accru l'intérêt de ce problème car elles permettent de confronter les mesures expérimentales aux très nombreuses prédictions théoriques.

Dans les chapitres à venir, nous allons aborder certains problèmes qui nous ont paru intéressants. Ils concernent d'une part la génération de champ magnétique et d'autre part la dynamique du champ créé. Nous avons tenté de mêler au maximum les résultats expérimentaux et les résultats théoriques qui modélisent les expériences ou qui aident à la conception d'expériences.

Pour développer une expérience visant à mettre en évidence l'effet dynamo, il est très important d'avoir un écoulement qui engendre du champ magnétique pour le plus petit nombre de Reynolds magnétique possible. Avec cet objectif, nous nous sommes demandés quel est l'effet sur le seuil de la mise en mouvement d'une couche conductrice située à l'extérieur de l'écoulement. Pour cela nous avons étudié analytiquement et numériquement comment le seuil d'un écoulement de Ponomarenko est changé lorsqu'une paroi externe est mise en mouvement. Par ailleurs, le rôle de la turbulence dans l'instabilité dynamo est encore peu compris. Certains modèles sont entièrement basés sur des mécanismes turbulents, mais les expériences ayant vu l'effet semblent avoir un seuil d'instabilité qui n'est pas sensible à la nature turbulente de l'écoulement. Afin de comprendre cette propriété nous avons étudié l'effet d'un composante aléatoire du champ de vitesse sur le seuil de l'instabilité.

Une fois le seuil franchi, le mécanisme de saturation du champ magnétique et l'amplitude à laquelle il va saturer est un problème très important. En effet, cela permet de comprendre quels sont les éléments pertinents pour décrire la dynamique des champs astrophysiques et des champs engendrés dans les expériences. Nous avons étudié dans le cas d'écoulements modèles comment le champ magnétique sature près du seuil d'instabilité puis, par analyse dimensionnelle, nous avons généralisé les résultats à d'autres écoulements.

Enfin, dans la mise en place d'une expérience de magnéto-hydrodynamique, il est important de tester la réponse de l'écoulement à diverses excitations, entre autre pour comprendre les mécanismes d'induction dans l'expérience. Pour cela nous avons mesuré expérimentalement la réponse à un champ extérieur appliqué pour l'écoulement de von Kármán en sodium. Nous avons développé une étude du phénomène qui permet de comprendre les mesures expérimentales et les avons comparées aux résultats obtenus théoriquement pour d'autres écoulements modèles. Nous avons ainsi pu isoler les différents mécanismes qui entrent en jeu dans l'instabilité.

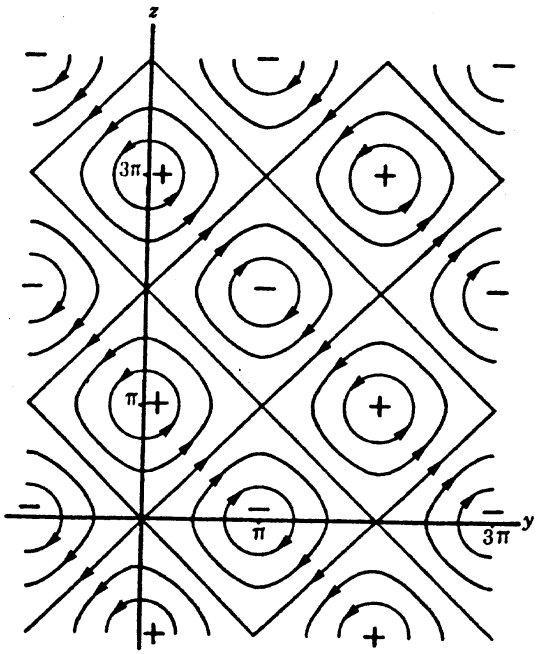

FIG. 1.9 – *Partie plane du champ de vitesse proposé par Roberts [14]. Le sens de la composante verticale de l'écoulement est représenté par + et −.*

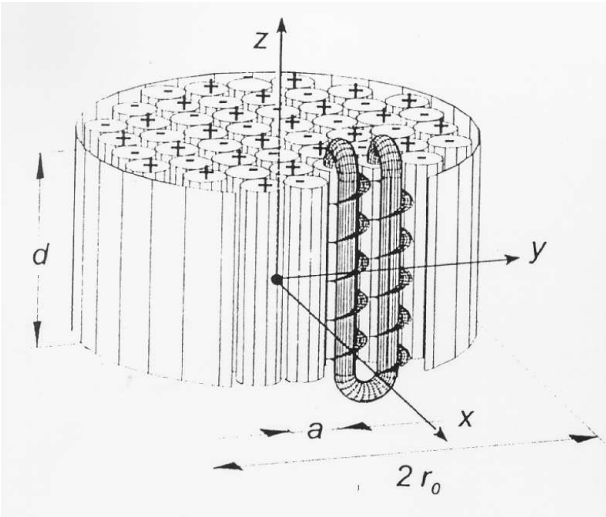

FIG. 1.10 – *Schéma de principe de l'expérience de Karlsruhe [51]. Dans deux tubes voisins, les vitesses axiales sont opposées mais les hélicités sont de même signe. Les dimensions sont* $a = 0.21\,m$, $d = 0.703\,m$ *et* $r_0 = 0.85\,m$.

Première partie

Seuil d'instabilité dynamo

Dans cette partie nous nous intéressons au seuil de l'instabilité dynamo. Nous traitons donc le problème cinématique pour lequel le champ de vitesse est fixé, indépendamment de l'éventuelle présence de champ magnétique.

Un exemple simple de dynamo est celle dite de Ponomarenko. Dans le premier chapitre, nous détaillons l'analyse linéaire faite par Ponomarenko puis nous introduisons un formalisme en terme d'opérateurs qui permet de retrouver les résultats connus et qui est utile pour tous les calculs perturbatifs réalisés ensuite. En complément de ce chapitre nous étudions un cas limite de cette dynamo pour lequel la rotation est beaucoup plus rapide que la translation. Dans cette limite nous avons montré que l'expression du mode instable est simplifiée et nous avons mis en évidence les différents mécanismes entrant en jeu dans cette instabilité.

Le second chapitre étudie l'effet du mouvement d'une couche externe sur le seuil de l'instabilité. Nous modifions la dynamo de Ponomarenko en permettant à une couche conductrice d'être mise en mouvement. L'objectif est, pour une expérience, d'utiliser le nécessaire écoulement de retour pour abaisser le seuil de l'effet dynamo. Nous calculons numériquement cet effet et comparons les résultats à une étude perturbative que nous détaillons en complément. Celle-ci diffère des développements perturbatifs classiques car le problème de base n'est pas auto-adjoint. Le seuil est effectivement modifié et peut être abaissé. L'écoulement minimisant la valeur du seuil dépend de la nature du milieu extérieur.

Enfin, le troisième chapitre concerne l'étude de l'effet de la turbulence sur le seuil d'instabilité. C'est un problème qui a gagné en intérêt avec la récente mise en évidence expérimentale de l'effet dynamo dans des écoulements contraints. Dans ce cas, les fluctuations du champ de vitesse ne sont pas de grande amplitude par rapport à l'écoulement moyen et les mesures montrent qu'elles affectent peu le seuil d'instabilité. La turbulence agit comme un bruit multiplicatif dans l'équation d'induction dont le seuil d'instabilité en l'absence de bruit est déterminé par l'écoulement moyen. A l'aide d'un développement perturbatif en l'amplitude du bruit, nous déterminons l'effet des fluctuations sur le seuil d'instabilité. En introduisant une condition de solvabilité adaptée aux systèmes bruités, nous montrons de façon générale que le terme d'ordre un en l'amplitude du bruit est nul. Dans un cas particulier, il est possible de calculer le terme suivant du développement. Il s'agit de l'écoulement de G.O. Roberts dans la limite de séparation d'échelle. C'est un exemple simple où le mécanisme de l'effet alpha est mis en évidence. Une généralisation de ce modèle à un écoulement turbulent permet d'introduire l'effet alpha dit turbulent. Ces deux exemples connus d'écoulements présentant un effet alpha sont détaillés en complément de ce chapitre. Dans le cas de la dynamo de G.O. Roberts nous avons montré que l'effet de la turbulence sur le seuil est du second ordre en l'amplitude des fluctuations turbulentes et est relié à l'hélicité des fluctuations. Si celle-ci est de même signe que celle de l'écoulement moyen, le seuil est abaissé; il est augmenté dans le cas contraire.

Chapitre 1

Problème cinématique pour la dynamo de Ponomarenko

1.1 Description

Un champ de vitesse étant donné, il s'agit de trouver quel champ magnétique peut croître. Mathématiquement, il faut trouver les solutions de l'équation d'induction

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}\,, \tag{1.1}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse du fluide et $\vec{B}$ un champ magnétique qui vérifie donc

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0\,. \tag{1.2}$$

La viscosité magnétique du fluide est $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$, σ est sa conductivité électrique et μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Nous parlerons d'effet dynamo quand la solution triviale $\vec{B} = \vec{0}$ est instable.

La recherche de ces solutions constitue le problème cinématique. Résoudre un problème cinématique revient à se donner un champ de vitesse pour l'écoulement puis à chercher s'il y aura effet dynamo et pour quelle amplitude du champ de vitesse.

Très peu d'écoulements permettent une résolution analytique de ce problème. C'est le grand intérêt de la dynamo de Ponomarenko [23],[26]. Il s'agit d'un conducteur cylindrique solide en contact avec le milieu extérieur constitué d'un métal au repos. Le cylindre métallique est en rotation solide à la vitesse angulaire ω et en translation parallèlement à son axe à la vitesse V. Il est en contact électrique avec un solide conducteur au repos (voir figure 1.1). Par soucis de simplicité, la résistivité et la perméabilité du milieu extérieur sont choisies égales à celles du liquide en mouvement.

Ce champ de vitesse n'est pas continu à la paroi du cylindre en $r = R$. Des calculs ont été faits en introduisant une dépendance de la vitesse en fonction du rayon comme cela serait le cas si l'intérieur du cylindre était constitué d'un métal liquide en écoulement tourbillonnaire [29]. Il a été montré que la discontinuité du champ n'induit pas de changement qualitatif pour le problème cinématique, sauf dans la limite de conductivité infinie

où le taux de croissance du mode instable tend vers zéro si le champ est continu (dynamo dite lente) tandis qu'il reste fini si le champ est discontinu (dynamo dite rapide) [30]. Nous avons donc choisi d'étudier un écoulement en rotation solide et translation afin que le problème cinématique soit le plus simple possible mais pour conserver l'intérêt du problème dynamique nous supposons que le cylindre est constitué de métal liquide et non de métal solide comme l'avait proposé Ponomarenko. Concrètement, il faut imaginer que le cylindre interne est creux et rempli de métal liquide. En dessous du seuil celui-ci est en rotation solide et translation tandis qu'au dessus du seuil, la force de Laplace va modifier le champ de vitesse $\vec{v}$.

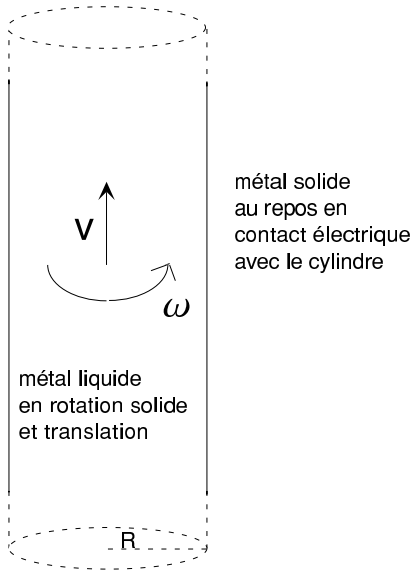

FIG. 1.1 – *Ecoulement de la dynamo de Ponomarenko*

Les équations sont adimensionnées en utilisant R comme unité de longueur, $\mu_o \sigma R^2$ comme unité de temps et $(\mu_o \sigma R)^{-1}$ comme unité de vitesse. L'équation d'induction (1.1) prend la forme

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \nabla^2 \vec{B} \,. \tag{1.3}$$

Nous avons conservé les mêmes notations pour les variables et les champs sans dimension qui seuls interviennent dans ce qui suit. Suivant le calcul de Ponomarenko, nous décomposons le champ magnétique en modes de Fourier suivant θ et z, et nous cherchons une dépendance temporelle exponentielle. C'est-à-dire $\vec{B}(\vec{r},t)$ tel que

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{b}(r) \exp\left(pt + i(m\theta + kz)\right) . \tag{1.4}$$

L'analyse de Ponomarenko (voir annexe 1.A) consiste à écrire les équations différentielles vérifiées par chacune des composantes de $\vec{b}$. La composante sur z est découplée des

deux autres et il suffit alors de résoudre le problème pour les composantes sur r et θ. Le champ complet étant ensuite obtenu en utilisant (1.2). Dans ce cas, sur chacun des intervalles (intérieur du cylindre et extérieur du cylindre) les équations sont découplées pour $b_r \pm i b_\theta$. Les solutions sont des fonctions de Bessel modifiées, solutions d'une équation de diffusion comme défini par Arfken [32]. Elles dépendent des paramètres et notamment de p. Ce sont les conditions de raccord à la paroi du cylindre qui fixent les valeurs possibles de p. Le problème cinématique revient alors à calculer pour quelles valeurs des paramètres la partie réelle de p s'annule, ce qui correspond à l'existence d'un mode neutre.

Dans le cas de la dynamo de Ponomarenko, les paramètres sont le nombre de Rossby $Rb = \frac{V}{R\omega}$ qui compare la vitesse de translation et la vitesse de rotation (c'est-à dire le champ de vitesse poloïdal et toroïdal); le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \frac{R\sqrt{(R\omega)^2+V^2}}{\eta}$ qui caractérise l'importance de l'advection du champ magnétique par rapport à la diffusion; m et k qui décrivent la structure spatiale du mode neutre et $\omega_0 = Im(p)$ qui est sa pulsation au seuil si l'instabilité s'avère être une bifurcation de Hopf.

Si tous les paramètres sont libres, le plus petit R_m pour lequel a lieu l'instabilité vaut $R_{mc} = 17.72$ pour $Rb = 1.314$, $k = -0.38$, $m = 1$, $\omega_0 = 0.410$. Le taux de croissance en fonction de l'écart au seuil vaut quant à lui $\alpha = (0.0268 + i\,0.00174)(R_m - R_{mc})$. Nous appellerons optimum ces valeurs des paramètres puisqu'elles correspondent au plus petit R_{mc} possible.

Dans ces conditions a donc lieu une bifurcation de Hopf qui engendre une onde se propageant suivant l'axe z dans la même direction que le fluide. La dépendance angulaire correspond au premier mode non axisymétrique ($m = 1$) ce qui est un compromis entre éviter que les théorèmes anti-dynamo ne s'appliquent (cas $m = 0$ où les champs de vitesse et magnétique ont un même axe de symétrie [17]) et limiter les variations spatiales pour limiter la dissipation par effet Joule. La période suivant l'axe correspond environ à deux pas de l'hélice que décrit l'écoulement. Le champ n'a donc dans ce cas pas tendance à croître sur une taille très grande par rapport à celle de l'écoulement.

Sur chacun des intervalles, les solutions sont des combinaisons linéaires de fonctions de Bessel du second type. A l'optimum nous avons tracé les composantes du champ en figure 1.2.

1.2 Formulation en terme d'opérateur

Nous allons introduire une expression en terme d'opérateur pour chercher les solutions instables. Notons que le formalisme de ce chapitre et du suivant est adapté à toutes les valeurs des paramètres, que ce soit à l'optimum ou, comme en annexe, dans la limite de forte rotation (petit Rb).

Nous partons de l'équation d'induction (1.3), que nous pouvons écrire à l'aide d'un opérateur $\mathcal{L}$ dont nous cherchons le noyau

$$\mathcal{L}\vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = 0\,. \tag{1.5}$$

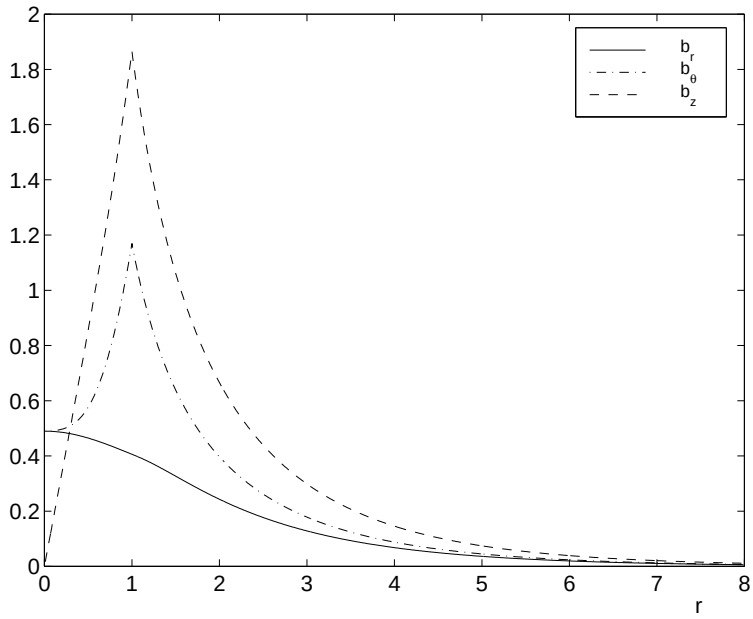

FIG. 1.2 – *Mode instable de la dynamo de Ponomarenko. Valeur absolue des composantes du champ en fonction de r.*

Compte-tenu de la nature de l'écoulement, il faut traduire soigneusement la discontinuité de vitesse en R. Il apparaît ainsi des termes delta de Dirac qui ne sont autres que les conditions de raccord du champ à la frontière du cylindre. Pour un mode neutre du champ magnétique qui a une dépendance du type

$$\vec{b_p}(r) \exp i(\omega_0 t + m\theta + kz)\,, \tag{1.6}$$

l'expression de $\mathcal{L}$ peut être simplifiée. Plus précisément la dépendance radiale du champ magnétique vérifie

$$\mathcal{L}_r \vec{b_p} = i(\omega_0 + \mu\Gamma(1-r))\vec{b_p} - \Delta\vec{b_p} + \mathcal{C}_l\,\vec{b_p} = 0\,, \tag{1.7}$$

où $\mu = m\omega + kV$ est relié à la vitesse de l'écoulement. μ est sans dimension tout comme V et ω à ce stade du calcul. Son expression en fonction des vitesses dimensionnées du cylindre V_d et ω_d est $\mu = (\mu_0\,\sigma\,R^2)(m\omega_d + kV_d)$. $\Gamma(s)$ est la fonction "marche d'escalier" qui est nulle si s est négatif et vaut un si s est positif. Notons que $\mathcal{L}_r$ est la restriction de $\mathcal{L}$ pour des champs magnétiques ayant la dépendance (1.6). Comme nous ne considérons que de tels champs, nous confondrons les deux notations, notamment lors du calcul de l'opérateur adjoint.

L'opérateur Δ vient du terme de dissipation dans l'équation d'induction et vaut

$$\Delta = \begin{pmatrix} l. - \frac{1}{r^2} & -\frac{2im}{r^2} & 0 \\ \frac{2im}{r^2} & l. - \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & l. \end{pmatrix}\,, \tag{1.8}$$

où l est un opérateur défini par

$$l.f = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2\right) f\,. \tag{1.9}$$

Les termes non diagonaux de l'opérateur sont la source du couplage entre les champs radiaux et azimutaux: c'est l'effet alpha qui n'existe dans ce cas que si la viscosité magnétique est non nulle donc si la dissipation Joule est non nulle .

Quant à $\mathcal{C}_l$, il traduit les conditions aux limites et s'écrit

$$\mathcal{C}_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r\omega\delta(r-1) & 0 & 0 \\ V\delta(r-1) & 0 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{1.10}$$

Son expression est intéressante car elle traduit clairement que les conditions aux limites couplent les champs suivant θ et z au champ suivant r. La discontinuité des dérivées radiales du champ magnétique suivant θ et z apparaît ainsi comme un terme proportionnel à B_r et créé à la frontière du cylindre, où est localisée la rotation différentielle: c'est l'effet oméga.

Nous avons donc une description de l'instabilité en terme d'un opérateur dont le noyau est le mode instable. Bien évidemment, cette description est tout-à-fait cohérente avec l'analyse linéaire de Ponomarenko et, en intégrant l'équation (1.7) sur une largeur infinitésimale centrée en R, nous retrouvons les conditions de raccord du champ à la paroi dont se déduit le critère d'instabilité de Ponomarenko (voir le prochain complément).

1.3 Problème adjoint

Pour introduire l'opérateur adjoint il faut en premier lieu définir un produit scalaire sur l'espace des champs vectoriels. A priori n'importe quel produit scalaire peut être choisi mais le plus naturel est de choisir l'intégrale du produit scalaire local (à une constante multiplicative près qui dépend du nombre de périodes sur z et t sur lesquelles a lieu l'intégration).

Pour des champs $\vec{B_a}$ et $\vec{B_b}$ ayant la dépendance spatio-temporelle de (1.6), nous définissons

$$\langle B_a|B_b\rangle = \int_0^\infty \vec{b}_a^*(r)\cdot\vec{b}_b(r)\; rdr\,. \tag{1.11}$$

Il ne reste alors qu'à calculer l'adjoint de $\mathcal{L}$ défini par

$$\langle B_a|\mathcal{L}B_b\rangle = \left\langle \mathcal{L}^\dagger B_a|B_b\right\rangle\,. \tag{1.12}$$

Après de simples intégrations par parties, il vient

$$\mathcal{L}^\dagger\vec{C} = -i(\omega_0 + \mu\Gamma(1-r))\vec{C} - \Delta\vec{C} + \mathcal{C}_l^\dagger\vec{C} \tag{1.13}$$

où

$$\mathcal{C}_l^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & r\omega\delta(r-1) & V\delta(r-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

L'opérateur traduisant les conditions aux limites du problème adjoint n'est autre que le transposé de celui du problème initial. Mis à part ce dernier terme, l'adjoint peut être obtenu en faisant les changements $\mu \to -\mu$ et $\omega_0 \to -\omega_0$, c'est-à-dire en changeant le signe du temps. Mais il faut tenir compte des conditions aux limites et celles-ci changent complètement entre le problème direct et l'adjoint. En effet, la composante du champ suivant z n'est plus couplée aux deux autres composantes et elle obéit à une équation de Bessel de type diffusif sans terme source, avec conditions aux limites de nullité en l'infini et bornée en zéro. Elle est donc strictement nulle. Le noyau du problème adjoint n'a donc pas de composante suivant z, il n'est même pas à divergence nulle. C'est-à-dire qu'il ne représente pas un champ magnétique! Nous sommes donc en présence d'un cas assez original où le problème adjoint est d'une nature totalement différente du problème direct, comme l'avait supposé Roberts [33]. Il serait intéressant de regarder si cette propriété persiste pour des écoulements plus réguliers afin de voir si cet effet est lié à la discontinuité de vitesse à la paroi ou s'il est réminiscent du problème dynamo.

Quoiqu'il en soit, pour notre écoulement, nous pouvons maintenant calculer précisément le noyau du problème adjoint. Dans le cas de l'optimum nous l'avons tracé en figure (1.3).

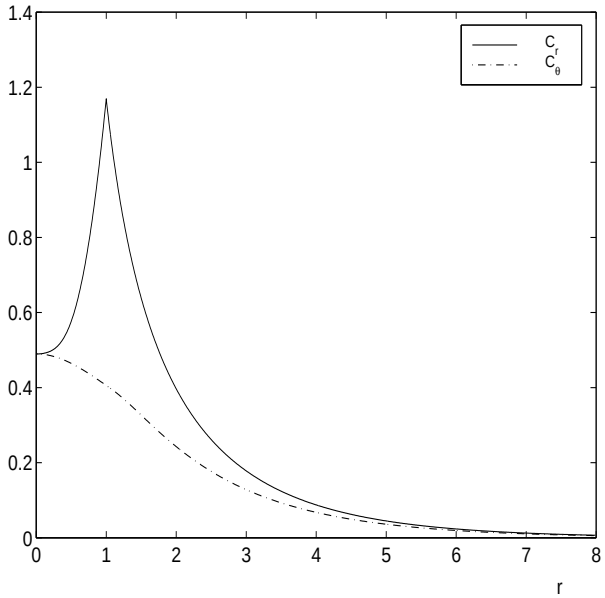

FIG. 1.3 – *Noyau du problème adjoint à l'optimum. Valeur absolue des composantes suivant r et θ, la composante suivant z est nulle.*

Compléments

1.A L'analyse de Ponomarenko

L'analyse linéaire de Ponomarenko consiste à chercher les champs de la forme (1.4) vérifiant l'équation d'induction (1.3) sur chacun des sous-espaces (à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre). Ce sont les conditions de raccord à la paroi qui donnent le lien entre le taux de croissance p et les divers paramètres m, k, Rb, R_m.

Comme $\vec{B}$ est à divergence nulle, nous avons

$$\frac{1}{r}\frac{d(rb_r)}{dr} + \frac{im}{r}b_\theta + ikb_z = 0\,. \tag{1.15}$$

Il suffit donc de calculer b_r et b_θ pour obtenir l'intégralité du champ. En outre, sur chacun des sous espaces les équations sont découplées pour $b_\pm = b_r \pm ib_\theta$ qui vérifient

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{db_\pm}{dr}\right) - \left(\frac{(m\pm 1)^2}{r^2} + (k^2 + p + i\mu\Gamma(1-r))\right)b_\pm = 0. \tag{1.16}$$

Nous reconnaissons les équations de Bessel de type diffusif dont les solutions sont $I(n,x)$ et $K(n,x)$ (comme défini par Arfken [32]). Plus précisément pour

$$r \leq 1 \quad b_\pm = A_\pm \frac{I(m\pm 1,qr)}{I(m\pm 1,q)} \text{ avec } q^2 = p + k^2 + i\mu\,, \tag{1.17}$$

$$r \geq 1 \quad b_\pm = B_\pm \frac{K(m\pm 1,sr)}{K(m\pm 1,s)} \text{ avec } s^2 = p + k^2\,. \tag{1.18}$$

Le choix de la solution I (resp. K) pour $r \leq 1$ (resp. $r \geq 1$) vient de ce que les champs ne doivent pas diverger en zéro (resp. à l'infini).

A ce stade nous avons quatre inconnues $A_\pm$ et $B_\pm$. En écrivant quatre relations de continuité à la paroi, nous obtenons quatre équations linéaires qui ne peuvent avoir de solutions non trivialement nulles que si le déterminant du système est nul. Nous appelons "critère de Ponomarenko" cette dernière condition qui donne le lien entre p et les autres paramètres.

Les équations de Maxwell imposent à $\vec{B}$ d'être continu. En effet, le champ est à divergence nulle donc la composante normale à la paroi (b_r) est continue. Par ailleurs, la perméabilité est constante donc les composantes tangentielles de $\vec{B}$ (ici b_θ et b_z) sont continues tout comme celles de $\vec{H}$. Nous en déduisons que $b_\pm$ est continu donc $A_\pm = B_\pm$.

Comme $\vec{B}$ est continu, il vient de (1.15) que $\frac{db_r}{dr}$ est continu. Enfin, la continuité de la composante tangentielle du champ électrique nous permet de trouver une nouvelle relation qui est la continuité de $\frac{db_\theta}{dr} + v_\theta b_r$.

L'existence de solutions en $A_\pm$ non nulles à ces deux dernières équations requiert la nullité du "critère de Ponomarenko"

$$R^+R^- = \frac{i\omega}{2}(R^+ - R^-)\,, \tag{1.19}$$

où $R^\pm = q\frac{I'(m\pm1,q)}{I(m\pm1,q)} - s\frac{K'(m\pm1,s)}{K(m\pm1,s)}$.

La résolution numérique de cette équation permet de trouver le seuil d'instabilité. La racine du critère de Ponomarenko comme fonction de p donne une équation reliant p aux différents paramètres $p = \Phi(R_m,Rb,k,m)$. Au seuil la condition $Re(p) = 0$ donne le nombre de Reynolds magnétique critique $R_{mc} = \Psi(Rb,k,m)$. En faisant varier les trois paramètres nous pouvons trouver le minimum de cette fonction. C'est ce que nous appelons optimum, puisqu'il correspond au plus petit R_{mc} possible. Dans le paragraphe suivant, nous envisageons un écoulement pour lequel Rb est fixé; les valeurs des différents paramètres au seuil sont alors des fonctions de Rb.

Certains résultats semblent être généraux. Le mode instable a toujours une dépendance angulaire $m = 1$, ce qui est un compromis entre éviter que les théorèmes anti-dynamo ne s'appliquent ($m = 0$) et minimiser la dissipation Joule qui augmente quand les variations spatiales augmentent. La dépendance en k correspond à des longueurs d'onde suivant z de l'ordre du pas de l'écoulement, le champ n'a pas tendance à croître sur une échelle supérieure à celle de l'écoulement. La bifurcation est une bifurcation de Hopf car la pulsation du mode neutre n'est pas nulle. Le champ créé a donc une dépendance temporelle oscillatoire. Cela est lié à la nature du mode instable qui a une dépendance spatiale périodique parallèlement à l'axe z du cylindre. Comme le champ de vitesse brise la symétrie entre les deux directions $z \leq 0$ et $z \geq 0$, il est naturel que le mode instable ait tendance à se déplacer parallèlement à l'axe.

1.B Limite de petit nombre de Rossby

Le calcul de Ponomarenko permet d'obtenir les valeurs des paramètres qui donnent le plus petit R_{mc}. Mais nous pouvons imaginer une réalisation expérimentale d'un écoulement proche de celui de Ponomarenko dans lequel les vitesses de rotation et de translation sont fixées indépendamment.

Le nombre de Rossby $Rb = \frac{V}{R\omega}$ est alors fixé à une valeur ne correspondant pas forcément à celle de l'optimum. Bien évidemment le seuil d'instabilité est plus élevé. Lorsque la rotation est bien plus rapide que la translation c'est-à-dire dans la limite des petits nombres de Rossby, le problème est simplifié.

Nous avons utilisé l'analyse linéaire de Ponomarenko en développant les fonctions de Bessel lorsque leur argument est grand. Pour $Rb \ll 1$ nous avons obtenus les comporte-

ments asymptotiques suivants:

$$R_{mc} = 4\sqrt{2}Rb^{-3} \tag{1.20}$$
$$\omega_o = \sqrt{3}Rb^{-2} \tag{1.21}$$
$$k_c = -Rb^{-1} \tag{1.22}$$
$$\mu \ll \omega_o \tag{1.23}$$

En diminuant Rb, le vecteur d'onde du mode instable croît et à l'échelle du champ magnétique le champ de vitesse continue à paraître tridimensionnel. Ainsi la période spatiale sur l'axe reste comparable au pas de l'hélice décrit par l'écoulement et, là encore, le champ magnétique n'a pas tendance à croître sur une taille grande devant celle du champ de vitesse. Enfin, le seuil diverge quand Rb est égal à 0, puisque l'écoulement devient plan et que le théorème des écoulements plans (Zeldovich) [17] interdit alors la génération de champ magnétique.

Afin de contrôler la validité de notre développement, nous avons tracé simultanément les résultats obtenus par résolution numérique des équations de Ponomarenko et ceux donnés par ce développement asymptotique (voir figure 1.4). L'accord entre la résolution

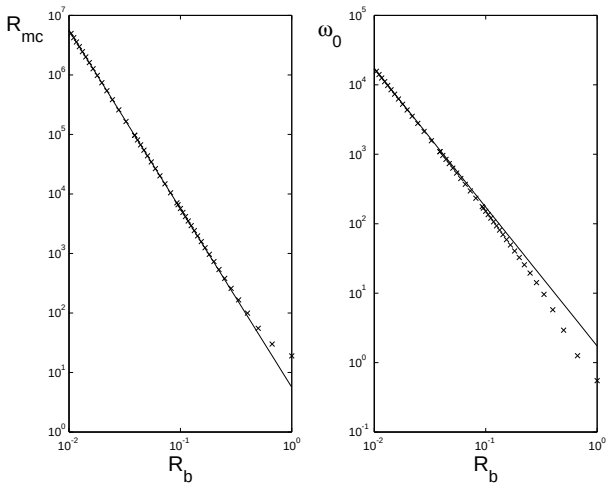

FIG. 1.4 – *Nombre de Reynolds magnétique critique et pulsation au seuil en fonction du nombre de Rossby. En trait continu: développement asymptotique; en croix noires: résolution numérique. Les échelles sont logarithmiques.*

numérique et le développement asymptotique est très bon même pour des valeurs de Rb proches de l'unité.

Les expressions des champs elles-mêmes sont simplifiées. En posant $q = \sqrt{2}e^{i\pi/6}Rb^{-1}$,

nous avons à l'intérieur du cylindre

$$\begin{aligned} r &\leq 1 \\ b_r &= \frac{1}{2}\left(\frac{I(2,qr)}{I(2,q)} - \frac{I(0,qr)}{I(0,q)}\right) - \frac{1}{q^2}\frac{I(0,qr)}{I(0,q)}\,, \\ b_\theta &= \frac{1}{2i}\left(\frac{I(2,qr)}{I(2,q)} + \frac{I(0,qr)}{I(0,q)}\right) + \frac{1}{iq^2}\frac{I(0,qr)}{I(0,q)}\,, \end{aligned} \tag{1.24}$$

et à l'extérieur du cylindre

$$\begin{aligned} r &\geq 1 \\ b_r &= \frac{1}{2}\left(\frac{K(2,qr)}{K(2,q)} - \frac{K(0,qr)}{K(0,q)}\right) - \frac{1}{q^2}\frac{K(0,qr)}{K(0,q)}\,, \\ b_\theta &= \frac{1}{2i}\left(\frac{K(2,qr)}{K(2,q)} + \frac{K(0,qr)}{K(0,q)}\right) + \frac{1}{iq^2}\frac{K(0,qr)}{K(0,q)}\,, \end{aligned} \tag{1.25}$$

Connaissant ces champs, le calcul de b_z est effectué à partir de $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. En figure 1.5, nous avons tracé l'allure des composantes du champ magnétique pour différents Rb.

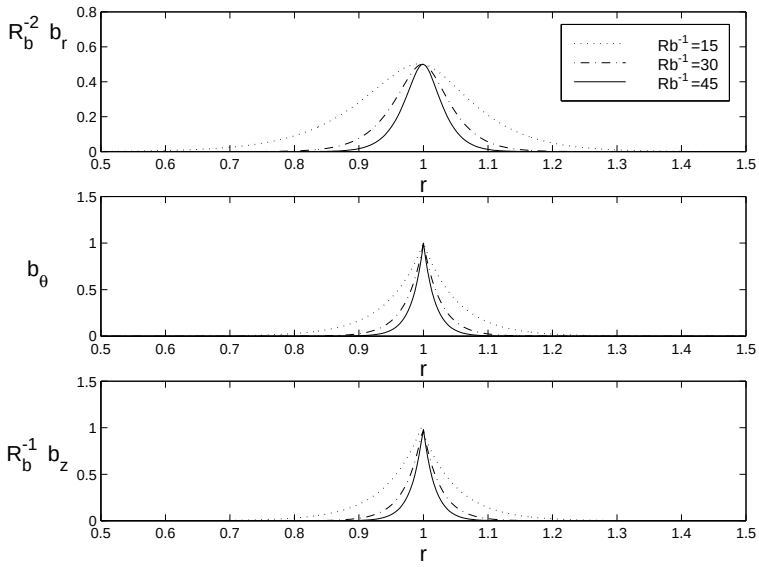

FIG. 1.5 – *Valeurs absolues des composantes du champ en fonction de r pour différents Rb.*

Il apparaît que le champ se localise au niveau de la paroi, les composantes suivant r (resp. z) y sont proportionnelles à Rb^2 (resp. Rb), tandis que le champ suivant θ y est indépendant de Rb. Les amplitudes relatives des différentes composantes peuvent être déduites des différents mécanismes de génération du champ magnétique (voir figure 1.6). L'effet oméga est lié à la rotation différentielle qui existe à la paroi. Ainsi la conversion du

champ magnétique radial en champ magnétique azimutal (resp. axial) est proportionnelle à la vitesse azimutale (resp. axiale). Il y a donc un facteur Rb^{-1} entre ces deux composantes du champ. Dans la limite de petit Rb, il y a création de champ radial à partir du champ azimutal et proportionnellement à Rb^2 comme le montrent les équations (1.7, 1.8).

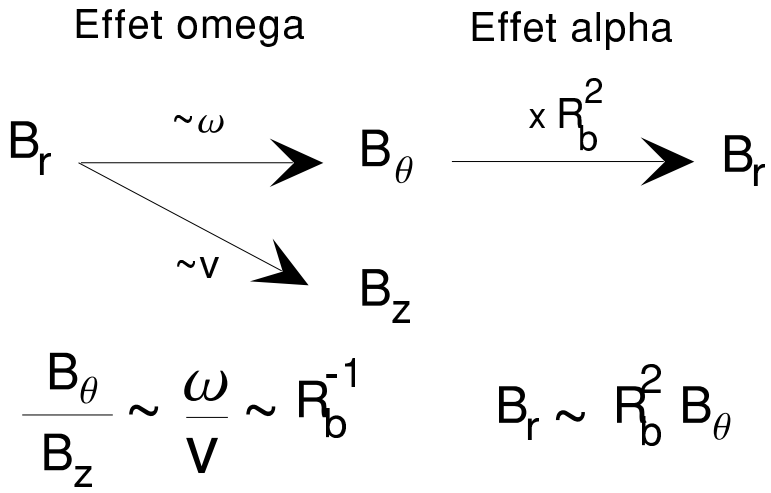

FIG. 1.6 – *Mécanismes de couplage et amplitudes relatives des différentes composantes du mode instable dans la limite de forte rotation.*

Chapitre 2

Effet de la mise en mouvement d'une couche externe sur le seuil de la dynamo de Ponomarenko

Pour un écoulement engendrant du champ magnétique par effet dynamo, la compréhension de la dépendance de la valeur du seuil en fonction des paramètres du problème est très importante. D'un point de vue théorique, elle donne des indications sur le mécanisme de l'instabilité. D'un point de vue expérimental, il est crucial de réaliser l'écoulement ayant le seuil d'effet dynamo le plus bas possible.

Plusieurs aspects ont déjà été étudiés pour la dynamo de Ponomarenko ou des dynamos basées sur des écoulements similaires. Pour développer leur expérience, Gailitis et al. ont ajusté la forme des turbines entraînant l'écoulement à l'aide de mesures en eau et d'un code numérique de dynamo cinématique. Ils ont pu ainsi choisir les turbines qui produisent un écoulement engendrant l'effet dynamo à des vitesses réalisables expérimentalement. Dans le contexte de l'étude du mécanisme de l'instabilité à très haut nombre de Reynolds magnétique, Ruzmaikin et al. [29] ont étudié comment varie asymptotiquement le taux de croissance de l'instabilité lorsque la vitesse de l'écoulement est hélicoïdale et sans discontinuité aux parois. Ils ont montré que ce taux de croissance tend vers zéro quand le nombre de Reynolds magnétique tend vers l'infini. Kaiser et Tilgner [64] ont, pour la dynamo de Ponomarenko, étudié l'effet sur le seuil de la présence d'une couche de liquide conducteur au repos entourant la zone où a lieu l'écoulement. La valeur du seuil en fonction du rayon de la couche externe passe par un minimum et croît ensuite. Enfin, dans le même esprit, Marié [50] s'est intéressé à l'effet sur le seuil de la présence d'une couche extérieure composée d'un liquide de conductivité électrique variable. Si la conductivité de la couche est augmentée, le seuil de la dynamo est abaissé.

Nous nous sommes intéressés à la présence d'une couche extérieure pouvant être mise en mouvement, tandis que l'écoulement central reste celui de Ponomarenko: rotation solide et translation. Expérimentalement, la réalisation d'un écoulement hélicoïdal nécessite de prévoir une circulation de retour du fluide et il peut être intéressant d'ajuster ses caractéristiques si elles permettent d'abaisser le seuil. Par ailleurs, en localisant

l'écoulement en deux zones, nous réalisons une séparation d'échelle radiale entre celle où a lieu l'écoulement et celle où peut croître le champ magnétique, ce qui est dans certains cas favorable à l'effet dynamo. De façon similaire nous pouvons nous demander comment varie le seuil en fonction de l'hélicité de l'écoulement et s'il existe un principe générique qui permette de minimiser le seuil en jouant sur l'hélicité.

En figure 2.1, nous schématisons l'écoulement que nous avons étudié. Il est composé de trois parties. Le milieu 1, pour $r \leq r_1$, est en rotation solide et translation. Le milieu 3, pour $r \geq r_2$, sera au choix un isolant ou un milieu conducteur au repos de même conductivité et même perméabilité que les autres milieux. La seconde couche, $r_1 \leq r \leq r_2$, est constituée du même métal que le milieu 1. Nous avons étudié d'une part l'effet créé par la mise en rotation de cette couche. D'autre part nous avons étudié le cas où le fluide circulant dans le milieu 1 revient dans le milieu 2. La conservation du débit relie les deux vitesses axiales par la loi

$$v_2 = -\frac{v_1\, r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\,. \tag{2.1}$$

Indépendamment de cette contrainte, il est possible de mettre en rotation la seconde couche. Les équations sont adimensionnées comme pour l'équation 1.3 page 38 en utilisant r_1 comme unité de longueur, $\mu_0\, \sigma\, r_1^2$ comme unité de temps et $(\mu_0\, \sigma\, r_1)^{-1}$ comme unité de vitesse.

2.1 Calcul du seuil

2.1.1 Principe de la résolution

L'objectif est de trouver quel mode du champ magnétique est instable et pour quelles valeurs des paramètres décrivant l'écoulement. La technique employée consiste à résoudre analytiquement l'équation d'induction en cherchant des modes propres du champ magnétique vérifiant

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = p\, \vec{B}\,. \tag{2.2}$$

Les diverses conditions aux limites fixent p en fonction du nombre de Reynolds magnétique et des différents paramètres x_i qui décrivent l'écoulement (rapport entre la vitesse axiale et la vitesse azimutale, taille de la couche....) et la structure du mode instable (longueur d'onde, dépendance azimutale). De façon générale, le champ magnétique solution des équations existe pour certaines valeurs de p qui vérifient une équation

$$F(\, p, R_m, x_i) = 0\,. \tag{2.3}$$

Il faut alors chercher pour quelle valeur critique du nombre de Reynolds magnétique R_{mc}, un mode devient instable ce qui se traduit par l'annulation de la partie réelle de p.

2.1.2 Conditions aux limites entre les différents milieux

En résolvant l'équation d'induction, nous cherchons des solutions pour le champ magnétique qui ne divergent pas en un point de l'espace. En outre, les écoulements considérés sont localisés à l'intérieur de la surface $\mathcal{S}$ qui englobe les milieux 1 et 2. L'extérieur est alors un milieu différent: le vide ou un métal au repos. Il est naturel d'imposer la décroissance vers zéro du champ lorsque nous nous éloignons à l'infini à l'extérieur de la surface $\mathcal{S}$.

Il faut donc résoudre l'équation du champ magnétique à l'intérieur des trois milieux. Les solutions sont calculées à l'aide de constantes d'intégration dont les valeurs sont reliées par les conditions de raccord des champs à la paroi. Celles-ci se déduisent des équations de Maxwell. De $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, nous déduisons que la composante de $\vec{B}$ normale à la paroi est continue. De l'équation de Maxwell-Ampère nous déduisons que les composantes de $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ tangentes à la paroi sont continues. Si les deux milieux ont même perméabilité magnétique, le champ $\vec{B}$ est donc continu. De l'équation de Maxwell-Faraday, il vient que les composantes tangentielles de $\vec{E}$ sont continues. Si les deux milieux sont des conducteurs de viscosité magnétique η, nous en déduisons que les composantes tangentielles de $\eta \nabla \times \vec{B} - \vec{v} \times \vec{B}$ sont continues.

Si le milieu 3 est un métal de viscosité magnétique η, la recherche de solutions ayant la dépendance temporelle de l'équation 2.2 consiste à résoudre dans chaque milieux $\eta \nabla^2 \vec{B} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = p\,\vec{B}$. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires

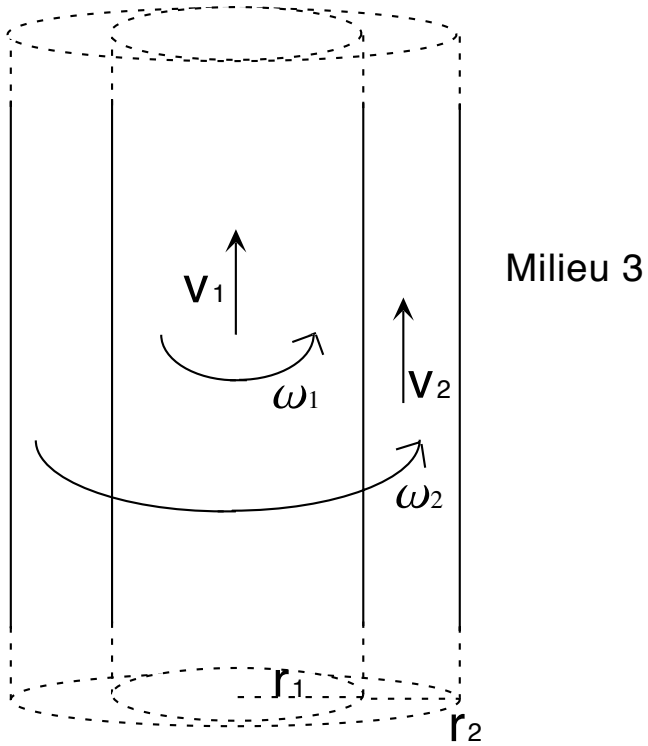

FIG. 2.1 – *Ecoulement de Ponomarenko avec couche en rotation et translation.*

dont les solutions s'expriment en fonction de p et de constantes d'intégration. Dans chaque milieu, une première relation existe entre ces constantes puisque le champ est à divergence nulle. A l'aide des conditions de raccord se déduisent quatre autres relations au niveau des parois.

Si le milieu extérieur est le vide, $\vec{B}$ y est solution de $\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$ et $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Il s'agit des mêmes équations que celles du champ électrique dans le vide. Il est possible d'introduire un potentiel scalaire V tel que $\vec{B} = -\nabla V$ et V est solution de $\Delta V = 0$. La valeur de $\vec{B}$ à l'extérieur est déterminée par celle du champ scalaire V à la paroi. Notons que le temps n'intervient pas dans ces équations et qu'il est encore possible de chercher des solutions en $\vec{B} \propto e^{p\,t}$. Dans le même esprit que précédemment, de la continuité de $\vec{B}$ se déduisent des conditions à la paroi qui prescrivent la valeur de p.

Dans les deux cas, les conditions aux limites se traduisent par un système d'équations dont les inconnues sont les constantes d'intégration. L'existence de solutions non nulles à ce système requiert la nullité du déterminant du système, ce qui aboutit à la relation 2.3.

2.1.3 Résolution

Nous avons donc une relation analytique $F(p,R_m,x_i) = 0$ reliant p aux paramètres du problème. Cette relation définit p comme une fonction implicite des paramètres $p = g(R_m,x_i)$. En général cette fonction n'est pas analytique, c'est pourquoi nous allons essayer de traduire les conditions sur g en des conditions sur F.

Les paramètres étant fixés, le seuil est donné par la plus petite valeur de R_m telle que la partie réelle de p soit nulle. En posant $p = i\,\omega_0$, il s'agit de trouver la pulsation ω_0 et le nombre de Reynolds magnétique critique R_{mc} tels que $F(i\,\omega_0,R_{mc},x_i) = 0$. La partie réelle et la partie imaginaire de cette égalité donnent un système de deux équations à deux inconnues qui peuvent être résolues numériquement. En variant ensuite les paramètres x_i nous pouvons déterminer les variations du seuil $R_{mc}(x_i)$ en fonction de ces paramètres.

Par ailleurs, nous avons mis au point une technique perturbative qui permet de calculer la variation de la valeur du seuil R_{mc} et de la pulsation ω_0 lorsqu'est modifié légèrement un paramètre de l'écoulement. Sachant résoudre le problème de Ponomarenko dans le cas où l'extérieur est constitué d'un seul milieu conducteur au repos, nous pouvons traiter la mise en mouvement de la couche du milieu 2 comme une perturbation. Cela permet de prédire analytiquement la modification du seuil et de comparer aux résultats du calcul numérique dans la limite de faible vitesse. Cette technique est présentée en annexe.

2.2 Résultats

2.2.1 Milieu extérieur isolant

Dans ce cas nous allons utiliser l'invariance du problème par rotation et translation. Le taux de croissance p est une fonction des paramètres du problème et nous notons

$$p = f_p(v_1, \omega_1, v_2, \omega_2, k, m, r_2)\,, \tag{2.4}$$

tel que $\vec{B}(r,\theta,z,t) = \vec{b}(r)\,\exp\left[i(m\,\theta + k\,z) + p\,t\right]$ soit solution de l'équation d'induction (1.1). Le problème est invariant par rotation (resp. translation) à vitesse constante ω_r (resp. v_r). Cela signifie qu'en transformant les coordonnées suivant

$$(r,\theta,z,t) \rightarrow (r' = r,\, \theta' = \theta - \omega_r\,t,\, z' = z - v_r\,t,\, t' = t) \tag{2.5}$$

le champ magnétique $\vec{B}(r',\theta',z',t') = \vec{b}(r')\,\exp\left[i(m\,\theta' + k\,z') + (p + i\,m\,\omega_r + i\,k\,v_r)\,t\right]$ est solution de l'équation dans le nouveau référentiel. Nous en déduisons la loi de transformation du taux de croissance

$$p' = p + \,i\,m\,\omega_r + \,i\,k\,v_r = f_p(v_1 - v_r,\, \omega_1 - \omega_r,\, v_2 - v_r,\, \omega_2 - \omega_r, k, m, r_2)\,. \tag{2.6}$$

Choisissons $\omega_r = \omega_2$ et $v_r = v_2$, c'est-à-dire plaçons nous dans le référentiel où le milieu 2 est immobile, il vient

$$p + \,i\,m\,\omega_2 + \,i\,k\,v_2 = f_p(v_1 - v_2,\, \omega_1 - \omega_2, 0, 0, k, m, r_2)\,. \tag{2.7}$$

Le seuil de l'instabilité correspond à l'annulation de la partie réelle de p donc de la partie réelle de $f_p(v_1 - v_2, \omega_1 - \omega_2, 0, 0, k, m, r_2)$. Si nous connaissons la valeur des vitesses au seuil lorsque le milieu 2 est au repos et que nous les notons v_c pour la vitesse axiale et ω_c pour la vitesse de rotation, nous en déduisons une contrainte sur la valeur des vitesses au seuil lorsque le milieu 2 est en mouvement. Nous devons avoir $v_1 - v_2 = v_c$ et $\omega_1 - \omega_2 = \omega_c$.

Nous avons choisi d'étudier l'effet sur le seuil en utilisant une définition du nombre de Reynolds basée sur l'écoulement dans le milieu 1 soit $R_m = \frac{\sqrt{v_1^2 + r_1^2\,\omega_1^2}\,r_1}{\eta}$. L'idée sous-jacente est que la mise en mouvement du milieu 2 est faite de façon indépendante de celle du milieu 1 et que c'est dans le milieu 1 que l'obtention de vitesses élevées est difficile. Cette description est pertinente par exemple quand le milieu 2 est une coquille solide tandis que le milieu 1 est un liquide et qu'il y a donc une dissipation d'énergie en volume qui limite les vitesses de l'écoulement. Nous aurions pu envisager de caractériser le seuil en construisant un nombre de Reynolds basé sur l'écoulement dans les deux milieux mais il n'y a pas de définition évidente et cela nous a paru moins adapté aux cas qui nous intéressent.

Couche en rotation

Dans ce cas v_2 est nulle et, au seuil, v_1 est fixée égale à v_c. Le minimum de R_{mc} est donc obtenu pour ω_1 nul, ce qui correspond à $\omega_2 = -\omega_c$. Il faut donc faire tourner la coquille 2 à une vitesse telle que, dans le référentiel lié à cette coquille, le milieu 1 apparaisse comme étant en rotation à la vitesse critique ω_c.

Couche en rotation et translation

Dans ce cas v_2 est non nulle et reliée à v_1 par l'équation 2.1. Au seuil il vient donc $v_1 = \frac{r_2^2 - 1}{r_2^2}\,v_c$, tandis que les vitesses de rotation ω_1 et ω_2 qui minimisent R_{mc} sont les mêmes que dans le cas précédent. En figure 2.2 nous avons tracé le nombre de Reynolds

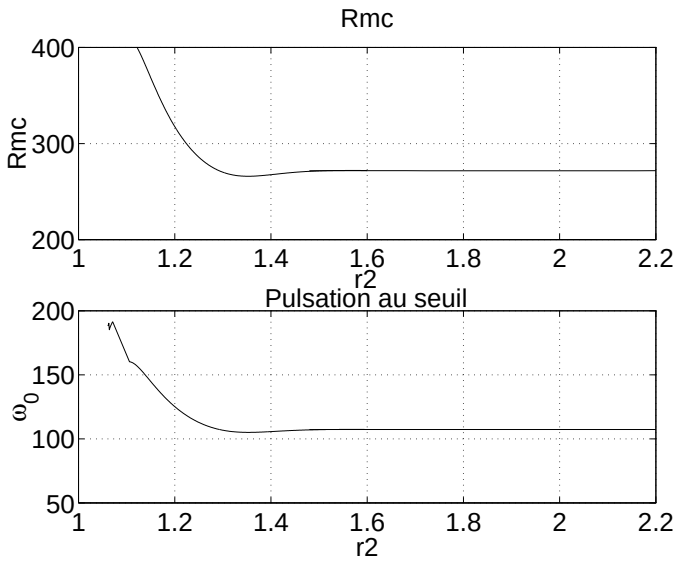

FIG. 2.2 – *Valeur du nombre de Reynolds magnétique critique R_{mc} et pulsation ω_0 au seuil en fonction de la largeur de la couche r_2 supposée au repos. Le milieu 3 est le vide.*

critique R_{mc} et la pulsation au seuil ω_0 en fonction de r_2. Afin de comparer aux résultats existants, nous avons supposé que le vecteur d'onde du mode instable est fixé à $k = -1.55$. Cette contrainte est pertinente lorsque la dépendance axiale du champ magnétique est, par exemple, déterminée par les conditions aux limites. Par ailleurs le nombre de Rossby dans le milieu 1 est fixé à $Rb = \frac{v_1}{r_1\,\omega_1} = 1$. La vitesse axiale critique v_c et radiale ω_c sont ainsi reliées de façon triviale à R_{mc} par $v_c = r_1\,\omega_c = \frac{\eta\,R_{mc}}{r_1\,\sqrt{2}}$.

Le seuil n'est pas une fonction monotone de r_2. Il atteint une valeur minimum pour $r_2 \simeq 1.35$. C'est ce que Tilgner [64] appelle une "dynamo aidée par le vide" en ce sens qu'augmenter l'épaisseur du conducteur au repos tend à faire croître le seuil. Dans ce cas l'effet reste faible et l'écart relatif entre la valeur minimale et la valeur obtenue pour une couche infiniment épaisse est inférieur à cinq pour cent. Quand l'épaisseur de la couche tend vers zéro, la valeur du seuil diverge. Ceci est responsable de l'instabilité numérique de notre calcul qui nous limite à des valeurs de $r_2 \geq 1.05$. Cette divergence du seuil est liée à l'invariance par translation du problème. Si la couche 2 est d'épaisseur nulle, le problème est celui d'une dynamo de Ponomarenko à deux milieux avec milieu extérieur isolant. Si le milieu 1 est en rotation solide et translation à la vitesse v_1, l'invariance par translation du problème implique que la partie réelle du taux de croissance est la même que celle de l'écoulement vu dans un référentiel en translation suivant l'axe à vitesse v_1. Cet écoulement est alors un écoulement plan de rotation solide et par théorème de Cowling il ne peut pas engendrer de champ magnétique par effet dynamo. La partie réelle du taux de croissance est donc négative ce qui se traduit dans le référentiel initial par l'absence d'effet dynamo.

2.2.2 Milieu extérieur conducteur

Dans ce cas, nous ne pouvons pas conclure en utilisant l'invariance de l'équation d'induction par translation et rotation à vitesse constante. Il n'est donc plus possible de se ramener au cas où le milieu 2 est au repos. Nous supposons donc pour le milieu 1 que le rapport entre la vitesse axiale et azimutale est fixé à $Rb = \frac{v_1}{\omega_1 r_1} = 0.761$ et que le vecteur d'onde du mode instable est $k = -0.388$. Ces deux valeurs correspondent à l'optimum de l'écoulement de Ponomarenko à deux milieux. La vitesse dans le milieu 1 est caractérisée par le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \frac{\sqrt{v_1^2 + r_1^2\,\omega_1^2}\,r_1}{\eta}$.

Couche en rotation

La vitesse axiale dans le milieu 2 est nulle. Numériquement, nous nous sommes limités à une dépendance azimutale du champ magnétique $m = 1$. Pour des faibles vitesses de rotation de la couche 2, il est naturel que la structure du mode instable soit semblable à celle obtenue lorsque cette couche est immobile. Par ailleurs, nous n'avons pas vu de cas où un mode de dépendance azimutale différente soit instable pour un nombre de Reynolds magnétique inférieur à celui du cas $m = 1$, mais il est difficile de vérifier ce résultat de façon exhaustive. Nous fixons l'épaisseur de la couche r_2 et pour une vitesse de rotation ω_2 fixée, nous calculons le nombre de Reynolds magnétique critique. Cela permet de traçer la courbe R_{mc} en fonction de ω_2 ce que nous avons fait en figure 2.3 (resp. 2.4) pour une valeur de $r_2 = 1.1$ (resp. $r_2 = 3$). Nous traçons aussi la valeur de la pulsation du mode instable au seuil en fonction de ω_2 ainsi que les valeurs prédites par le développement perturbatif décrit en annexe.

En faisant croître ω_2 à partir d'une valeur négative, la valeur du seuil décroît, passe par un minimum et croît ensuite. Le calcul numérique et le développement perturbatif sont en très bon accord pour de basses vitesses de rotation ce qui justifie le développement et valide la méthode numérique. La valeur de la vitesse de rotation ω_2 donnant le minimum de R_{mc} est positive. Ce comportement est très différent du cas où le milieu extérieur est isolant. Dans ce dernier cas le minimum correpond à ω_2 négatif, afin que dans le référentiel lié au milieu 2, le milieu 1 apparaisse comme étant en rotation à la vitesse critique. Ici le mécanisme est plutôt une adaptation de la vitesse de rotation pour passer de manière moins discontinue de la vitesse ω_1 dans le milieu 1 à une vitesse nulle dans le milieu 3. Simultanément l'effet omega, qui est localisé dans cet écoulement là où les vitesses sont discontinues, agit ainsi en deux endroits. Nous pouvons ensuite faire varier r_2 et nous déterminons la valeur minimale de R_{mc} et la valeur de ω_2 qui correspond. En figure 2.5 nous traçons les deux courbes $R_{mc}(r_2)$ et $\omega_2(r_2)$.

Si nous faisons croître r_2, la valeur de R_{mc} décroît, passe par un minimum et croît ensuite. La valeur de ω_2 est décroissante. Il existe donc une certaine épaisseur de la coquille 2 qui minimise la valeur du nombre de Reynolds magnétique critique. Compte-tenu de nos calculs, cette valeur n'est déterminée que très grossièrement autour de $r_2 = 1.5$. La pulsation du mode instable ω_0 est une fonction lentement décroissante de r_2.

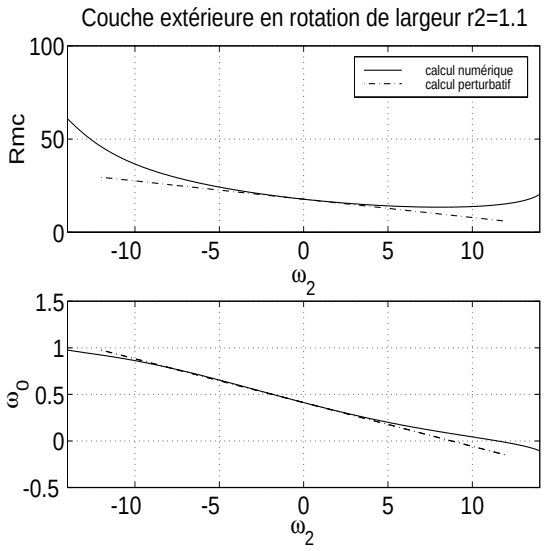

FIG. 2.3 – *Nombre de Reynolds magnétique critique R_{mc} et pulsation du mode instable ω_0 en fonction de la vitesse de rotation ω_2 pour une couche de largeur $r_2 = 1.1$. $(-)$ calcul numérique, $(-.)$ calcul perturbatif.*

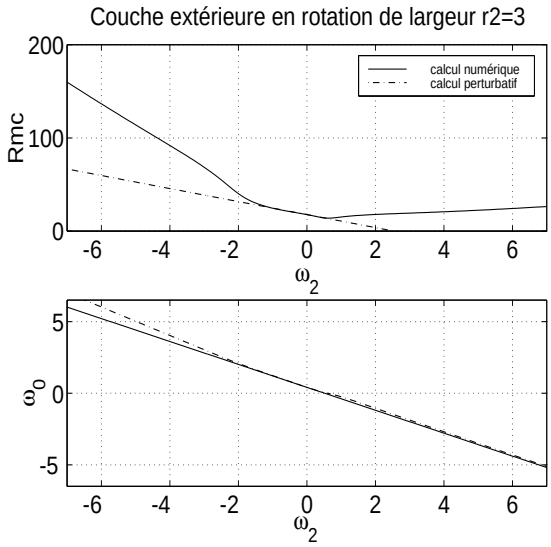

FIG. 2.4 – *Nombre de Reynolds magnétique critique R_{mc} et pulsation du mode instable ω_0 en fonction de la vitesse de rotation ω_2 pour une couche de largeur $r_2 = 3$. $(-)$ calcul numérique, $(-.)$ calcul perturbatif.*

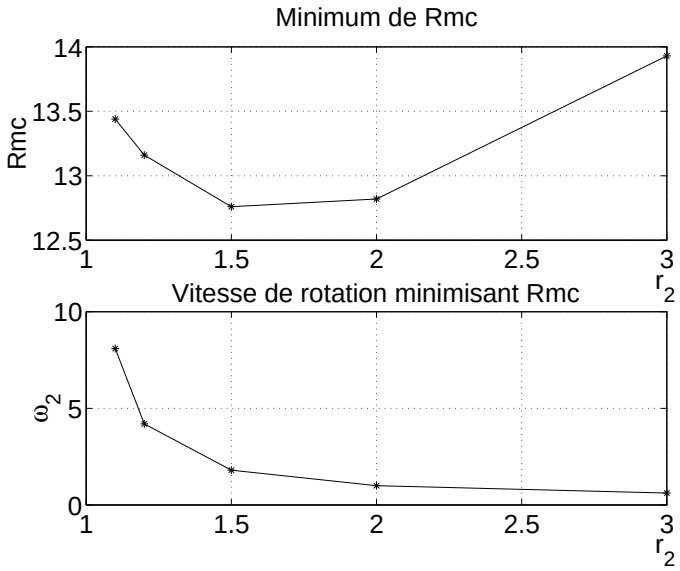

FIG. 2.5 – *Valeur minimale de R_{mc} et vitesse de rotation correspondante ω_2 en fonction de la l'épaisseur r_2 de la couche en rotation.*

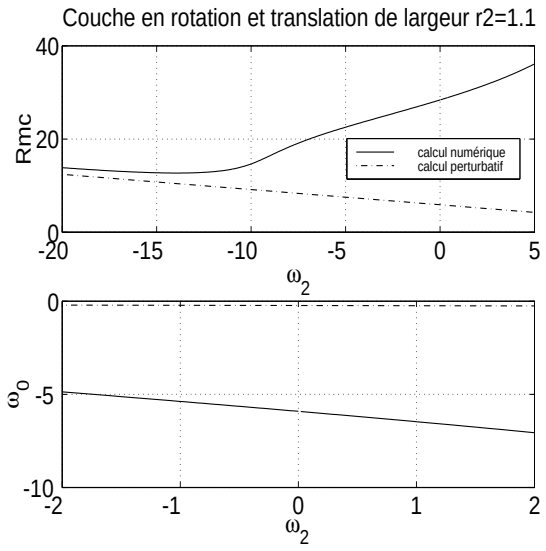

FIG. 2.6 – *Nombre de Reynolds magnétique critique R_{mc} et pulsation du mode instable ω_0 en fonction de la vitesse de rotation ω_2 pour une couche de largeur $r_2 = 1.1$ en rotation et translation. (−) calcul numérique, (−.) calcul perturbatif.*

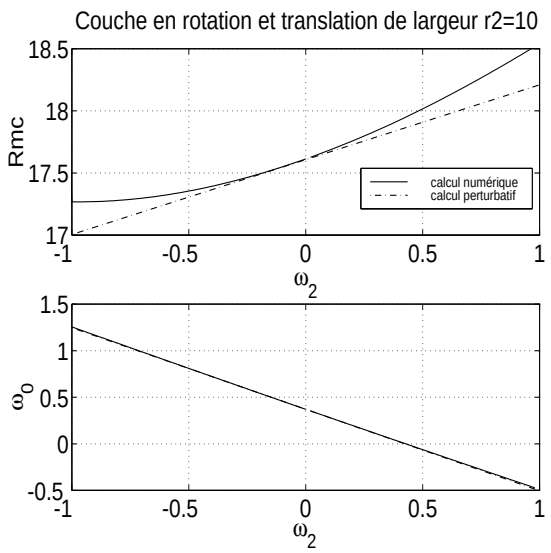

FIG. 2.7 – *Nombre de Reynolds magnétique critique R_{mc} et pulsation du mode instable ω_0 en fonction de la vitesse de rotation ω_2 pour une couche d'épaisseur $r_2 = 10$ en rotation et translation. (−) calcul numérique, (−.) calcul perturbatif.*

Couche en rotation et translation

Nous avons réalisé la même étude que précédemment en contraignant la vitesse v_2 suivant la relation 2.1. En figure 2.6 (resp. 2.7) nous traçons les valeurs du seuil R_{mc} et de la pulsation au seuil ω_0 en fonction de ω_2 pour $r_2 = 1.1$ (resp. $r_2 = 10$). Les traits pointillés correspondent au calcul perturbatif.

Comme nous l'avons détaillé en annexe, le calcul perturbatif n'est valide que pour r_2 grand, ce que nous vérifions sur ces figures. Pour chaque valeur de r_2 nous déterminons la valeur de ω_2 qui minimise R_{mc} et les traçons en figures 2.8 et 2.9.

Les résultats sont nettement différents du cas où la couche 2 est uniquement en rotation. Le seuil croît en fonction de l'épaisseur de cette couche r_2. La valeur de ω_2 qui minimise le seuil est négative et devient très grande si r_2 tend vers 1. Dans ce domaine l'hélicité de l'écoulement dans le milieu 2 est positive comme celle dans le milieu 1. Mais ce résultat n'est pas générique et pour r_2 légérement supérieur à 2.5 (voir figure 2.10), le minimum de R_{mc} est obtenu pour ω_2 positif tandis que, par construction, v_2 est négatif. Dans ce cas, l'hélicité du milieu 2 est négative alors que celle du milieu 1 est positive. Pour des valeurs de r_2 encore plus grande, comme dans le cas $r_2 = 10$ de la figure 2.7, le minimum du seuil est de nouveau obtenu pour ω_2 négatif.

La pulsation du mode instable évolue peu et reste comprise entre -0.18 et -0.16 pour r_2 compris entre 1.1 et 5.

2.3 Conclusion

L'effet de la mise en mouvement d'une couche à l'extérieur de la zone où est localisé l'écoulement est non négligeable. Il est néanmoins dur à quantifier et nous avons choisi une approche où nous nous concentrons sur les grandeurs caractéristiques du milieu 1. Suivant la nature du milieu extérieur les résultats sont différents. Si le milieu est isolant, l'invariance par rotation permet de trouver le minimum du seuil. Il a lieu lorsque nous faisons tourner la couche 2 à une vitesse égale à l'opposé de la vitesse critique afin que le milieu 1, immobile dans le référentiel du laboratoire, apparaisse en rotation à la vitesse critique dans le référentiel lié à la couche 2. Si le milieu extérieur est conducteur, nous ne pouvons pas conclure en exploitant l'invariance du problème par rotation et translation. Dans ce cas il est possible de déterminer la vitesse de rotation de la couche qui minimise le seuil. Cette vitesse dépend de l'épaisseur de la couche de façon non triviale. Si la couche 2 est uniquement en rotation, le seuil est minimum pour une vitesse de rotation ω_2 positive dont la valeur décroît avec r_2. Le mécanisme est alors de faire varier de façon moins discontinue la vitesse de roation entre celle du milieu 1 (ω_1) et celle du milieu extérieur au repos. Si la couche 2 est en rotation et translation, la valeur de ω_2 qui minimise le seuil est négative pour r_2 proche de 1 et devient positive pour r_2 plus grand. L'hélicité du milieu 2 est donc de même signe que celle du milieu 1 pour r_2 petit et change de signe pour $r_2 \simeq 2.5$. Il n'y a donc pas de lien simple entre l'hélicité dans chaque milieu et la valeur du seuil.

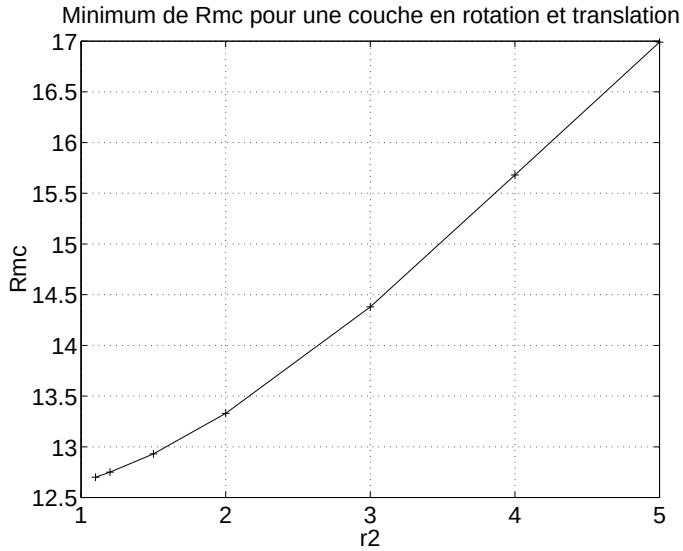

FIG. 2.8 – *Valeur minimale de R_{mc} en fonction de l'épaisseur de la couche en rotation et translation r_2.*

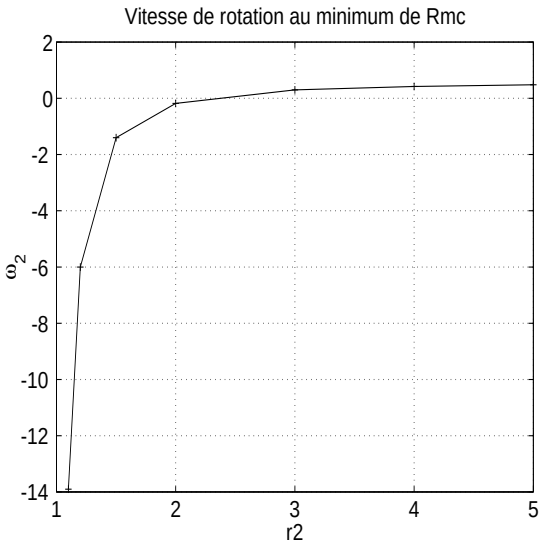

FIG. 2.9 – *Vitesse de rotation ω_2 correspondant au minimum de R_{mc} en fonction de l'épaisseur de la couche en rotation et translation r_2.*

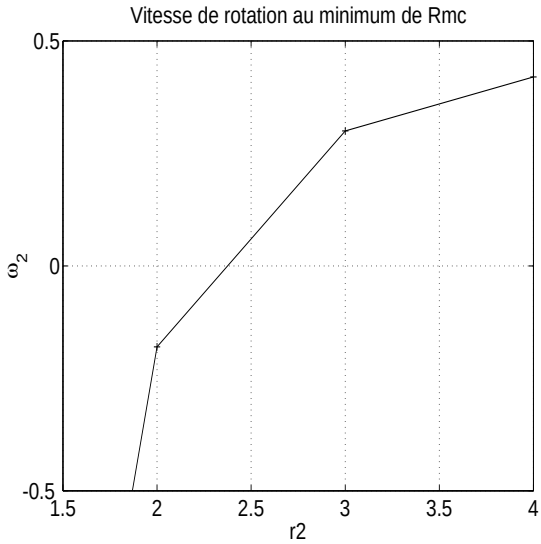

FIG. 2.10 – *Vitesse de rotation ω_2 correspondant au minimum de R_{mc} en fonction de l'épaisseur de la couche en rotation et translation r_2, même courbe qu'en figure 2.9 pour les points compris entre $r_2 = 1.5$ et $r_2 = 4$.*

Compléments

2.A Perturbation d'un opérateur non auto-adjoint

2.A.1 Principe

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur pouvant être décomposé en $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon\mathcal{L}_1$, où ϵ est un petit paramètre. L'effet de $\epsilon\mathcal{L}_1$ est donc traité comme une perturbation de l'opérateur $\mathcal{L}_0$.

Supposons que $\mathcal{L}_0$ n'est pas auto-adjoint mais que nous connaissons son spectre p_i et ses vecteurs propres $\vec{B}_i$ qui vérifient

$$\mathcal{L}_0\,\vec{B}_i = p_i\,\vec{B}_i\,. \tag{2.8}$$

Suivant Roberts [33], définissons un produit scalaire et construisons $\mathcal{L}_0^\dagger$ l'adjoint de $\mathcal{L}_0$ qui vérifie pour tout $\vec{f}$ et $\vec{g}$

$$\left\langle \vec{f}|\mathcal{L}_0\vec{g}\right\rangle = \left\langle \mathcal{L}_0^\dagger\vec{f}|\vec{g}\right\rangle\,. \tag{2.9}$$

L'ensemble des vecteurs propres de $\mathcal{L}_0^\dagger$ qui vérifient

$$\mathcal{L}_0^\dagger\,\vec{C}_i = p_i^\dagger\,\vec{C}_i\,, \tag{2.10}$$

forme une famille biorthogonale aux $\vec{B}_i$. La preuve de ce résultat permet de comprendre le sens de la biorthogonalité. En effet, en écrivant

$$p_j\left\langle \vec{C}_i|\vec{B}_j\right\rangle = \left\langle \vec{C}_i|p_j\vec{B}_j\right\rangle = \left\langle \vec{C}_i|\mathcal{L}_0\vec{B}_j\right\rangle = \left\langle \mathcal{L}_0^\dagger\vec{C}_i|\vec{B}_j\right\rangle = p_i^{\dagger *}\left\langle \vec{C}_i|\vec{B}_j\right\rangle\,, \tag{2.11}$$

il vient que soit les vecteurs propres sont associés à des valeurs propres conjuguées, soit ils sont orthogonaux. C'est ce que nous appelons deux familles biorthogonales.

Nous voulons déterminer comment une valeur propre p_0 de $\mathcal{L}_0$ est modifiée par la perturbation $\epsilon\mathcal{L}_1$. Dans le cas où elle n'est pas dégénérée, il est facile de calculer la première correction à la valeur propre.

Nous notons p la nouvelle valeur propre et $\vec{B}$ le nouveau vecteur propre et développons $\vec{B}$ sur l'ensemble des $\vec{B}_i$, ce qui revient à supposer que cette famille forme une base complète. Nous écrivons

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_0 + \epsilon\sum_{i\neq 0}\alpha_i\vec{B}_i\,, \\ p &= p_0 + \epsilon p_1\,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

où les α_i sont les coefficients de la décomposition de $\vec{B}$ sur les vecteurs $\vec{B}_i$. En développant l'équation $\mathcal{L}\vec{B} = p\vec{B}$, il vient à l'ordre zéro en ϵ que $\vec{B}_0$ est vecteur propre de $\mathcal{L}_0$ associé à la valeur propre p_0, ce que nous avions déjà supposé. A l'ordre suivant, il vient

$$\mathcal{L}_1\vec{B}_0 + \sum_{i\neq 0} \alpha_i \mathcal{L}_0 \vec{B}_i = \sum_{i\neq 0} p_0\, \alpha_i \vec{B}_i + p_1\, \vec{B}_0\,. \tag{2.13}$$

Jusqu'à présent ce développement est identique au développement qui est utilisé lorsque l'opérateur $\mathcal{L}_0$ est auto-adjoint, ce qui est le cas en mécanique quantique et dans de nombreux problèmes de mécanique classique. Dans le cas où il n'est pas auto-adjoint, nous utilisons les propriétés de biorthogonalités des $\vec{C}_i$ et $\vec{B}_i$. En effectuant le produit scalaire de l'équation 2.13 avec $\vec{C}_0$ vecteur propre de $\mathcal{L}_0^\dagger$ associé à la valeur propre p_0^*. Il vient

$$p_1 = \frac{\left\langle \vec{C}_0 | \mathcal{L}_1 \vec{B}_0 \right\rangle}{\left\langle \vec{C}_0 | \vec{B}_0 \right\rangle}\,, \tag{2.14}$$

la nouvelle valeur propre s'écrit donc

$$p = p_0 + \frac{\left\langle \vec{C}_0 | \epsilon \mathcal{L}_1 \vec{B}_0 \right\rangle}{\left\langle \vec{C}_0 | \vec{B}_0 \right\rangle}\,. \tag{2.15}$$

A cet ordre nous avons la même structure que dans le cas auto-adjoint à ceci près qu'il faut utiliser le vecteur propre de l'opérateur adjoint pour prendre le produit scalaire de l'équation 2.13. Notons que nous avons supposé que la famille des $\vec{B}_i$ forme une base complète ce qui, à priori, n'est pas toujours le cas.

2.A.2 Application

Nous appliquons cette technique au cas où les trois milieux sont conducteurs. Nous allons traiter perturbativement l'effet de la mise en mouvement de la seconde couche. Lorsque celle-ci est immobile nous retrouvons l'écoulement de Ponomarenko avec deux milieux. Comme dans ce calcul nous cherchons des champs magnétiques de la forme $\vec{B} = \vec{b}(r) \exp i(\omega_0 t + m\theta + kz)$. La recherche du mode neutre nécessite la recherche des valeurs propres de l'opérateur

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{1a} + \mathcal{L}_{1b}\,, \tag{2.16}$$

où $\mathcal{L}_0$ est l'opérateur associé à l'écoulement de Ponomarenko dans deux milieux et pour des valeurs des paramètres égales à celles du seuil sans perturbation. Il est similaire à celui défini en équation 1.7 page 40, à ceci près que n'intervient pas la pulsation du mode

considéré. Dans ce formalisme, celle-ci apparaît comme la partie imaginaire de la valeur propre que nous cherchons. Nous avons

$$\mathcal{L}_0\vec{b} = -\left(i\,\mu_{1c}\,\Gamma(r_1 - r)\ - \eta\,\Delta\right)\,\vec{b} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r\omega_{1c}\delta(r-r_1) & 0 & 0 \\ V_{1c}\delta(r-r_1) & 0 & 0 \end{pmatrix}\,\vec{b}\,, \tag{2.17}$$

où $\mu_{1c} = m\,\omega_{1c} + k\,V_{1c}$ est relié à l'intensité de l'écoulement dans le milieu 1. ω_{1c} (resp. V_{1c}) est la vitesse de rotation (resp. vitesse axiale) du milieu 1 lorsque le milieu 2 est immobile; ce sont donc les valeurs critiques pour l'écoulement de Ponomarenko à deux milieux. $\Gamma(r)$ est la fonction qui est nulle pour r négatif et vaut un sinon. De plus, l'opérateur Δ vient du terme de dissipation dans l'équation d'induction et a été défini en équation 1.8. La perturbation créée par la mise en rotation du milieu 2 est la source de

$$\mathcal{L}_{1b}\vec{b} = -(i\,\mu_2\,\Gamma(r-r_1)\Gamma(r_2-r))\vec{b} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \omega_2\,r\,(\delta(r-r_2)-\delta(r-r_1)) & 0 & 0 \\ V_2(\delta(r-r_1)-\delta(r-r_2)) & 0 & 0 \end{pmatrix}\,\vec{b} \tag{2.18}$$

Cet opérateur va modifier la valeur propre de $\mathcal{L}_0$. Pour déterminer la nouvelle valeur du seuil, il faut pouvoir modifier la vitesse avec laquelle est mis en mouvement le milieu 1. C'est le sens du dernier opérateur

$$\mathcal{L}_{1a}\vec{b} = -\frac{R_m - R_{mc}}{R_{mc}}\left(i\,\mu_{1c}\,\Gamma(r_1 - r) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r\omega_{1c}\delta(r-r_1) & 0 & 0 \\ V_{1c}\delta(r-r_1) & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\,\vec{b}\,. \tag{2.19}$$

Nous utilisons le même produit scalaire que défini en équation 1.11. Connaissant l'expression de $\vec{B}_0$ vecteur propre de l'opérateur non perturbé, c'est-à-dire mode instable de l'écoulement de Ponomarenko à deux milieux, et connaissant le vecteur propre $\vec{C}_0$ de l'adjoint, il est facile de calculer la modification de la valeur propre

$$p = p_0 + a\,\frac{R_m - R_{mc}}{R_{mc}} + b\,\omega_2 + c\,v_2\,. \tag{2.20}$$

a, b, c sont trois coefficients dépendant de r_2 qui vérifient

$$\begin{aligned}
a\,\frac{R_m - R_{mc}}{R_{mc}} &= \frac{\left\langle \vec{C}_0 | \mathcal{L}_{1a}\vec{B}_0 \right\rangle}{\left\langle \vec{C}_0 | \vec{B}_0 \right\rangle}\,, \\
b\,\left\langle \vec{C}_0 | \vec{B}_0 \right\rangle &= -i\,m\int_{r_1}^{r_2} (\vec{C}_0^*.\vec{B}_0)\,r\,dr - r_2^2\,\vec{C}_{0\theta}^*(r_2)\vec{B}_{0r}(r_2) + r_1^2\vec{C}_{0\theta}^*(r_1)\vec{B}_{0r}(r_1)\,, \\
c\,\left\langle \vec{C}_0 | \vec{B}_0 \right\rangle &= -i\,k\int_{r_1}^{r_2} (\vec{C}_0^*.\vec{B}_0)\,r\,dr\,.
\end{aligned}$$

Nous déterminons la nouvelle valeur du seuil en écrivant qu'elle est caractérisée par $Re(p) = 0$. Dans le cas où le milieu 2 est en rotation uniquement, il vient

$$R_m - R_{mc} = -R_{mc}\frac{\omega_2\, Re(b)}{Re(a)},$$

tandis que la pulsation est modifiée suivant

$$Im(p) = Im(p_0) + \omega_2\left(Im(b) - \frac{Im(a)\, Re(b)}{Re(a)}\right).$$

Dans le cas où la vitesse axiale est non nulle et vaut $v_2 = -\frac{v_1}{r_2^2-1}$, le calcul est similaire mais il faut tenir compte de la dépendance de v_2 en R_m. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
R_m - R_{mc} =& R_{mc}\,\frac{v_{1c}}{r_2^2-1}\,\frac{Re(c)}{Re(a - \frac{R_{mc}}{\sqrt{1+Rb^2}(r_2^2-1)}c)} \\
&- \omega_2\, R_{mc}\,\frac{Re(b)}{Re(a - \frac{R_{mc}}{\sqrt{1+Rb^2}(r_2^2-1)}c)}\,, \\
Im(p) = Im(p_0) &+ \frac{v_{1c}}{r_2^2-1}\left(\frac{Re(c)}{Re(a - \frac{R_{mc}}{\sqrt{1+Rb^2}(r_2^2-1)}c)}Im(a - \frac{R_{mc}}{\sqrt{1+Rb^2}(r_2^2-1)}c) - Im(c)\right) \\
&+ \omega_2\left(Im(b) - \frac{Re(c)}{Re(a - \frac{R_{mc}}{\sqrt{1+Rb^2}(r_2^2-1)}c)}Im(a - \frac{R_{mc}}{\sqrt{1+Rb^2}(r_2^2-1)}c)\right).
\end{aligned}$$

Nous sommes donc capables de calculer comment varient le seuil et la pulsation au seuil en fonction de la vitesse de rotation et de translation du milieu 2. C'est un calcul perturbatif, il sera notamment inexact lorsque l'épaisseur de la seconde couche devient faible. En effet dans cette limite la vitesse v_2 diverge et son effet ne peut plus être traité perturbativement.

2.B Invariance par changement de référentiel

Soit un référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel un fluide conducteur de viscosité magnétique η est en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$. L'équation vérifiée par le champ magnétique est l'équation d'induction

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta\, \nabla^2 \vec{B}\,, \tag{2.21}$$

où la dérivée temporelle est effectuée dans le référentiel $\mathcal{R}$. Nous allons montrer que cette équation est invariante lorsque nous passons dans un référentiel $\mathcal{R}'$ qui, par rapport au référentiel précédent, est en translation à vitesse constante $\vec{v}_t$ et en rotation à vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}_t$. Les champs se transforment suivant

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_t - \vec{\Omega}_t \times \vec{r}\,, \tag{2.22}$$

$$\vec{B}' = \vec{B}\,. \tag{2.23}$$

$\vec{v}\,'$ (resp. $\vec{B}'$) est le champ de vitesse (resp. magnétique) dans le nouveau référentiel. Nous allons traiter successivement les deux types de mouvement.

2.B.1 Référentiel en translation

L'équation d'induction peut s'écrire

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} + \vec{v}_t.\nabla \vec{B}' = \nabla \times (\vec{v}\,' \times \vec{B}') + \eta\, \nabla^2 \vec{B}' \tag{2.24}$$

où la dérivée temporelle est effectuée dans le premier référentiel. Le membre de gauche est donc la dérivée convective du champ magnétique pour un champ de vitesse uniforme $\vec{v}_t$. Ce terme est invariant par tout changement à un référentiel $\mathcal{R}_0$ en translation à vitesse uniforme $\vec{v}_0$ à condition de changer $\vec{v}_t$ en $\vec{v}_t - \vec{v}_0$. En choisissant $\vec{v}_0 = \vec{v}_t$, soit $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}'$ il vient

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}|_{\mathcal{R}} + \vec{v}_t.\nabla \vec{B}' = \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}|_{\mathcal{R}'}\,, \tag{2.25}$$

et nous vérifions bien que l'équation d'induction est invariante par ce changement de référentiel.

2.B.2 Référentiel en rotation

Nous avons

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) &= \nabla \times (\vec{v}_r \times \vec{B}) + \nabla \times (\vec{v}\,' \times \vec{B}) \\ &= \vec{B}.\nabla\, \vec{v}_r - \vec{v}_r.\nabla\, \vec{B} + \nabla \times (\vec{v}\,' \times \vec{B})\,, \end{aligned} \tag{2.26}$$

où $\vec{v}_r = \vec{\Omega}_t \times \vec{r}$. En calculant les composantes de chacun des membres, il est facile de vérifier que $\vec{B}.\nabla(\vec{\Omega}_t \times \vec{r}) = \vec{\Omega}_t \times \vec{B}$ et l'équation d'induction s'écrit ainsi

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}|_{\mathcal{R}} + \vec{v}_r.\nabla \vec{B} = \vec{\Omega}_t \times \vec{B} + \nabla \times (\vec{v}\,' \times \vec{B}) + \eta\, \nabla^2 \vec{B}\,. \tag{2.27}$$

Le membre de gauche est la dérivée convective du champ magnétique pour un champ de vitesse $\vec{v}_r$ et nous l'écrirons $\frac{d\,\vec{B}}{d\,t}|_{\mathcal{R}}$. En passant dans un référentiel $\mathcal{R}_0$ en rotation à la pulsation $\vec{\Omega}_0$, ce terme se transforme suivant

$$\frac{d\,\vec{B}}{d\,t}|_{\mathcal{R}} = \frac{d\,\vec{B}}{d\,t}|_{\mathcal{R}_0} + \vec{\Omega}_0 \times \vec{B}\,. \tag{2.28}$$

$\frac{d\,\vec{B}}{d\,t}|_{\mathcal{R}_0}$ est la dérivée convective pour le champ de vitesse $\vec{v}_t$ vue dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ soit $\vec{v}_t - \vec{\Omega}_0 \times \vec{r}$. Si nous choisissons $\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}_t$, soit $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_0$, le champ de vitesse dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est nul et

$$\frac{d\,\vec{B}}{d\,t}|_{\mathcal{R}'} = \frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t}|_{\mathcal{R}'} = \frac{\partial\,\vec{B}'}{\partial\,t}|_{\mathcal{R}'}\,. \tag{2.29}$$

Nous en déduisons que l'équation d'induction est invariante par changement de référentiel en rotation à vitesse angulaire constante.

De façon générale, l'équation d'induction est invariante par changement de référentiel en mouvement solide à vitesse constante. Dans le cas où le milieu considéré est le vide, les équations vérifiées par le champ magnétique sont $\nabla \times \vec{B} = 0$ et $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Elles sont invariantes par changement de référentiel en mouvement solide avec la seule transformation $\vec{B}' = \vec{B}$. Ces deux dernières propriétés permettent de simplifier l'étude d'une dynamo de Ponomarenko où le milieu extérieur est le vide. En se plaçant dans n'importe quel référentiel en rotation et translation solide, le milieu extérieur reste le vide au repos tandis que par un choix astucieux du nouveau référentiel nous simplifions le champ de vitesse du fluide.

Enfin, remarquons que ces invariances sont peu utilisées dans l'étude de l'effet dynamo. D'une part les problèmes invariants par translation sont peu réalistes pour modéliser des écoulements dans des volumes fermés, d'autre part, le problème complet de dynamo n'est pas invariant par changement de référentiel en rotation. En effet, si l'équation d'induction est invariante, l'équation qui régit le mouvement du fluide ne l'est pas.

Chapitre 3

Effet des fluctuations du champ de vitesse sur le seuil d'instabilité dynamo

3.1 Objectif de l'étude

Pour déterminer le seuil d'instabilité de modèles géophysiques et astrophysiques d'effet dynamo, le rôle de la turbulence est très important. En effet, de nombreux modèles utilisent un effet alpha turbulent comme mécanisme de base de l'instabilité [4, 27, 28]. Cela n'est pas du tout le cas en ce qui concerne les expériences de laboratoire. Les mesures expérimentales du seuil d'instabilité sont en bon accord avec celles prédites par des simulations numériques du problème cinématique. Celles-ci utilisent comme champ de vitesse un champ stationnaire déterminé en moyennant temporellement le champ de vitesse instantané. C'est-à-dire qu'elles utilisent l'écoulement moyen et ne tiennent pas du tout compte de la composante fluctuante du champ de vitesse.

Alors que la nature turbulente de l'écoulement semble être de première importance pour les dynamos astrophysiques, elle n'affecte que très peu le seuil d'instabilité des dynamos expérimentales. Pour comprendre cela, nous nous sommes intéressés à l'effet sur le seuil d'instabilité d'une composante fluctuante du champ de vitesse. C'est-à-dire que nous décomposons le champ de vitesse sous la forme $\vec{v} = \langle\vec{v}\rangle + \vec{v}_b$ où $\langle\vec{v}\rangle$ est la moyenne temporelle du champ de vitesse et $\vec{v}_b$ ses fluctuations, et nous étudions l'effet de la composante fluctuante sur le seuil d'instabilité. L'équation d'induction s'écrit alors

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times\left(\langle\vec{v}\rangle\times\vec{B}\right) + \nabla\times\left(\vec{v}_b\times\vec{B}\right) + \eta\nabla^2\vec{B}\,. \tag{3.1}$$

Le terme de forçage fluctuant est, dans l'équation, multiplié par l'amplitude du champ magnétique: la perturbation est dite multiplicative. Il s'agit donc d'étudier l'effet d'une perturbation fluctuante multiplicative sur l'instabilité dynamo.

Il existe une très grande quantité de travaux, à la fois expérimentaux et théoriques, dans lesquels est étudié l'effet d'une perturbation multiplicative déterministe (modulation)

ou stochastique (bruit) sur le seuil d'instabilités simples.

Dans le cas d'une perturbation déterministe, les comportements peuvent être très variés. Sans prétendre être exhaustifs, nous exposons brièvement deux effets. Une couche de fluide peut être déstabilisée si elle est vibrée verticalement. C'est l'instabilité de Faraday qui se manifeste par la formation d'ondulations à la surface du liquide. Dans ce cas, la modulation périodique est le moteur de l'instabilité. Le phénomène contraire existe aussi. Une couche de liquide ferromagnétique est déstabilisée si elle est placée dans un champ magnétique vertical d'amplitude supérieure à une valeur seuil B_c. C'est l'instabilité de Rosensweig qui se manifeste par la formation d'ondulations statiques. Si la couche est vibrée verticalement de façon périodique, il faut appliquer un champ magnétique supérieur à B_c pour voir apparaître l'instabilité de Rosensweig: le seuil est alors plus élevé. Nous présentons en fin du manuscrit une copie d'un article résumant l'étude expérimentale et théorique de cet effet [36]. Dans ce cas, le forçage périodique a tendance à stabiliser la surface horizontale et à augmenter le seuil d'instabilité. Ainsi, même pour des instabilités relativement simples et avec un forçage périodique, les comportements ne sont pas triviaux.

Puisque nous souhaitons modéliser l'effet de la composante turbulente du champ de vitesse, nous avons été amenés à étudier l'effet d'un bruit sur le seuil d'instabilité dynamo. Les études existantes sur l'effet du bruit sur une instabilité montrent aussi des comportements très riches. Dans le cas des systèmes de dimension nulle, c'est-à-dire dont la grandeur déstabilisée est un scalaire fonction uniquement du temps, Lücke et Schank [37] ont calculé le déplacement du seuil d'une instabilité stationnaire supercritique forcée par un bruit. Nous présentons ce calcul en complément de la thèse (quatrième partie) et détaillons une étude expérimentale d'un système décrit par ce type d'équation. Ils prédisent une augmentation du seuil, ce qui est vérifié numériquement. Le même phénomène a été mesuré pour une bifurcation de Hopf réalisée dans un circuit électronique [38]. Lorsque les systèmes sont de dimension plus élevée, des déplacements du seuil d'instabilité sont aussi observés, par exemple pour des instabilités de cristaux liquides [39]. Mais si le bruit est fort, les comportements peuvent différer avec, entre autre, l'existence de transitions induites par le bruit [40], la création de nouveaux régimes de bistabilité [41] et l'apparition de régimes d'intermittence on-off [42]. Dans ce dernier cas, le système bascule de façon aléatoire entre deux états: un état proche de l'état stable sans forçage et un état déstabilisé.

Enfin, en raison de l'analogie entre les instabilités et les transitions de phase, ce problème est similaire à de nombreux problèmes de matière condensée. Citons par exemple l'étude de l'effet d'un désordre spatial sur la transition ferromagnétique-paramagnétique d'un système de spins d'Ising [43].

Très peu d'études ont été menées sur ce thème en considérant l'instabilité dynamo. Notons qu'un comportement de type intermittence on-off a été vu dans des simulations numériques d'effet dynamo [44] mais pour des paramètres physiques de l'écoulement irréalistes. La valeur de la viscosité magnétique est notamment beaucoup plus faible que celle des métaux liquides connus et il n'est alors pas surprenant de voir des comportements plus instables car les termes de dissipation sont très faibles. Néanmoins il n'existe pas d'études analytiques de l'effet de la turbulence sur le seuil d'instabilité dynamo. Nous

allons évaluer cet effet perturbativement dans la limite où la composante fluctuante de la vitesse est de faible amplitude.

3.2 Développement perturbatif

Nous adimensionnons l'équation 3.1 en utilisant L, L^2/η et V comme unités de longueur, temps et vitesse. L et V sont la taille et la vitesse caractéristique de l'écoulement moyen. Avec les nouvelles variables que nous notons de la même façon, l'équation devient

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_m \nabla \times \left(\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B} \right) + \delta \nabla \times \left(\vec{v}_b \times \vec{B} \right) + \nabla^2 \vec{B} \,. \tag{3.2}$$

$R_m = \frac{V\,L}{\eta}$ est le nombre de Reynolds magnétique construit avec les grandeurs caractéristiques de l'écoulement moyen. δ mesure l'importance de la partie fluctuante du champ de vitesse et est le petit paramètre de notre développement. Notons que le développement est valide quelle que soit la forme (déterministe ou bruitée) de la perturbation de vitesse. Dans la limite de δ nul, nous retrouvons l'équation d'induction non perturbée.

Nous supposons que l'écoulement moyen sans perturbation engendre du champ magnétique si R_m est supérieur au nombre de Reynolds magnétique critique $R_{mc}^{(0)}$ et nous voulons savoir comment ce nombre de Reynolds magnétique critique est modifié par la perturbation de vitesse. Nous calculons cet effet perturbativement puisque nous nous attendons à retrouver le problème déterministe dans la limite de très faible bruit.

Nous ne considérons que le problème cinématique bruité et supposons que le champ magnétique éventuellement affecté par le bruit ne va pas modifier le champ de vitesse. Cela est pertinent en dessous du seuil où le champ magnétique est nul et cette technique est donc adaptée à notre calcul dans la mesure où nous étudions le seuil d'instabilité et pas sa saturation. En outre, dans un calcul similaire concernant les instabilités des équations de Ginzburg-Landau et Swift-Hohenberg, Becker et Kramer ont montré que le déplacement du seuil pour de faibles bruits peut être calculé en étudiant uniquement le problème linéaire [45]. Enfin nous supposons que le bruit ne modifie pas la dépendance temporelle du mode instable. Il est aisé d'adapter ce calcul pour tenir compte d'une eventuelle modification de la pulsation du mode instable induite par le bruit. Ce développement est adapté à la fois au cas d'un perturbation déterministe (par exemple un forçage paramétrique) et au cas d'une perturbation stochastique (comme modèle de turbulence). Nous verrons que seule diffère la forme bilinéaire que nous introduirons pour calculer la condition de solvabilité du développement.

Nous introduisons le développement suivant

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}^{(0)} + \delta\, \vec{B}^{(1)} + \delta^2\, \vec{B}^{(2)} + \dots \,, \\ R_m &= R_m^{(0)} + \delta\, R_m^{(1)} + \delta^2\, R_m^{(2)} + \dots \,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

et écrivons l'équation 3.2 ordre par ordre en puissances de δ.

A l'ordre zéro, nous obtenons

$$L\,\vec{B}^{(0)} = \frac{\partial \vec{B}^{(0)}}{\partial t} - R_m^{(0)}\,\nabla \times \left(\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}^{(0)}\right) - \nabla^2 \vec{B}^{(0)} = 0\,, \tag{3.4}$$

et nous retrouvons le problème non bruité qui est, par hypothèse, instable pour $R_m^{(0)}$ égal au nombre de Reynolds magnétique critique du problème sans bruit $R_{mc}^{(0)}$. Au premier ordre en δ, il vient

$$L\,\vec{B}^{(1)} = R_m^{(1)}\,\nabla \times \left(\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}^{(0)}\right) + \nabla \times \left(\vec{v}_b \times \vec{B}^{(0)}\right)\,. \tag{3.5}$$

Par condition de solvabilité, nous déduisons la première correction à R_{mc}. Introduisons un produit scalaire que nous notons $\langle f|g \rangle$. Si $\vec{C}$ fait partie du noyau de $L^\dagger$ l'adjoint de L, le produit scalaire de $\vec{C}$ avec le second membre de l'équation 3.5 est nul et nous obtenons

$$R_m^{(1)} = -\frac{\left\langle \vec{C} | \nabla \times \left(\vec{v}_b \times \vec{B}^{(0)}\right)\right\rangle}{\left\langle \vec{C} | \nabla \times \left(\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}^{(0)}\right)\right\rangle}\,. \tag{3.6}$$

Étudions le cas trivial déterministe où $\vec{v}_b$ est proportionnel à $\langle \vec{v} \rangle$ et s'écrit donc $\delta\,\vec{v}_b = k\,\langle \vec{v} \rangle$, k étant un coefficient de proportionnalité. Nous obtenons ainsi $\delta R_m^{(1)} = -k$, ce qui est le résultat trivial que le seuil est abaissé de telle façon que la vitesse totale $\langle \vec{v} \rangle + \vec{v}_b$ corresponde au nombre de Reynolds magnétique critique sans perturbation $R_{mc}^{(0)}$.

Pour étudier le cas non déterministe, il nous faut préciser le type de produit scalaire que nous utilisons. En effet, si $\vec{v}_b$ est un bruit, donc la réalisation d'une variable aléatoire, il n'est pas possible d'utiliser un simple produit scalaire défini comme pour la dynamo de Ponomarenko en équation 1.11 page 41 et qui soit, par exemple, l'intégrale sur l'espace du produit scalaire local. En effet, sa valeur dépend de la réalisation du bruit. Nous étendons le produit scalaire au cas des variables aléatoires en y introduisant une moyenne sur les réalisations. Si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont deux variables aléatoires de réalisations $\vec{f}_\zeta$ et $\vec{g}_\zeta$, nous définissons une forme bilinéaire pour $\vec{F}$ et $\vec{G}$ par $\left\langle \vec{F} | \vec{G} \right\rangle = \int \left\langle \vec{f}_\zeta{}^* . \vec{g}_\zeta \right\rangle_s d^3r$ où $\langle . \rangle_s$ est la moyenne sur les réalisations du bruit. Notons que si le processus est ergodique, la moyenne sur les réalisations est équivalente à une moyenne temporelle. Cette définition permet de généraliser le produit scalaire de fonctions déterministes à des variables aléatoires. En complément à la thèse nous étudions l'effet du bruit sur d'autres instabilités pour lesquelles nous détaillons l'utilisation d'une forme bilinéaire similaire.

Nous pouvons alors calculer la première correction au nombre de Reynolds magnétique critique. Si $\vec{v}_b$ est un bruit de moyenne nulle, comme $R_m^{(1)}$ est une fonction linéaire de $\vec{v}_b$ et des champs déterministes, la moyenne sur les réalisations qui intervient dans les produits scalaires est une moyenne sur les réalisations de $\vec{v}_b$. Celle-ci est nulle et il en va donc de même de la première correction au nombre de Reynolds magnétique critique $R_m^{(1)} = 0$. Calculons la correction à l'ordre suivant.

A l'ordre deux en δ, l'équation 3.2 donne

$$L\,\vec{B}^{(2)} = R_m^{(2)}\,\nabla\times\left(\langle\vec{v}\rangle\times\vec{B}^{(0)}\right) + \nabla\times\left(\vec{v}_b\times\vec{B}^{(1)}\right)\,, \tag{3.7}$$

et, par condition de solvabilité, nous obtenons

$$R_m^{(2)} = -\frac{\left\langle\vec{C}|\nabla\times\left(\vec{v}_b\times\vec{B}^{(1)}\right)\right\rangle}{\left\langle\vec{C}|\nabla\times\left(\langle\vec{v}\rangle\times\vec{B}^{(0)}\right)\right\rangle}\,, \tag{3.8}$$

où $\vec{B}^{(1)}$ est solution de

$$L\vec{B}^{(1)} = \nabla\times\left(\vec{v}_b\times\vec{B}^{(0)}\right)\,. \tag{3.9}$$

Contrairement à la première correction au nombre de Reynolds magnétique critique, celle-ci est quadratique en $\vec{v}_b$ et n'a pas, *a priori*, de raison d'être nulle. Son calcul nécessite d'inverser l'équation 3.9 et de calculer la valeur des formes bilinéaires de l'équation 3.8.

Comme nous l'avons dit précédemment, la structure du développement contraint la fréquence propre du mode instable à être indépendante de l'amplitude du bruit. Cette hypothèse est raisonnable si le mode instable est stationnaire, dans le cas contraire il est possible d'adapter le développement pour tenir compte du changement de fréquence induit par le bruit. Le résultat sur la nullité de la variation du seuil au premier ordre en amplitude du bruit est inchangé.

A l'aide de ce développement perturbatif, nous avons pu donner l'expression des deux premiers termes correctifs au nombre de Reynolds magnétique critique en fonction de l'amplitude du bruit. De façon générale, la première correction est nulle, c'est-à-dire que l'effet du bruit est du second ordre en son amplitude et donc dépend peu du bruit dans la limite où il n'est pas trop important. Ce résultat est assez cohérent avec les mesures des seuils des dynamos expérimentales qui sont peu affectées par la partie turbulente des écoulements.

3.3 Cas particulier d'une dynamo alpha-alpha dans la limite de faible nombre de Reynolds magnétique.

Dans le cas où la perturbation de vitesse est un bruit de moyenne nulle, le développement précédent permet d'établir la nullité du premier terme du développement perturbatif du nombre de Reynolds magnétique critique en fonction de l'amplitude du bruit. Nous avons déterminé une formule donnant le second terme correctif mais n'avons pas trouvé d'écoulement suffisamment simple pour que la correction soit calculée explicitement.

Dans le cas d'une dynamo basée sur une séparation d'échelle, la structure du mode instable est simple et peut permettre de calculer le second coefficient du développement

perturbatif de R_{mc}. Néanmoins le développement doit être adapté pour tenir compte des champs variant à grandes et petites échelles. C'est ce que nous faisons dans le cas d'un écoulement proposé par Roberts [14] pour lequel le calcul du seuil en l'absence de bruit est donné en annexe page 79. Les équations vérifiées par le champ moyenné sur une période spatiale de l'écoulement $\left\langle \vec{B} \right\rangle_p$ et par la partie du champ variant sur la période de l'écoulement $\vec{b} = \vec{B} - \left\langle \vec{B} \right\rangle_p$ sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left\langle \vec{B} \right\rangle_p}{\partial t} &= \nabla \times \left(\left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle_p \right) + \eta \nabla^2 \left\langle \vec{B} \right\rangle_p , \\ \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} &\simeq \nabla \times \left(\vec{v} \times \left\langle \vec{B} \right\rangle_p \right) + \eta \nabla^2 \vec{b} . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Le champ de vitesse est la somme d'un écoulement hélicoïdal de la forme $\vec{v} = V\,\vec{u}$ où $\vec{u} = (cos\,k\,y - cos\,k\,z, sin\,k\,z, sin\,k\,y)$ et de la perturbation notée $\delta\,\vec{v}_b$. Afin de rester cohérent avec l'étude menée en annexe, nous allons faire le développement en utilisant la variable V plutôt que R_m. Le seuil en R_m se déduit de la définition $R_m = \frac{V\sqrt{L\,l}}{\eta}$ donnée par l'équation 3.44. Nous écrivons donc

$$\begin{aligned} V &= V^{(0)} + \delta\,V^{(1)} + \delta^2\,V^{(2)} + ... , \\ \left\langle \vec{B} \right\rangle_p &= \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p + \delta \left\langle \vec{B}^{(1)} \right\rangle_p + \delta^2 \left\langle \vec{B}^{(2)} \right\rangle_p + ... \\ \vec{b} &= \vec{b}^{(0)} + \delta\,\vec{b}^{(1)} + \delta^2\,\vec{b}^{(2)} + ... \end{aligned} \tag{3.11}$$

A l'ordre 0 en δ, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p}{\partial t} &= \nabla \times \left(V^{(0)} \left\langle \vec{u^{(0)}} \times \vec{b}^{(0)} \right\rangle_p \right) + \eta \nabla^2 \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p , \\ \frac{\partial \vec{b}^{(0)}}{\partial t} &= \nabla \times \left(V^{(0)}\,\vec{u} \times \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right) + \eta \nabla^2 \vec{b}^{(0)} . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nous retrouvons le problème non perturbé. La solution de la seconde équation s'écrit $\vec{b}^{(0)} = \mathcal{M} \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p$ comme défini en équation 3.37 page 80. Le terme $V^{(0)} \left\langle \vec{u^{(0)}} \times \vec{b}^{(0)} \right\rangle_p$ s'écrit $\alpha \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p$ où α est donné par l'équation 3.38 page 80. Nous obtenons donc une expression pour le champ moyen de la forme

$$\mathcal{L} \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p = \frac{\partial \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p}{\partial\,t} - \nabla \times \left(\alpha \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right) - \eta\,\nabla^2 \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p = 0 . \tag{3.13}$$

Le seuil est donné par $\frac{(V^{(0)})^2}{\eta^2\, K\, k} = 1$ et le mode instable est stationnaire et a la forme

$$\left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p = \exp i\, K\, x \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{3.14}$$

3.3.1 Première correction au seuil

Au premier ordre en δ nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left\langle \vec{B}^{(1)} \right\rangle_p}{\partial t} =& \nabla \times \left(V^{(0)} \left\langle \vec{u} \times \vec{b}^{(1)} \right\rangle_p \right) + \nabla \times \left(V^{(1)} \left\langle \vec{u} \times \vec{b}^{(0)} \right\rangle_p \right) \\ &+ \nabla \times \left(\left\langle \vec{v}_b \times \vec{b}^{(0)} \right\rangle_p \right) + \eta \nabla^2 \left\langle \vec{B}^{(1)} \right\rangle_p , \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{b}^{(1)}}{\partial t} =& \nabla \times \left(V^{(0)}\, \vec{u} \times \left\langle \vec{B}^{(1)} \right\rangle_p \right) + \nabla \times \left(V^{(1)}\, \vec{u} \times \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right) \\ &+ \nabla \times \left(\vec{v}_b \times \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right) + \eta \nabla^2 \vec{b}^{(1)} . \end{aligned} \tag{3.16}$$

La seconde équation admet des solutions de la forme

$$\vec{b}^{(1)} = \mathcal{M} \left\langle \vec{B}^{(1)} \right\rangle_p + \frac{V^{(1)}}{V^{(0)}} \mathcal{M} \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p + \vec{b}_b^{(1)} ,$$

où $\vec{b}_b^{(1)}$ est solution de $\frac{\partial \vec{b}_b^{(1)}}{\partial t} - \eta \nabla^2 \vec{b}_b^{(1)} = \nabla \times \left(\vec{v}_b \times \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right)$ et, par linéarité en $\left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p$, nous l'écrivons formellement $\vec{b}_b^{(1)} = \mathcal{M}_b \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p$. Cela permet d'écrire l'équation 3.15 comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\langle \vec{B}^{(1)} \right\rangle_p =& 2\, V^{(1)} \nabla \times \left(\left\langle \vec{u} \times \mathcal{M} \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right\rangle_p \right) + \nabla \times \left(\left\langle \vec{v}_b \times \mathcal{M} \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right\rangle_p \right) \\ &+ V^{(0)} \nabla \times \left(\left\langle \vec{u} \times \mathcal{M}_b \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right\rangle_p \right) . \end{aligned} \tag{3.17}$$

En appliquant la condition de solvabilité nous obtenons la première correction au seuil

$$\frac{V^{(1)}}{V^{(0)}} = - \frac{V^{(0)} \left\langle \vec{C} | \nabla \times \left\langle \vec{u} \times \mathcal{M}_b \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right\rangle_p \right\rangle + \left\langle \vec{C} | \nabla \times \left\langle \vec{v}_b \times \mathcal{M} \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right\rangle_p \right\rangle}{2 \left\langle \vec{C} | \nabla \times \alpha \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right\rangle} , \tag{3.18}$$

où $\vec{C}$ est un élément du noyau de $\mathcal{L}^\dagger$ l'adjoint de $\mathcal{L}$.

Calculons cette correction pour les différents exemples présentés en annexe. Dans le cas où la perturbation est un autre réseau d'écoulements hélicoïdaux de vitesse W et de vecteur d'onde $n\,k$ avec $n \geq 2$, il est facile de montrer que $\left\langle \vec{u} \times \mathcal{M}_b \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right\rangle_p$ et $\left\langle \vec{v}_b \times \mathcal{M} \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right\rangle_p$ sont nuls car $\vec{u}$ et $\mathcal{M} \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p$ sont des termes fluctuants de vecteur d'onde k tandis que $\mathcal{M}_b \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p$ et $\vec{v}_b$ sont de vecteur d'onde $n\,k$. La moyenne de leur produit est donc nulle, ainsi que la première correction au seuil, $V^{(1)} = 0$.

Dans le cas de l'écoulement de Roberts forcé paramétriquement, la perturbation de vitesse est périodique de période 2τ et vaut alternativement $\delta\vec{v}_b = \pm W\,\vec{u}$. Dans le produit scalaire, intervient une moyenne temporelle et les contributions des termes moyennés sur chaque demi-période sont opposées. Là encore, $V^{(1)}$ est nul.

Dans le cas où $\vec{v}_b$ est un bruit de moyenne nulle, nous choisissons un produit scalaire dans lequel intervient une moyenne sur les réalisations du bruit. Dans l'expression de $V^{(1)}$ n'interviennent que des termes linéaires en $\vec{v}_b$ et leurs moyennes sur les réalisations du bruit sont nulles. Nous retrouvons que la modification du seuil produite par le bruit est nulle au premier ordre soit $V^{(1)} = 0$.

3.3.2 Seconde correction au seuil

Calculons maintenant la correction au second ordre dans le cas où celle au premier ordre est nulle. En développant l'équation 3.10 au second ordre en δ, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left\langle \vec{B}^{(2)} \right\rangle_p}{\partial t} &= \nabla \times \left(V^{(0)} \left\langle \vec{u} \times \vec{b}^{(2)} \right\rangle_p \right) + \nabla \times \left(V^{(2)} \left\langle \vec{u} \times \vec{b}^{(0)} \right\rangle_p \right) \\
&\quad + \nabla \times \left(\left\langle \vec{v}_b \times \vec{b}^{(1)} \right\rangle_p \right) + \eta \nabla^2 \left\langle \vec{B}^{(2)} \right\rangle_p , \qquad (3.19) \\
\frac{\partial \vec{b}^{(2)}}{\partial t} &= \nabla \times \left(V^{(0)}\, \vec{u} \times \left\langle \vec{B}^{(2)} \right\rangle_p \right) + \nabla \times \left(V^{(2)}\, \vec{u} \times \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p \right) \\
&\quad + \nabla \times \left(\vec{v}_b \times \left\langle \vec{B}^{(1)} \right\rangle_p \right) + \eta \nabla^2 \vec{b}^{(2)} . \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

La solution de l'équation 3.20 s'écrit

$$\vec{b}^{(2)} = \mathcal{M} \left\langle \vec{B}^{(2)} \right\rangle_p + \frac{V^{(2)}}{V^{(0)}} \mathcal{M} \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p + \vec{b}_b^{(2)} , \qquad (3.21)$$

où $\vec{b}_b^{(2)}$ est solution de $\frac{\partial \vec{b}_b^{(2)}}{\partial t} - \eta \nabla^2 \vec{b}_b^{(2)} = \nabla \times \left(\vec{v}_b \times \left\langle \vec{B}^{(1)} \right\rangle_p \right)$, ce qui permet de calculer la seconde correction au seuil en appliquant la condition de solvabilité à l'équation 3.19.

Nous obtenons

$$\frac{V^{(2)}}{V^{(0)}} = -\frac{V^{(0)}\left\langle \vec{C}|\nabla\times\left\langle \vec{u}\times\vec{b}_b^{(2)}\right\rangle_p\right\rangle + \left\langle \vec{C}|\nabla\times\left\langle \vec{v}_b\times\mathcal{M}\left\langle \vec{B}^{(1)}\right\rangle_p\right\rangle_p\right\rangle}{2\left\langle \vec{C}|\nabla\times\alpha\left\langle \vec{B}^{(0)}\right\rangle_p\right\rangle}$$
$$-\frac{\left\langle \vec{C}|\nabla\times\left\langle \vec{v}_b\times\vec{b}_b^{(1)}\right\rangle_p\right\rangle}{2\left\langle \vec{C}|\nabla\times\alpha\left\langle \vec{B}^{(0)}\right\rangle_p\right\rangle}, \tag{3.22}$$

où $\left\langle \vec{B}^{(1)}\right\rangle_p$ est solution de

$$\mathcal{L}\left\langle \vec{B}^{(1)}\right\rangle_p = \nabla\times\left\langle \vec{v}_b\times\vec{b}^{(0)}\right\rangle_p + V^{(0)}\nabla\times\left\langle \vec{u}\times\vec{b}_b^{(1)}\right\rangle_p, \tag{3.23}$$

et $\vec{b}_b^{(1)}$ est solution de

$$\frac{\partial\,\vec{b}_b^{(1)}}{\partial\,t} - \eta\nabla^2\vec{b}_b^{(1)} = \nabla\times\left(\vec{v}_b\times\left\langle \vec{B}^{(0)}\right\rangle_p\right). \tag{3.24}$$

Étudions le cas où la perturbation en vitesse est un sous-réseau d'écoulements hélicoïdaux de vitesse W. Nous obtenons $\vec{b}_b^{(1)} = \frac{1}{\delta}\mathcal{M}_n\left\langle \vec{B}^{(0)}\right\rangle_p$ avec

$$\mathcal{M}_n\left\langle \vec{B}^{(0)}\right\rangle_p = -\frac{W}{\eta\,n\,k}\begin{pmatrix} sin(n\,k\,y)\left\langle \vec{B}_y^{(0)}\right\rangle_p - sin(n\,k\,z)\left\langle \vec{B}_z^{(0)}\right\rangle_p \\ -cos(n\,k\,z)\left\langle \vec{B}_z^{(0)}\right\rangle_p \\ -cos(n\,k\,y)\left\langle \vec{B}_y^{(0)}\right\rangle_p \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Ainsi $\left\langle \vec{u}\times\vec{b}_b^{(1)}\right\rangle_p$ et $\left\langle \vec{v}_b\times\vec{b}^{(0)}\right\rangle_p$ sont nuls car les champs de vitesses et les champs magnétiques n'ont pas la même période spatiale. Nous déduisons de l'équation 3.23 que $\left\langle \vec{B}^{(1)}\right\rangle_p$ est nul. Le seul terme non nul dans l'expression de $V^{(2)}$ vient de $\left\langle \vec{C}|\nabla\times\left\langle \vec{v}_b\times\vec{b}_b^{(1)}\right\rangle_p\right\rangle$. Comme nous l'avons montré en annexe, nous avons $\left\langle \vec{v}_b\times\vec{b}_b^{(1)}\right\rangle_p = \frac{1}{n}\left(\frac{W}{\delta V}\right)^2\alpha\left\langle \vec{B}^{(0)}\right\rangle_p$ où $\alpha\left\langle \vec{B}^{(0)}\right\rangle_p = V^{(0)}\left\langle \vec{u}\times\mathcal{M}\left\langle \vec{B}^{(0)}\right\rangle_p\right\rangle_p$ comme défini par l'équation 3.38. Ainsi la perturbation au seuil vaut

$$V^{(2)} = -\frac{V^{(0)}}{2\,n}\left(\frac{W}{\delta\,V^{(0)}}\right)^2, \tag{3.26}$$

et en notant R_{mc} le seuil sans perturbation, le nouveau seuil s'écrit

$$R_{mc}(W) = R_{mc}^{(0)} \left(1 - \frac{1}{2\,n} \left(\frac{W}{V} \right)^2 \right) . \tag{3.27}$$

Notre développement perturbatif nous a permis de retrouver le résultat obtenu par le calcul exact en équation 3.50.

Étudions le cas du forçage paramétrique. Dans la limite où τ est grand devant l^2/η, nous négligeons les régimes transitoires pour $\vec{b}_b^{(1)}$ qui vaut alternativement $\pm\frac{W}{\delta V}\mathcal{M}\left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p$. Son produit avec la perturbation de vitesse est alors de signe constant et la moyenne vaut $\left\langle \vec{v}_b \times \vec{b}_b^{(1)} \right\rangle_p = \left(\frac{W}{\delta V}\right)^2 \alpha \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p$. Le calcul des autres termes de l'équation 3.22 nécessite de résoudre l'équation 3.23. Le calcul de $\left\langle \vec{B}^{(1)} \right\rangle_p$ montre qu'il est proportionnel à $\left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p$ et que sa dépendance temporelle est une fonction en dents de scie, périodique, qui vaut t pour t compris entre 0 et τ et $2\tau - t$ pour t compris entre τ et $2\,\tau$. Le produit d'une telle fonction avec un terme dont la valeur entre τ et $2\,\tau$ est l'opposée de la valeur entre 0 et τ est de moyenne nulle. Ainsi, toutes les autres contributions à $V^{(2)}$ sont nulles et nous retrouvons le résultat prouvé en annexe

$$R_{mc}(W) = R_{mc}^{(0)} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{W}{V} \right)^2 \right) . \tag{3.28}$$

Dans le cas où la perturbation est la composante turbulente de l'écoulement, nous résolvons l'équation 3.24 par transformée de Fourier. Nous utilisons les conventions introduites page 85 et obtenons

$$\hat{\vec{b}}_b^{(1)}(\vec{k},\omega) = \frac{i}{-i\,\omega + \eta\,k^2} \left\langle \vec{B}^{(0)} \right\rangle_p . \vec{k}\,\hat{\vec{v}}_b(\vec{k},\omega) . \tag{3.29}$$

Le champ $\vec{b}_b^{(1)}$ s'exprime donc comme la somme de termes de même dépendance spatiale et temporelle que le champ de vitesse turbulent $\vec{v}_b$. Nous supposons que la taille caractéristique des fluctuations de vitesse turbulente est très petite devant celle de l'écoulement qui crée la dynamo ($\vec{u}$). Les moyennes sur une période de l'écoulement $\langle \vec{u} \times \vec{v}_b \rangle_p$ et $\left\langle \vec{v}_b \times \vec{b}^{(0)} \right\rangle_p$ sont donc nulles. Dans cette limite, la solution de l'équation 3.23 est alors $\left\langle \vec{B}^{(1)} \right\rangle_p = 0$. Ainsi $\vec{b}_b^{(2)} = 0$ et le seul terme non nul de l'équation 3.22 est celui proportionnel à $\left\langle \vec{C} | \nabla \times \left\langle \vec{v}_b \times \vec{b}_b^{(1)} \right\rangle_p \right\rangle$. Ce terme est quadratique en la perturbation de vitesse; sa moyenne sur les réalisations (qui est introduite naturellement par l'utilisation de la forme bilinéaire) n'a pas de raison d'être nulle.

Le calcul de $\vec{v}_b \times \vec{b}_b^{(1)}$ se fait de la même façon que pour calculer l'effet alpha turbulent (voir page 86) et nous obtenons

$$\left\langle (\vec{v}_b \times \vec{b}_b^{(1)})_i \right\rangle_s = \alpha_{ij} \left\langle \vec{B}_j^{(0)} \right\rangle_p , \tag{3.30}$$

où α_{ij} est le tenseur de l'effet alpha turbulent qui est relié au tenseur spectral des corrélations du champ de vitesse $\delta\vec{v}_b$ (voir équation 3.56) par

$$\delta^2\,\alpha_{ij} = i\,\eta\,\epsilon_{ivl}\iint \Phi_{vl}\frac{k^2\,k_j}{\omega^2+\,(\eta\,k^2)^2}\,d\vec{k}\,d\omega\,. \tag{3.31}$$

A l'aide de la forme de $\vec{C}$, nous calculons la seconde correction au seuil d'instabilité. Si la turbulence est incompressible, le tenseur de l'effet α turbulent est symétrique [16] et nous obtenons

$$\frac{\delta^2\,V^{(2)}}{V^{(0)}} = \frac{\alpha_{yy}+\alpha zz}{4\frac{V^{(0)\,2}}{\eta\,k}}\,. \tag{3.32}$$

Ce développement fait apparaître clairement l'additivité des effets alpha créés à diverses échelles spatio-temporelles. Le déplacement du seuil peut ainsi être déterminé en écrivant le tenseur de l'effet alpha total comme $\alpha_{tot} = \alpha_u + \alpha_{turb}$ où $\alpha_u = -\frac{V^2}{\eta\,k}$ est créé par l'écoulement moyen et α_{turb} par la turbulence. En adaptant le critère de seuil donné par l'équation 3.42, nous retrouvons dans la limite d'une turbulence de faible amplitude le décalage calculé par l'équation 3.32.

Nous avons pu calculer la seconde correction au nombre de Reynolds magnétique critique créée par la partie turbulente de l'écoulement. Dans cette correction s'introduit naturellement le tenseur de l'effet alpha turbulent. A cet ordre, seuls deux termes diagonaux de ce tenseur entrent en jeu, ce sont les termes qui sont non nuls pour l'effet alpha de l'écoulement moyen. L'écoulement moyen $(V\,\vec{u})$ est à hélicité positive et effet alpha négatif $(-\frac{V^2}{\eta\,k})$. Le seuil est donc abaissé si l'effet alpha créé par la turbulence $(\alpha_{yy}+\alpha_{zz})$ est de même signe que celui de l'écoulement moyen. Si les fluctuations sont isotropes, l'effet alpha est un scalaire de signe opposé à celui de l'hélicité. Le seuil est alors abaissé si l'hélicité de la turbulence est de même signe que celle de l'écoulement moyen. Au contraire si l'hélicité de la turbulence est de signe opposé à celle de l'hécoulement moyen, le seuil est augmenté. Si, par exemple pour des raisons de symétries, l'hélicité de la turbulence est nulle, la seconde correction au seuil d'instabilité s'annulle. Il est possible que dans l'expérience de Karlsruhe les fluctuations aient une très faible hélicité et produisent donc un effet alpha turbulent négligeable devant celui créé par l'écoulement grande échelle, ce qui explique que le seuil mesuré expérimentalement est très proche du seuil calculé sans tenir compte des fluctuations turbulentes.

Compléments

3.A Étude de diverses dynamos alpha-alpha laminaires

3.A.1 Problème cinématique pour un écoulement simple

Nous allons étudier un écoulement proposé par G.O. Roberts [14] dont le champ de vitesse dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ s'écrit

$$\vec{v} = V(cos\, k\, y - cos\, k\, z, sin\, k\, z, sin\, k\, y)\,, \tag{3.33}$$

et dont nous avons tracé les lignes de courant en figure 1.9 page 32. La vitesse est $2\,\pi/k$-périodique par rapport à y et z. L'écoulement est tridimensionnel et est constitué d'un réseau d'écoulements hélicoïdaux. Deux écoulements voisins ont des vitesses axiales suivant $\vec{u}_x$ opposées et des vitesses azimutales symétriques par rapport à un plan contenant l'axe $\vec{u}_x$. Ainsi leurs hélicités sont égales. L'étude est basée sur la séparation d'échelle entre la partie du champ qui varie lentement dans l'espace et la partie du champ qui varie sur la taille d'un écoulement hélicoïdal. Nous parlons dans ce paragraphe de fluctuations du champ au sens de variations spatiales de période $2\,\pi/k$ et pas au sens des fluctuations turbulentes. Nous introduisons la moyenne sur une période de l'écoulement $P =]-\pi/k, \pi/k] \times]-\pi/k, \pi/k]$ et notons le champ magnétique moyenné sur une période $\left\langle \vec{B} \right\rangle_p = \frac{k^2}{4\,\pi^2} \iint\limits_{(x,y)\in P} \vec{B}\, dx\, dy$. Le terme fluctuant spatialement est $\vec{b} = \vec{B} - \left\langle \vec{B} \right\rangle_p$. Remarquons que $\left\langle \vec{v} \right\rangle_p = \vec{0}$.

En moyennant l'équation d'induction, il vient

$$\frac{\partial \left\langle \vec{B} \right\rangle_p}{\partial t} = \nabla \times \left(\left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle_p \right) + \eta \nabla^2 \left\langle \vec{B} \right\rangle_p\,. \tag{3.34}$$

En soustrayant cette dernière équation à l'équation d'induction, nous obtenons l'équation vérifiée par $\vec{b}$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \left\langle \vec{B} \right\rangle_p \right) + \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{b} \right) - \nabla \times \left(\left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle_p \right) + \eta \nabla^2\, \vec{b}\,. \tag{3.35}$$

Nous nous plaçons dans la limite où $\vec{b}$ est faible devant $\left\langle \vec{B} \right\rangle_p$ et cette dernière équation prend la forme simplifiée

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} - \eta \nabla^2 \vec{b} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \left\langle \vec{B} \right\rangle_p \right) . \tag{3.36}$$

En résolvant cette équation nous obtenons $\vec{b}$ en fonction de $\vec{v}$ et $\left\langle \vec{B} \right\rangle_p$ et pouvons calculer le terme $\left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle_p$ de l'équation 3.34, ce qui donne une équation fermée pour $\left\langle \vec{B} \right\rangle_p$. Se placer dans la limite de $\vec{b}$ petit devant $\left\langle \vec{B} \right\rangle_p$ permet de calculer analytiquement le terme de moyenne des fluctuations. Notons l la taille caractéristique de l'écoulement, c'est un calcul au premier ordre en $v\,l/\eta$ du type de ceux nommés "first order smoothing" en turbulence.

Comme $\left\langle \vec{B} \right\rangle_p$ est le champ moyenné, il varie très lentement par rapport aux champs $\vec{v}$ et $\vec{b}$ et peut être considéré comme constant dans l'équation 3.36. La solution aux temps longs de cette équation s'écrit

$$\vec{b} = -\frac{V}{\eta\, k} \begin{pmatrix} sin(k\,y) \left\langle \vec{B}_y \right\rangle_p - sin(k\,z) \left\langle \vec{B}_z \right\rangle_p \\ -cos(k\,z) \left\langle \vec{B}_z \right\rangle_p \\ -cos(k\,y) \left\langle \vec{B}_y \right\rangle_p \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

et nous notons cette égalité $\vec{b} = \mathcal{M} \left\langle \vec{B} \right\rangle_p$. Le calcul du terme $\left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle_p$ donne

$$\left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle_p = \alpha . \left\langle \vec{B} \right\rangle_p = -\frac{V^2}{\eta\, k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \left\langle \vec{B} \right\rangle_p \tag{3.38}$$

où α est l'opérateur qui relie la moyenne des fluctuations au champ magnétique moyen. C'est l'effet alpha pour cet écoulement.

Il est alors possible de chercher les modes instables de l'équation 3.34 sous la forme

$$\left\langle \vec{B} \right\rangle_p = \exp i\, K\, x \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

où K est le vecteur d'onde du champ moyen qui est très petit par rapport à k. B_x, B_y, B_z ne dépendent que du temps et vérifient les équations

$$\begin{aligned} \frac{d\,B_x}{dt} &= -\eta\, K^2\, B_x\,, \\ \frac{d\,B_y}{dt} &= \frac{V^2\, i\, K}{\eta\, k} B_z - \eta\, K^2\, B_y\,, \\ \frac{d\,B_z}{dt} &= -\frac{V^2\, i\, K}{\eta\, k} B_y - \eta\, K^2\, B_z\,. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Le vecteur (B_x, B_y, B_z) est donc dans le noyau de l'opérateur $\mathcal{L}$ défini par

$$\mathcal{L}. = \frac{\partial .}{\partial t} + \begin{pmatrix} \eta\, K^2 & 0 & 0 \\ 0 & \eta\, K^2 & -\frac{V^2\, i\, K}{\eta\, k} \\ 0 & \frac{V^2\, i\, K}{\eta\, k} & \eta\, K^2 \end{pmatrix} . \tag{3.41}$$

B_x décroît exponentiellement à zéro mais les variables $B_\pm = B_y \pm i\, B_z$ vérifient

$$\frac{d\, B_\pm}{dt} = (\pm \frac{V^2\, K}{\eta\, k} - \eta K^2)\, B_\pm\,, \tag{3.42}$$

et B_+ peut croître à condition que

$$\frac{V^2}{\eta^2\, k\, K} \geq 1\,. \tag{3.43}$$

Pour définir le nombre de Reynolds magnétique, utilisons l la taille d'un écoulement hélicoïdal ($k\, l = 2\,\pi$) et L la taille de l'ensemble de ces écoulements. Si nous considérons des conditions aux limites périodiques, le seuil correspond à $K\, L = 2\pi$, soit

$$R_{mc} = \frac{V\sqrt{l\, L}}{\eta} = 2\,\pi\,. \tag{3.44}$$

Pour une valeur de R_m supérieure à R_{mc}, il y a création de champ magnétique. Contrairement au cas de la dynamo de Ponomarenko, bien que la structure spatiale du mode instable brise l'invariance par translation le long de l'axe $\vec{u}_x$, la bifurcation est stationnaire. En effet, l'écoulement est invariant par rotation d'angle π par rapport à la bissectrice du plan $(0yz)$. Les deux directions $x \leq 0$ et $x \geq 0$ sont équivalentes et la structure n'ayant alors pas de direction privilégiée, elle reste stationnaire. Les termes sources de l'instabilité sont les deux termes couplant B_y et B_z dans le système d'équations 3.40. Ce sont les termes non diagonaux de l'opérateur 3.41 et ils sont dûs à l'effet alpha. Cette dynamo est dite de type alpha-alpha.

Le mode instable a la forme

$$\left\langle \vec{B} \right\rangle_p = \exp i\, K\, x \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{3.45}$$

Le champ est uniforme dans les plans x constants et décrit une hélice lorsque nous nous déplaçons le long de l'axe $\vec{u}_x$. Bien que le champ moyen ne dépende que d'une coordonnée spatiale et soit invariant par rotation autour de l'axe $\vec{u}_x$, il n'en va pas de même du champ total $\vec{B} = \left\langle \vec{B} \right\rangle + \vec{b}$ et les théorèmes anti-dynamo ne s'appliquent pas.

Calculons l'opérateur $\mathcal{L}^\dagger$ adjoint de $\mathcal{L}$. Introduisons le produit scalaire $\left\langle \vec{C} | \vec{B} \right\rangle = \frac{1}{T\, V} \iint\limits_{0 \leq t \leq T,\, \vec{r} \in P} \vec{C}^{\,*}.\vec{B}\, dt d\vec{r}$. C'est le produit scalaire local intégré sur une période de l'écoulement

et sur le temps. Pour des champs moyens dont la dépendance spatiale est proportionnelle à $\exp i\,K\,x$, l'adjoint s'écrit

$$\mathcal{L}^{\dagger}. = \frac{\partial\,.}{\partial t} + \begin{pmatrix} \eta\,K^2 & 0 & 0 \\ 0 & \eta\,K^2 & -\frac{V^2\,i\,K}{\eta\,k} \\ 0 & \frac{V^2\,i\,K}{\eta\,k} & \eta\,K^2 \end{pmatrix} . \tag{3.46}$$

Il s'agit du même opérateur que $\mathcal{L}$, au terme de dérivée temporelle près qui est changé en son opposé. Le mode instable du problème direct, défini par l'équation 3.45, étant stationnaire, il fait aussi parti du noyau de l'opérateur adjoint.

L'expression de α a été déterminée dans la limite de faible vl/η. Au seuil d'instabilité et dans la limite où L/l est grand, $\vec{b}$ est petit devant $\left\langle \vec{B} \right\rangle_p$ comme le montre l'équation 3.37. Nous souhaitons calculer α à l'ordre suivant en vl/η. Pour cela, nous résolvons perturbativement l'équation 3.35 à l'aide du schéma suivant: $\left\langle \vec{B} \right\rangle_p$ crée un champ $\vec{b}^{(0)}$ solution de l'équation 3.36 et dont la solution est donnée par l'équation 3.37; en introduisant le champ $\vec{b}^{(0)}$ dans l'équation 3.35 nous calculons la première correction au champ magnétique $\vec{b}^{(1)}$ dont découle la première correction $\alpha^{(1)} = \left\langle \vec{v} \times \vec{b}^{(1)} \right\rangle_p$. A son tour $\vec{b}^{(1)}$ crée un champ $\vec{b}^{(2)}$ qui donne la seconde correction à α. Afin de différencier l'effet de la vitesse axiale et de la vitesse azimutale, nous donnons le résultat pour un champ de vitesse

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} V(cos(k\,y) - cos(k\,z)) \\ U sin(k\,z) \\ U sin(k\,y) \end{pmatrix} , \tag{3.47}$$

La première correction à α est nulle et il faut calculer $\vec{b}^{(2)}$ pour obtenir

$$\alpha = -\frac{U\,V}{\eta\,k}\left(1 - \frac{U^2}{2\,\eta^2\,k^2}\right) .$$

Pour $U = V$ et dans la limite de faible $\frac{V\,l}{\eta}$ nous retrouvons l'expression 3.38. Le coefficient est linéaire en V, mais si nous augmentons la vitesse azimutale du réseau, l'effet alpha ($|\alpha|$) croît linéairement, atteint un maximum puis décroît. Ce phénomène est causé par l'expulsion du champ magnétique de chaque cellule de l'écoulement par la composante toroïdale de la vitesse. Notons que ce résultat perturbatif n'est pertinent que pour de faibles valeurs de $\frac{U\,l}{\eta}$, ce qui illustre les limites de ce type de résolution des équations d'induction en série d'un nombre de Reynolds magnétique. Une résolution numérique d'un problème similaire [46] montre effectivement une décroissance de l'effet alpha qui tend vers zéro à haut $\frac{U\,l}{\eta}$.

3.A.2 Effet d'un second écoulement hélicoïdal

Un premier pas dans l'étude des fluctuations liées à la turbulence consiste à étudier l'effet de structures spatiales de petites tailles par rapport à celle de l'écoulement qui

engendre la dynamo. Un exemple très simple est constitué d'une superposition de deux réseaux d'écoulements hélicoïdaux que nous notons

$$\vec{v} = V \begin{pmatrix} cos(k\,y) - cos(k\,z) \\ sin(k\,z) \\ sin(k\,y) \end{pmatrix} + W \begin{pmatrix} cos(n\,k\,y) - cos(n\,k\,z) \\ sin(n\,k\,z) \\ sin(n\,k\,y) \end{pmatrix} , \tag{3.48}$$

où n est un entier naturel supérieur à 2. $n\,k$ est le vecteur d'onde du réseau dont la vitesse est proportionnelle à W. Il se déduit du premier réseau par une dilatation de rapport $1/n$ et sa taille caractéristique est donc n fois plus petite que celle de l'autre réseau. Ainsi, si n tend vers l'infini, le petit réseau a une taille caractéristique qui tend vers zéro.

Le calcul est similaire à celui à un seul réseau. En effet, $\vec{b}$ est linéaire en la vitesse et en $\left\langle \vec{B} \right\rangle_p$ et son expression est une somme de deux termes. Le premier est donné par l'équation 3.37 tandis que le second s'en déduit en remplaçant V par W et k par $n\,k$.

Puisque les fréquences spatiales sont différentes, il n'y a pas de couplage entre le champ fluctuant créé par un des sous-réseaux et le champ de vitesse de l'autre réseau. Nous aboutissons à la formule pour la moyenne des fluctuations

$$\left\langle \vec{v} \times \vec{b} \right\rangle_p = \alpha . \left\langle \vec{B} \right\rangle_p = - \left(\frac{V^2}{\eta\,k} + \frac{W^2}{\eta\,n\,k} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\langle \vec{B} \right\rangle_p . \tag{3.49}$$

Le nouveau seuil correspond à l'égalité $\frac{V^2}{\eta^2\,k\,K} + \frac{W^2}{\eta^2\,n\,k\,K} = 1$ et, dans le plan $(R_{m1}, R_{m2}) = (\frac{V}{\eta\sqrt{k\,K}}, \frac{W}{\eta\sqrt{k\,K}})$, correspond à une ellipse que nous dessinons pour le cas $n = 3$ en figure 3.1. Les effets des deux champs de vitesse s'ajoutent pour donner un effet alpha somme des effets alpha des deux réseaux. Seul intervient le carré de chaque vitesse et le seuil est invariant si nous changeons V en $-V$ ou W en $-W$. Notons que l'hélicité est invariante sous l'action de ces deux transformations. La structure du mode instable est la même que dans le cas à un réseau. La bifurcation reste stationnaire car le second réseau est, lui aussi, symétrique par rapport à la bissectrice du plan (Oyz).

Si nous considérons que l'effet du petit réseau de vitesse W est une perturbation de celui du réseau de vitesse V, nous pouvons développer l'équation donnant le seuil en fonction de $\frac{W}{V}$. En définissant le nombre de Reynolds magnétique comme dans le cas à un réseau par $R_m = \frac{V\sqrt{l\,L}}{\eta}$, l'effet de la présence du second sous-réseau est d'abaisser le seuil d'un terme qui, au premier ordre non nul, vaut

$$R_{mc}(W) = R_{mc}^{(0)} \left(1 - \frac{1}{2\,n} \left(\frac{W}{V} \right)^2 \right) , \tag{3.50}$$

où $R_{mc}^{(0)}$ est le seuil pour un écoulement à un seul réseau.

3.A.3 Effet d'un forçage paramétrique

Étudions maintenant l'effet d'une modulation périodique du champ de vitesse. Nous supposons que celui-ci a la dépendance spatiale de l'équation 3.33 mais varie de façon

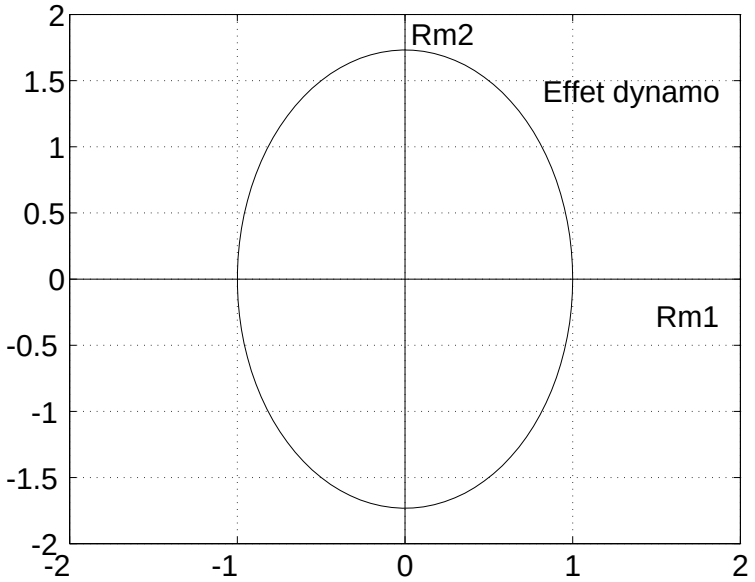

FIG. 3.1 – *Seuil d'instabilité dynamo pour un écoulement constitué de deux réseaux hélicoïdaux. Le nombre de Reynolds magnétique associé à chaque réseau est donné par* $(R_{m1},R_{m2}) = (\frac{V}{\eta\sqrt{k\,K}},\frac{W}{\eta\sqrt{k\,K}})$.

périodique en fonction du temps. Nous notons $2\,\tau$ la période. Pendant une demi-période de durée τ la vitesse est proportionnelle à $V = V - W$ et pendant la période suivante à $V + W$. Il s'agit donc d'un écoulement de Roberts dont le champ de vitesse est modulé périodiquement.

Nous supposons que le temps τ est grand devant le temps caractéristique diffusif de $\vec{b}$ qui vaut l^2/η et considérons que $\vec{b}$ vaut durant chaque demi-période la solution aux temps longs donnée en équation 3.37. Cela revient à négliger les phénomènes transitoires pour $\vec{b}$. Notons que même si τ est grand devant l^2/η, il peut être choisi petit devant le temps caractéristique diffusif du champ moyen L^2/η.

Nous notons $C(V) = \frac{V^2\,K}{\eta k} - \eta K^2$ le taux de croissance du champ magnétique donné par l'équation 3.42. Si nous notons B_0 la valeur du champ à l'instant $t = 0$, il vaut

$$B(\tau) = B_0 \exp\left(C(V-W)\,\tau\right) \text{ au bout d'une demi-période et,}$$
$$B(2\,\tau) = B_0 \exp\left((C(V-W) + C(V+W))\,\tau\right) \text{ au bout d'une période.}$$

Le seuil d'instabilité est donné par la condition $B(2\,\tau) = B(0)$, soit $C(V-W) + C(V+W) = 0$, ce que nous réécrivons

$$\frac{(V+W)^2 + (V-W)^2}{2\,\eta\,k\,K} = 1\,. \tag{3.51}$$

En utilisant la définition du nombre de Reynolds magnétique critique de l'équation 3.44,

nous obtenons

$$R_{mc}(W) = \frac{R_{mc}^{(0)}}{\sqrt{1+(\frac{W}{V})^2}}\,. \tag{3.52}$$

où $R_{mc}^{(0)}$ est le nombre de Reynolds magnétique critique pour $W = 0$. Si la modulation est de faible amplitude, nous pouvons la traiter perturbativement et calculer la première correction en W/V au nombre de Reynolds magnétique critique. Nous obtenons

$$R_{mc}(W) = R_{mc}^{(0)}\left(1 - \frac{W^2}{2\,V^2}\right)\,. \tag{3.53}$$

Le seuil est donc abaissé si l'écoulement est forcé paramétriquement. L'effet est du second ordre en la modulation qui est supposée petite.

3.B L'effet alpha turbulent

Si le champ de vitesse est turbulent et, moyennant certaines hypothèses concernant ses fluctuations, il peut créer du champ magnétique par effet alpha. Pour calculer l'effet alpha dans ce cas, nous introduisons tout d'abord quelques grandeurs caractérisant le spectre des fluctuations de vitesse en suivant les définitions classiques [16, 17]. Pour un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r},t)$, nous notons $\hat{\vec{v}}(\vec{k},\omega)$ sa transformée de Fourier spatio-temporelle définie par

$$\hat{\vec{v}}(\vec{k},\omega) = (2\,\pi)^{-4}\iint \vec{v}(\vec{r},t)\,e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega\,t)}\,d^3\vec{r}\,dt. \tag{3.54}$$

Comme $\vec{v}$ est réel, nous avons la relation $\hat{\vec{v}}(-\vec{k},-\omega) = \hat{\vec{v}}(\vec{k},\omega)^*$.

Si le champ de vitesse est stationnaire et homogène nous définissons son tenseur des corrélations par $R_{ij}(\vec{r}-\vec{r'},t-t') = \left\langle v_i(\vec{r},t)\,v_j(\vec{r'},t')\right\rangle_s$ où la moyenne est réalisée sur les réalisations du champ de vitesse. Pour les composantes de Fourier, nous obtenons

$$\left\langle \hat{v}_i(\vec{k},\omega)^*\,\hat{v}_j(\vec{k'},\omega')\right\rangle_s = \Phi_{ij}(\vec{k},\omega)\,\delta(\vec{k}-\vec{k'})\,\delta(\omega-\omega')\,, \tag{3.55}$$

où Φ_{ij} est le tenseur spectral du champ de vitesse et vérifie

$$\Phi_{ij}(\vec{k},\omega) = (2\,\pi)^{-4}\iint R_{ij}(\vec{r},t)\,e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega\,t)}\,d^3\vec{r}\,dt. \tag{3.56}$$

Comme R_{ij} est réel, nous avons $\Phi_{ij}(-\vec{k},-\omega) = \Phi_{ij}(\vec{k},\omega)^*$ et, en raison de la relation 3.55, $\Phi_{ji}(\vec{k},\omega) = \Phi_{ij}(\vec{k},\omega)^*$. Par ailleurs, comme le champ de vitesse est à divergence nulle, il est aisé de montrer que

$$k_i\Phi_{ij}(\vec{k},\omega) = k_j\Phi_{ij}(\vec{k},\omega) = 0\,, \tag{3.57}$$

où nous sommons sur les indices répétés. Il est possible de relier Φ à l'énergie cinétique moyenne du fluide. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{2}\left\langle \vec{v}^{\,2}\right\rangle_s = \frac{\rho}{2}R_{ii}(0,0) &= \frac{\rho}{2}\iint \Phi_{ii}(\vec{k},\omega)\, d^3\vec{k}\, d\omega \\ &= \rho \int E(k,\omega)\, dk\, d\omega\,, \end{aligned} \tag{3.58}$$

où $E(k,\omega) = \frac{1}{2}\int \Phi_{ii}(\vec{k},\omega)\, dS_k$ et l'intégration est faite sur la sphère de rayon k et les indices répétés sont sommés. $\rho E(k,\omega)\, dk\, d\omega$ est l'énergie cinétique des modes de vecteurs d'onde de norme comprise entre k et $k+dk$ et de pulsation comprise entre ω et $\omega + d\omega$.

Une autre grandeur que nous utiliserons est reliée à l'hélicité. Notons $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$ la vorticité. Nous avons

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{v}\cdot\vec{\Omega}\right\rangle_s &= i\epsilon_{ijk}\iint \Phi_{ik}(\vec{k},\omega)\, k_j\, d^3\vec{k}\, d\omega\,, \\ &= \int F(k,\omega)\, dk\, d\omega\,. \end{aligned} \tag{3.59}$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur de Levy-Civita. De la même façon que nous avons relié $E(k,\omega)$ à la densité spectrale d'énergie cinétique, nous définissons la densité sprectrale d'hélicité par $F(k,\omega) = i\int \epsilon_{ijk}\Phi_{ik}(\vec{k},\omega)k_j dS_k$.

Ces diverses grandeurs introduites, le calcul de l'effet alpha est très similaire à celui réalisé dans le cas laminaire aux paragraphes précédents. Au lieu d'introduire une moyenne sur une periode spatiale de l'écoulement, nous introduisons une moyenne sur les réalisations de l'écoulement turbulent. Les deux équations 3.34, 3.35 sont alors vérifiées par $\vec{b}$ la partie fluctuante du champ et $\left\langle \vec{B}\right\rangle_s$ le champ moyen qui varie sur des durées et des distances caractéristiques grandes devant celles de $\vec{b}$. Nous nous plaçons dans la limite de faible nombre de Reynolds magnétique et l'équation 3.36 est alors vérifiée par $\vec{b}$ que nous calculons par transformée de Fourier

$$\hat{\vec{b}} = \frac{i}{-i\,\omega + \eta\, k^2}\left\langle \vec{B}\right\rangle_s .\vec{k}\,\hat{\vec{v}}\,. \tag{3.60}$$

Nous pouvons alors calculer l'effet alpha dans cette limite et obtenons pour la moyenne des fluctuations l'expression

$$\left\langle (\vec{v}\times\vec{b})_u\right\rangle_s = i\,\epsilon_{uvl}\iint \Phi_{vl}\frac{k_j}{-i\omega + \eta\, k^2}\,\left\langle B_j\right\rangle_s\, d\vec{k}\, d\omega\,. \tag{3.61}$$

En remarquant que $\vec{v}\times\vec{b}$ et $i\,\epsilon_{uvl}\Phi_{vl}$ sont réels, nous pouvons exprimer le tenseur de l'effet alpha par

$$\alpha_{uj} = i\,\eta\,\epsilon_{uvl}\iint \Phi_{vl}\frac{k^2\, k_j}{\omega^2 + (\eta\, k^2)^2}\, d\vec{k}\, d\omega\,. \tag{3.62}$$

Ce tenseur dépend de la nature des fluctuations turbulentes. Si celles-ci sont isotropes, le tenseur est diagonal $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$. Si elles sont aussi invariantes par une symétrie plane, comme α est un pseudo-scalaire, il est nul. Enfin, si l'écoulement est incompressible le tenseur est symétrique.

Il est possible de relier la trace du tenseur à l'hélicité de l'écoulement. Notons $\alpha = \frac{1}{3}\alpha_{ii}$, nous obtenons

$$\alpha = -\frac{\eta}{3}\int F(k,\omega)\frac{k^2}{\omega^2 + (\eta\, k^2)^2}\, dk\, d\omega\,. \tag{3.63}$$

L'effet alpha est donc l'intégrale de la densité spectrale d'hélicité pondérée par $\frac{k^2}{k^2+(\eta\, k^2)^2}$. Notons que contrairement à E, F est de signe indéterminé. La contribution d'un mode $(\vec{k},\omega)$ à l'effet alpha est de signe opposé à son hélicité.

Cet effet, dont l'observation expérimentale n'a pas encore été réalisée, est introduit dans de nombreux modèles de dynamos géophysiques ou astrophysiques. C'est l'effet alpha turbulent.

Deuxième partie

Mécanismes de saturation et énergie magnétique au dessus du seuil d'instabilité

Dans cette partie nous nous intéressons à la saturation du champ magnétique créé par l'instabilité dynamo. Il s'agit de résoudre le problème dynamique et donc d'étudier la modification du champ de vitesse causée par la force de Laplace.

Dans le premier chapitre nous calculons cet effet perturbativement près du seuil d'instabilité dans le cas d'une variante de la dynamo de Ponomarenko où le cylindre en mouvement est constitué de métal liquide. Nous déterminons l'équation d'amplitude du mode instable et ses coefficients sont reliés à la perturbation du champ de vitesse due à la force de Laplace. Dans ce cas le mécanisme de saturation est un freinage du fluide qui diminue l'induction. L'effet est stabilisant et nous prouvons ainsi que l'instabilité est supercritique. En complément à ce chapitre nous menons la même étude dans le cas où la rotation du cylindre est rapide devant sa translation et obtenons des résultats qualitativement similaires. La saturation intervient lorsque la modification du champ de vitesse est calculée en équilibrant la force de Laplace avec le terme visqueux. C'est pourquoi nous appelons loi visqueuse (ou laminaire) cette loi d'échelle pour l'énergie magnétique à saturation.

Dans le second chapitre nous obtenons l'expression de l'énergie magnétique à saturation par analyse dimensionnelle. Dans le cas d'une instabilité dynamo supercritique, l'énergie magnétique près du seuil est proportionnelle à l'écart au seuil multiplié par une fonction inconnue du Prandtl magnétique. La loi d'échelle visqueuse correspond au cas où cette fonction est proportionnelle au Prandtl magnétique. Dans le cas d'un écoulement turbulent nous déterminons une nouvelle loi en considérant que l'énergie magnétique doit être indépendante de la viscosité. Nous comprenons ensuite ces deux lois en identifiant le terme de l'équation de Navier-Stokes qui détermine la modification du champ de vitesse causée par la force de Laplace. Nous déduisons alors une nouvelle loi pour les dynamos dont l'écoulement est en rotation rapide et la force de Coriolis importante. Ces lois d'échelles sont comparées aux diverses mesures existantes. Les dynamos expérimentales obéissent à la loi d'échelle dite turbulente tandis que la loi d'une dynamo en rotation rapide semble plus adaptée au cas des dynamos astrophysiques.

En complément à cette partie nous présentons le calcul de la saturation du champ magnétique créé par une variante fluide de la dynamo de Bullard. La structure spatiale du champ magnétique est simple ce qui rend le calcul tractable sans faire l'hypothèse que le système est près du seuil d'instabilité. Nous montrons que la loi d'échelle pour l'énergie magnétique est la loi laminaire.

Chapitre 1

Problème dynamique pour la dynamo de Ponomarenko

1.1 Développement perturbatif du problème non-linéaire

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement du champ magnétique au dessus du seuil d'instabilité, c'est-à-dire pour $R_m \geq R_{mc}$. Quand le mode instable croît, il exerce une force de Laplace sur le fluide comme le montre l'équation de Navier-Stokes (1.1)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v} = -\nabla \frac{P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho \mu_o}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}\,. \tag{1.1}$$

Cette force va modifier l'écoulement et donc changer l'induction jusqu'à aboutir à une saturation de l'amplitude du champ magnétique. Notons que, l'équation d'induction étant linéaire, c'est uniquement suivant ce processus que peut avoir lieu la saturation. Pour calculer cet effet nous allons utiliser un développement perturbatif près du seuil d'instabilité. Les variables sont adimensionnées en choisissant R, $\mu_o \sigma R^2$, $(\mu_o \sigma R)^{-1}$, $\rho(\mu_o \sigma R)^{-2}$ et $\rho^{1/2}\mu_o^{-1/2}(\sigma R)^{-1}$ comme unités de longueur, temps, vitesse, pression et champ magnétique. Les équations dont sont solutions le champ de vitesse et le champ magnétique sont

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0\,, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \nabla^2 \vec{B}\,, \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0\,, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v} = -\nabla \tilde{P} + P_m\, \nabla^2 \vec{v} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}\,, \tag{1.5}$$

$\tilde{P}$ est la somme de la pression hydrodynamique et de la pression magnétique $(B^2/2)$ qui vient de l'identité $(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} - \vec{\nabla}(B^2/2)$. Le nombre de Prandtl magnétique

$P_m = \frac{\nu}{\eta} = \mu_0 \sigma \nu$ est le rapport entre la viscosité cinématique et la viscosité magnétique. Pour un métal liquide il est très petit (inférieur à 10^{-5}). Notons qu'il n'apparaît qu'un nombre sans dimension dans ce système d'équations. Ce n'est pas surprenant car les conditions aux limites à la paroi s'expriment avec R_m et Rb. Plus précisément, à la paroi nous avons

$$v_\theta(1) = \sqrt{\frac{R_m^2}{1+Rb^2}}\,, \tag{1.6}$$

$$v_z(1) = Rb\sqrt{\frac{R_m^2}{1+Rb^2}}\,. \tag{1.7}$$

Le développement perturbatif est basé sur l'écart au seuil et nous écrivons $R_m = R_{mc}(1+\Lambda\epsilon)$ où Λ est d'ordre un et ϵ est le petit paramètre du développement. Les champs de vitesse et de pression s'écrivent

$$\tilde{P} = \tilde{P}_f + \epsilon\tilde{P}_1 + \epsilon^2\tilde{P}_2 + \cdots,$$
$$\vec{v} = \vec{v}_f + \epsilon\vec{v}_1 + \epsilon^2\vec{v}_2 + \cdots$$

avec

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0\ (1+\Lambda\epsilon),$$
$$\tilde{P}_f = \tilde{P}_0\ (1+\Lambda\epsilon).$$

Les termes indicés X_f sont des termes proportionnels à R_m. En effet, dans le cas de l'écoulement de Ponomarenko (rotation solide et translation), le champ de vitesse (et de pression) créé par la mise en mouvement de la paroi est simplement proportionnel à la vitesse de la paroi et donc au R_m. Notons que cela n'est pas vrai si l'écoulement de base est plus complexe, notamment s'il est lui même issu d'une bifurcation hydrodynamique (comme par exemple dans le cas des rouleaux créés par la permière bifurcation de l'écoulement de Taylor-Couette) mais la méthode reste similaire. Les autres termes sont un développement en puissance de ϵ de la correction en vitesse créée par la force de Laplace.
Le champ magnétique est développé suivant

$$B = \sqrt{\epsilon}\ (B_0 + \epsilon B_1 + \epsilon^2 B_2 + \cdots)$$

La dépendance en $\sqrt{\epsilon}$ s'introduit naturellement puisque c'est par un terme quadratique en champ magnétique que la force de Laplace modifie la vitesse dans (1.5). Nous introduisons un temps lent $T = \epsilon t$ qui décrit la croissance du mode instable.

Il faut alors résoudre les équations ordre par ordre en puissance de ϵ. Les équations (1.2) et (1.4) donnent que le champ magnétique et le champ de vitesse sont à tout ordre à divergence nulle.
Par ailleurs à l'ordre le plus bas nous obtenons

$$\mathcal{L}\vec{B}_0 = 0\,, \tag{1.8}$$

$\mathcal{L}$ est l'opérateur défini par l'équation (1.5) page 39, ce qui signifie que

$$\vec{B}_0(t,T) = A(T) \times \vec{B}_p(r,\theta,z,t) + \textit{complexe conjugué} \tag{1.9}$$

$$= A(T) \times \vec{b}_p(r) \exp i(m\theta + kz + \omega_0 t) + cc \tag{1.10}$$

où $\vec{B}_p$ est le mode instable du problème cinématique et $\vec{b}_p$ sa dépendance radiale comme défini par l'équation (1.7) page 40. En outre, v_f est solution de

$$\frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + (\vec{v}_f.\nabla)\vec{v}_f = -\nabla \tilde{P}_f + P_m \ \nabla^2 \vec{v}_f \,, \tag{1.11}$$

c'est-à-dire solution de l'équation de Navier-Stokes. A cet ordre le fluide est en rotation solide et translation avec une vitesse proportionnelle à R_m.

A l'ordre suivant nous obtenons

$$\mathcal{L}\vec{B}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial T} + \Lambda \nabla \times (\vec{v}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0.\nabla)\vec{v}_1 + (\vec{v}_1.\nabla)\vec{v}_0 = -\nabla \tilde{P}_1 + P_m \ \nabla^2 \vec{v}_1 + (\vec{B}_0.\nabla)\vec{B}_0 \tag{1.13}$$

L'équation d'amplitude est obtenue à partir de l'équation (1.12). En effet, l'existence du développement implique que le produit scalaire du noyau de l'adjoint de $\mathcal{L}$ avec le second membre de l'équation soit nul. Si $\mathcal{L}^\dagger \vec{C} = 0$, il vient

$$\left\langle \vec{C} | \vec{B}_p \right\rangle \frac{dA}{dT} = \Lambda \ \left\langle \vec{C} | \nabla \times (\vec{v}_0 \times \vec{B}_0) \right\rangle + \left\langle \vec{C} | \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \right\rangle . \tag{1.14}$$

Nous obtenons ainsi une équation d'amplitude de la forme

$$\frac{dA}{dt} = \alpha A + \beta |A|^2 A. \tag{1.15}$$

Le premier terme du second membre de l'équation (1.14) est proportionnel à A et à l'écart au seuil: il traduit la croissance exponentielle du mode instable. Nous calculerons sa valeur à l'optimum et en annexe dans la limite de petit nombre de Rossby afin de comparer notre développement au calcul linéaire de Ponomarenko.
Le second terme est cubique en A. En effet $\vec{B}_0$ est proportionnel à A. En outre, $\vec{v}_1$ est quadratique en A puisqu'elle est solution de l'équation (1.13). C'est l'équation de Navier-Stokes linéarisée proche de la vitesse au seuil et forcée par $(\vec{B}_0.\nabla)\vec{B}_0$.
Le forçage est constitué de trois termes quadratiques en A et de dépendance spatio-temporelle (en θ,z,t):
$\exp 2i(m\theta + kz + \omega_0 t)$, $\exp -2i(m\theta + kz + \omega_0 t)$ et indépendant de ces trois coordonnées (respectivement harmonique deux, harmonique moins deux et fréquence nulle). Le calcul de β nécessite à priori la réponse en $\vec{v}_1$ due à chacun de ces termes. Mais il nous faut finalement calculer le produit scalaire de $\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)$ avec $\vec{C}$. Ce dernier terme étant à fréquence simple, les seules contributions non nulles à β viennent de la réponse en vitesse à fréquence double et de la réponse à fréquence nulle. Nous appellerons ces deux contributions β_d et β_0. Dans le tableau suivant (figure 1.1), nous indiquons la dépendance fréquencielle des différents termes et leur contribution au coefficient β.

Dépendance fréquencielle de			Contribution à β
$\vec{B}_0$	$\vec{B}_0 \nabla \cdot \vec{B}_0$ donc $\vec{V}_1$	$\vec{V}_1 \times \vec{B}_0$	
f	2f	3f	non
		f	oui β_d
	0	f	oui β_0
-f		-f	non
	-2f	-f	non
		-3f	non

FIG. 1.1 – *Dépendance fréquencielle et contribution à β. Nous avons posé $f = (m\theta + kz + \omega_0 t)$*

En utilisant des arguments de symétrie, nous aurions pu deviner la forme de cette équation d'amplitude. Le problème étant invariant par rotation autour de l'axe du cylindre, l'équation d'amplitude doit l'être aussi. C'est-à-dire que si A est solution de (1.15) alors $A \exp i(m\theta_o)$ doit être solution quelque soit θ_o. Ceci prohibe de nombreux termes: $\bar{A}$ pour les termes linéaires, A^2, $A\bar{A}$, $\bar{A}^2$ pour les termes quadratiques, A^3, $A\bar{A}^2$ et $\bar{A}^3$ pour les termes cubiques. A l'ordre auquel nous nous limitons, ne sont finalement permis que les deux termes que nous considérons. L'intérêt de notre calcul est de comprendre quel est le sens physique de chaque terme et de calculer numériquement la valeur des coefficients afin de connaître l'amplitude des différents champs à saturation. C'est ce à quoi nous allons nous atteler maintenant.

1.2 Calcul du taux de croissance cinématique

La première étape consiste à calculer le coefficient α comme il est introduit dans l'équation (1.14). En utilisant la définition de $\vec{b_p}$ (équation 1.7 page 40), nous arrivons à

$$\alpha = -\frac{R_m - R_{mc}}{R_{mc}} \; \frac{i\langle \vec{C}|\mu|\vec{B}_0\rangle + R^2\omega\, \vec{c}_\theta{}^*(1)\vec{b}_{pr}(1)}{\left\langle \vec{C}|\vec{B}_0 \right\rangle}. \tag{1.16}$$

Dans le cas de l'optimum nous obtenons

$$\alpha = (0.0268 + 0.00176\, i)(R_m - R_{mc}),$$

ce qui est en très bon accord avec l'analyse linéaire de Ponomarenko (voir page 38). Ceci est une vérification de la formulation de notre développement perturbatif à l'aide des opérateurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^\dagger$. Notons que seul le dernier terme du second membre $(R^2\omega\, \vec{c}_\theta{}^*(1)\vec{b}_{pr}(1))$ contribue à la partie réelle de α. Nous retrouvons ainsi que l'effet oméga est à la source de l'instabilité et qu'il est localisé à la paroi.

Il nous faut maintenant calculer le coefficient suivant de l'équation d'amplitude (β) et pour ce faire les réponses en vitesse.

1.3 Calcul de β_0: réponse à fréquence nulle

Nous souhaitons résoudre l'équation (1.13) lorsque le forçage est à fréquence nulle, c'est-à-dire ne dépend pas de θ, z et t. Dans ce cas la vitesse et la pression n'en dépendent pas non plus et dépendent uniquement de r. Par ailleurs le forçage est proportionnel à $|A|^2$ et il en va de même pour $\vec{v}_1$ dont nous notons v_r, v_θ et v_z les composantes calculées pour $|A|^2 = 1$.

Puisque $\vec{v}_1$ est à divergence nulle, nous avons

$$\frac{1}{r}\frac{d(rv_r(r))}{dr} = 0\,, \tag{1.17}$$

et comme $\vec{v}_1(1) = 0$ par condition de non-glissement à la paroi, il vient $v_r = 0$.

En calculant les autres termes de l'équation, il apparaît que la pression et les composantes de la vitesse suivant θ et z sont découplées. Ces deux dernières sont solutions des deux équations différentielles du second ordre, linéaires et découplées

$$P_m\ (v_\theta'' + \frac{v_\theta'}{r} - \frac{v_\theta}{r^2}) = -2Re(\frac{b_{pr}^*}{r}\frac{d(rb_{p\theta})}{dr} + ik\, b_{pz}^* b_{p\theta}) \tag{1.18}$$

$$P_m\ (v_z'' + \frac{v_z'}{r}) = -2Re(\frac{im}{r}b_{p\theta}^* b_{pz} + b_r^*\frac{db_{pz}}{dr}) \tag{1.19}$$

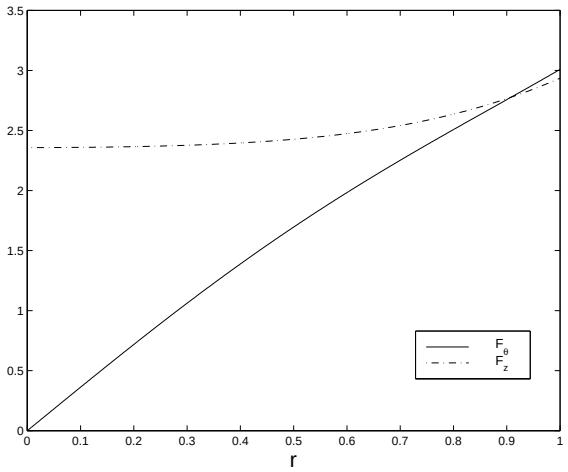

FIG. 1.2 – *Forçage à fréquence nulle à l'optimum.*

De façon évidente $\vec{v}_1$ et donc β_0 sont inversement proportionnels à P_m. Nous faisons le calcul pour $P_m = 1$. Les conditions aux limites en $r = 1$ sont la nullité de la perturbation en vitesse à la paroi donc $v_z(1) = v_\theta(1) = 0$. Sur l'axe du cylindre nous avons $v_\theta(0) = 0$ et $v_z'(0) = 0$. Ces conditions s'obtiennent par exemple à partir des équations (1.18,1.19) en en prenant la limite quand r tend vers 0. Elles correspondent physiquement à la non singularité du champ de vitesse au centre. En effet, une vitesse orthoradiale non nulle au centre créerait une rotation différentielle infinie tandis que si la dérivée de la vitesse axiale était non nulle, le champ de vitesse y formerait un pic.
Nous obtenons une expression explicite de la solution. Nous notons F_θ (resp. F_z) le forçage sur θ (resp. z) qui est le second membre de l'équation (1.18) (resp. 1.19).
Si $l(r) = \int_1^r x(\int_0^x F_\theta(u)du)dx$ et $k(r) = \int_0^r uF_z(u)du$, il vient

$$v_\theta(r) = \frac{1}{r}(l(r) + l(0)(r^2 - 1))\,, \tag{1.20}$$

$$v_z(r) = \int_1^r \frac{k(x)}{x}dx\,. \tag{1.21}$$

Nous avons tracé les composantes du forçage en figure (1.2) et en figure (1.3) la perturbation de vitesse à l'optimum pour $P_m = 1$ et $|A|^2 = 1$.

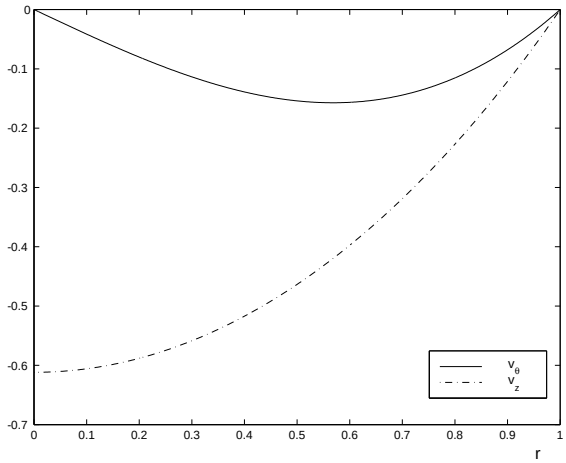

FIG. 1.3 – *Perturbation en vitesse à fréquence nulle pour $P_m = 1$ et $|A|^2 = 1$.*

Nous en déduisons

$$\beta_0 = \frac{-0.0135 - i\,0.0061}{P_m}\,. \tag{1.22}$$

Physiquement la force de Laplace se manifeste en freinant globalement le fluide, diminuant ainsi l'induction jusqu'à atteindre la saturation. C'est le mécanisme de saturation le plus simple qui puisse être imaginé: le champ magnétique créé joue un rôle de modération du terme d'induction qui le fait croître.

1.4 Calcul de β_d: réponse à fréquence double

Le calcul de la réponse à fréquence double est plus compliqué car les composantes de $\vec{v}_1$ et la pression ont une dépendance en $\exp 2i(m\theta + kz + \omega_0 t)$. Ces fonctions sont proportionnelles à A^2 et nous notons v_r, v_θ, v_z et P leurs valeurs pour $A^2 = 1$.

A partir de l'équation (1.13), nous obtenons l'équation vérifiée par la réponse à fréquence double (1.23). La projection sur la base orthoradiale donne trois équations scalaires. Une quatrième est obtenue en en prenant la divergence (1.24).

$$2i\omega_0 v_1 + (v_0.\nabla)v_1 + (v_1.\nabla)v_0 = -\nabla\tilde{P}_1 + P_m\ \nabla^2 v_1 + (B_0.\nabla)B_0 \tag{1.23}$$

$$\Delta\tilde{P}_1 - 2\omega(\frac{v_{1\theta}}{r} + v'_{1\theta}) + 4im\omega\frac{v_{1r}}{r} - \nabla\cdot((B_0.\nabla)B_0) = 0 \tag{1.24}$$

Les conditions aux limites en $r = 1$ sont la nullité de la perturbation en vitesse à la paroi soit $v_z(1) = v_\theta(1) = v_r(1) = 0$. La condition de divergence nulle s'écrit $\frac{1}{r}\frac{d(rv_r)}{dr} + \frac{2imv_\theta}{r} + 2ikv_z = 0$. Nous en déduisons donc une autre condition: $v'_r(1) = 0$.

Les conditions au centre du cylindre s'obtiennent à partir des équations (1.23,1.24) en les multipliant par r^2 (puis r) et en en prenant la limite en 0. Nous obtenons les mêmes conditions qu'à fréquence nulle pour la vitesse, c'est-à-dire $v_\theta(0) = v'_z(0) = 0$. Pour la pression il vient $P(0) = P'(0) = 0$.

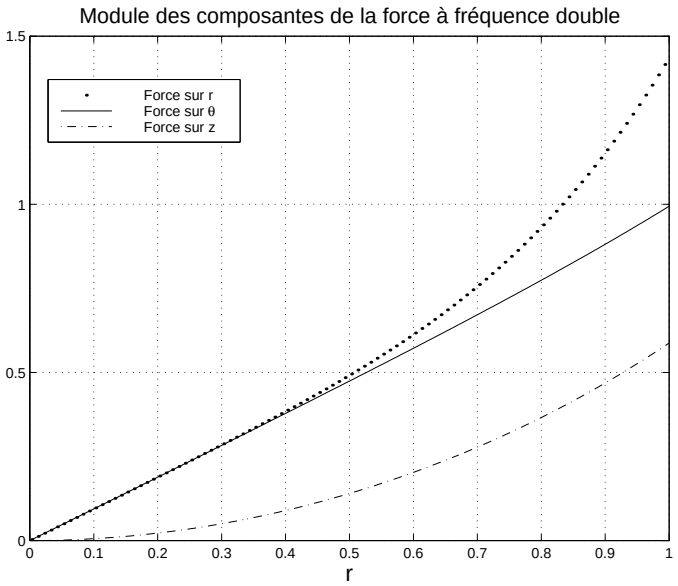

FIG. 1.4 – *Module de la force à fréquence double.*

Il n'est pas possible de trouver une expression analytique simple de la solution à ce problème. Néanmoins nous avons pu calculer numériquement cette solution. A l'aide du logiciel "Mathematica", nous avons implémenté une méthode du tir. Nous définissons une

fonction dont les variables sont les valeurs de $P(1)$, $P'(1)$, $v'_\theta(1)$ et $v'_z(1)$ et qui leur associe les valeurs de $P(0)$, $P'(0)$, $v_\theta(0)$ et $v'_z(0)$ calculées pour la solution du système d'équations (1.23, 1.24) vérifiant les huit conditions aux limites à la paroi (les quatre obtenues par la condition de non-glissement et celles données par les variables). Il s'agit ensuite de trouver le zéro de cette fonction. La solution est celle qui vérifie ces huit conditions à la paroi. Nous sommes limités à des valeurs de P_m de l'ordre de 0.01 pour éviter toute instabilité numérique du programme de résolution. Nous traçons le forçage en figure (1.4) et la solution en vitesse obtenue pour $P_m = 1$ en figure (1.5). Nous traçons ensuite les

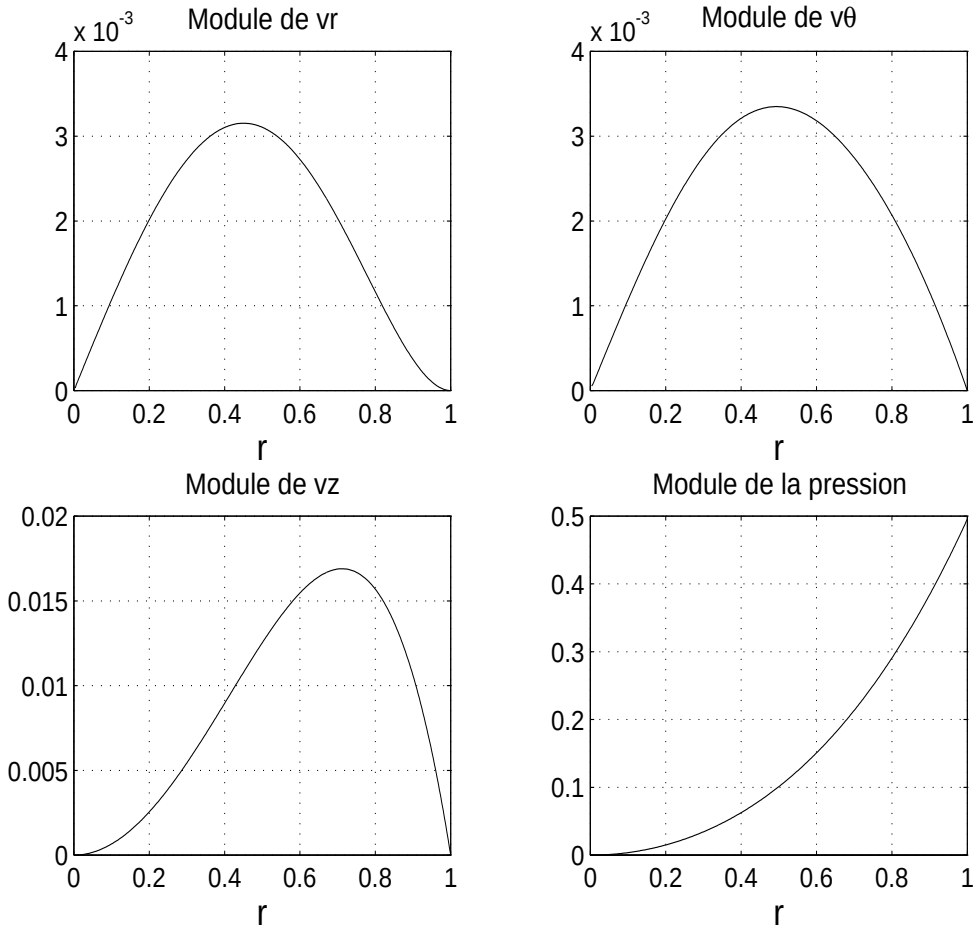

FIG. 1.5 – *Valeur absolue de la perturbation en vitesse et en pression à fréquence double pour $P_m = 1$.*

valeurs de β_d en fonction de P_m (figure 1.6). Pour des valeurs de P_m pas trop faibles, la partie réelle de β_d est positive. En effet, en raison de la dépendance oscillatoire en z, t et θ, la perturbation en vitesse du fluide est localement positive, c'est-à-dire que la réponse à fréquence double correspond par moment à une accélération locale du fluide et donc une augmentation de l'induction. Ce mécanisme explique ainsi la tendance à la sous-criticalité

que présente la réponse à fréquence double pour certaines valeurs de P_m ($Re(\beta_0) \geq 0$). Quoi qu'il en soit, notons que même pour des valeurs élevées de P_m la somme $\beta_d + \beta_0$ a une partie réelle négative.

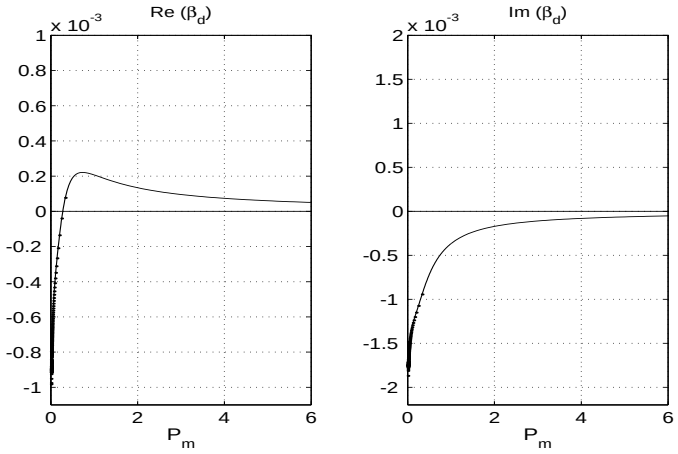

FIG. 1.6 – *Coefficient β_d en fonction de P_m.*

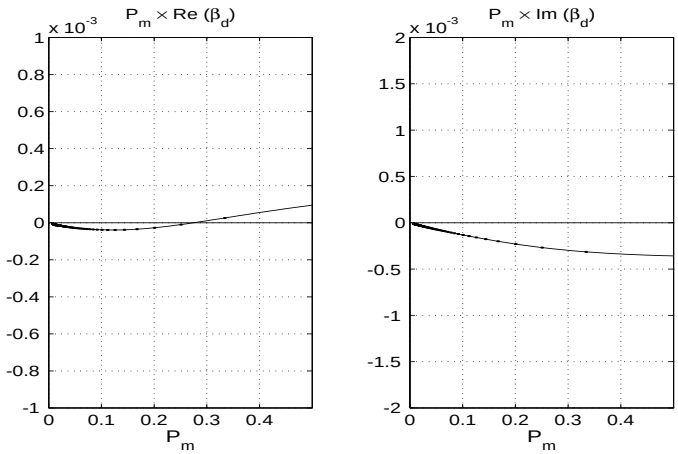

FIG. 1.7 – *Produit $P_m\,\beta_d$ en fonction de P_m.*

Même si le calcul n'est pas possible pour des valeurs de P_m correspondant à celles des métaux liquides, il est clair que la solution et donc β_d ne sont pas inversement proportionnels à P_m. Nous avons tracé en figure (1.7) la valeur du produit $P_m\beta_d$ pour des petites valeurs de P_m. Comme ce produit tend vers 0, la valeur du coefficient β_0 lui est largement supérieure. Physiquement, le mécanisme de saturation vient donc de la réponse à fréquence nulle. Nous quantifions ainsi une propriété énoncée par Bassom et Gilbert [31] pour les écoulements hélicoïdaux.

1.5 Équation d'amplitude et régime saturé

Puisque dans la limite de $P_m \ll 1$, $\beta \simeq \beta_0$, nous avons l'équation d'amplitude

$$\frac{dA}{dt} = \alpha A + \beta |A|^2 A\,, \tag{1.25}$$

$$\alpha = (0.0268 + 0.00175\, i)(R_m - R_{mc})\,, \tag{1.26}$$

$$\beta = \frac{-0.0135 - 0.0061\, i}{P_m}\,. \tag{1.27}$$

Comme $Re(\beta_0)$ est négatif, cette instabilité est supercritique. En d'autres termes, les effets non-linéaires sont stabilisateurs, le diagramme de bifurcation est continu (voir figure 1.8) et il n'y a pas d'hystérésis.

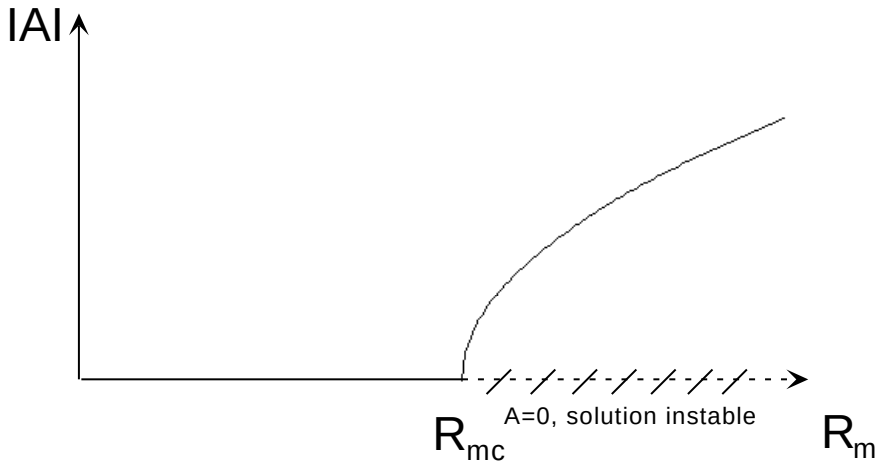

FIG. 1.8 – *Diagramme de bifurcation pour l'amplitude du mode instable pour une instabilité dynamo supercritique.*

Le champ à saturation est calculé à partir de l'équation (1.10).
Avec $|A|^2 = -\frac{Re(\alpha)}{Re(\beta)} = 1.98\, P_m\, (R_m - R_{mc})$, il vient en utilisant à nouveau les unités MKSA

$$\vec{B}_{sat} = A\frac{\eta\sqrt{\rho\mu_o}}{R}\vec{B}_p + cc = 2.82\sqrt{\frac{\rho\nu}{\sigma R^2}}\sqrt{R_m - R_{mc}}\, Re(\vec{B}_p). \tag{1.28}$$

La perturbation en vitesse est

$$\vec{v}_{1sat} = \frac{1.98}{\mu_o \sigma R}(R_m - R_{mc})\, \vec{v}_1\,, \tag{1.29}$$

où $\vec{v}_1$ est la perturbation en vitesse à fréquence nulle calculée pour $P_m = 1$ et $|A|^2 = 1$ et tracée en figure (1.3). Plus le fluide est visqueux plus le champ magnétique sature à une

amplitude élevée car la force de Laplace modifie moins l'écoulement. En ce qui concerne la vitesse, si la viscosité cinématique augmente, le fluide a moins tendance à être freiné par la force de Laplace mais celle-ci sature à une valeur plus élevée et au bilan la viscosité cinématique n'intervient pas dans le champ de vitesse à saturation.
Nous obtenons pour l'énergie magnétique par unité de volume la loi

$$\frac{B^2}{\mu_0} \propto \frac{\rho\nu}{\mu_0 \sigma R^2}(R_m - R_{mc})\,. \tag{1.30}$$

Nous verrons (chapitre suivant) que c'est la forme générale de l'énergie magnétique d'une dynamo saturée par viscosité.

Près du seuil, il n'est évidemment pas pertinent de s'intéresser à une éventuelle équipartition des énergies puisque l'énergie magnétique tend vers zéro au seuil contrairement à l'énergie cinétique qui reste finie (proportionnelle à R_m^2).

Il est plus intéressant de comparer les deux sources de dissipation d'énergie: effet Joule et viscosité. Le système que nous considérons est le liquide en mouvement et le champ magnétique qu'il crée. Le bilan d'énergie cinétique s'écrit [48]

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{fluide} \frac{\rho\vec{v}^2}{2} dV \tag{1.31}$$

$$= \int_{paroi} (\vec{v}.\vec{\sigma'})d\vec{S} - \int_{fluide} \sum_{i,k} \sigma'_{i,k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV + \int_{fluide} \vec{v}.(\frac{(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}}{\mu_o})dV \tag{1.32}$$

où $\sigma'_{i,k}$ est le tenseur visqueux des contraintes qui vaut pour un fluide incompressible

$$\sigma'_{i,k} = \rho\nu(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}). \tag{1.33}$$

Le bilan pour l'énergie magnétique s'écrit

$$\frac{dE_{mag}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{espace} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_o} dV \tag{1.34}$$

$$= \int_{espace} \frac{\vec{B}.(\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}))}{\mu_o} dV + \frac{\eta}{\mu_o}\int_{espace} \vec{B}.\nabla^2\vec{B} dV\,. \tag{1.35}$$

Nous sommons alors les deux équations (1.32,1.35) et utilisons l'identité

$$\int \vec{v}.((\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B})dV = -\int \vec{B}.(\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}))dV \tag{1.36}$$

où le domaine d'intégration est au choix le volume du fluide ou l'espace tout entier puisque la vitesse $\vec{v}$ est nulle hors du fluide. Cette identité traduit le couplage entre l'énergie cinétique et l'énergie magnétique, plus précisément la puissance perdue à travailler contre

les forces de Laplace se retrouve dans la puissance de la force électromotrice. Enfin en utilisant l'égalité vectorielle

$$\vec{B}.\nabla^2\vec{B} = \nabla\cdot(\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})) - (\nabla\times\vec{B})^2\,, \tag{1.37}$$

nous pouvons écrire le bilan d'énergie sous la forme

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(E_{cin}+E_{mag})}{dt} \tag{1.38}$$

$$= \int_{parois}(\vec{v}.\vec{\vec{\sigma'}})d\vec{S} - \frac{\rho\nu}{2}\int_{fluide}\sum_{i,k}(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i})^2 dV - \int_{espace}\frac{j^2}{\sigma}dV \tag{1.39}$$

$$= P_{parois} - P_\nu - P_j \tag{1.40}$$

où $\vec{\jmath} = \frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu_o}$ est la densité de courant. L'énergie E est injectée au niveau des parois avec une puissance P_{parois} et est dissipée par viscosité (avec une puissance P_ν) et par effet Joule (avec une puissance P_j).

Dans le cas de l'écoulement de Ponomarenko, la dissipation par effet Joule est

$$P_j \propto \int j^2 dV \propto \int(\nabla\times B)^2 dV \propto (R_m - R_{mc})\,. \tag{1.41}$$

La puissance dissipée par viscosité est

$$P_\nu \propto \int\sum_{i,k}(\sigma'_{i,k})^2 dV$$

où $\vec{\vec{\sigma'}}$, le tenseur visqueux des contraintes, est linéaire en vitesse (équation 1.33). Pour la dynamo de Ponomarenko nous avons $\vec{v} = \vec{v}_f + \vec{v}_{1sat}$. Or l'écoulement $\vec{v}_f$ (rotation solide et translation) est non dissipatif ($\sigma'(\vec{v}_f) = 0$), nous obtenons donc

$$P_\nu \propto \int(\sigma'(\vec{v}_{1sat}))^2 dV \propto (R_m - R_{mc})^2.$$

Ainsi dans le cas particulier de la dynamo de Ponomarenko et près du seuil d'instabilité, la puissance dissipée par effet Joule est un ordre de grandeur plus importante que la puissance dissipée par viscosité (voir figure 1.9). Notons que cette propriété est liée au caractère non dissipatif de l'écoulement de base. Il reste très intéressant d'évaluer les puissances dissipées pour d'autres écoulements donnant la dynamo afin de voir comment s'y dissipe l'énergie et comment cela influe sur l'amplitude à saturation du champ magnétique.

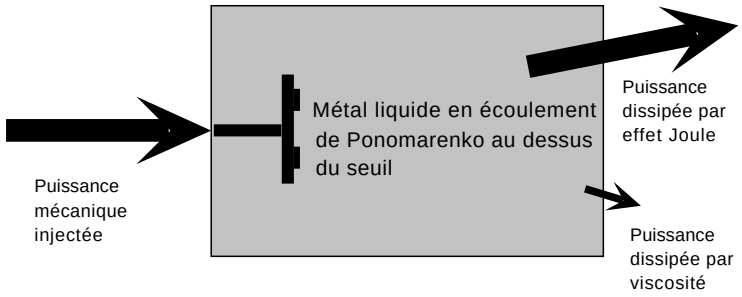

FIG. 1.9 – *Bilan des puissances injectées et dissipées dans la dynamo de Ponomarenko près du seuil d'instabilité.*

Compléments

1.A Dynamo de Ponomarenko dans la limite de forte rotation

1.A.1 Calcul du taux de croissance

Dans la limite de faible nombre de Rossby, nous utilisons les formes asymptotiques des champs (équations 1.24 et 1.25 page 46). Nous obtenons une formule analytique

$$\alpha = \frac{e^{i\pi/3} Rb}{3\sqrt{2}} (R_m - R_{mc}) \,. \tag{1.42}$$

Nous avons comparé en figure (1.10) les valeurs de $\frac{\alpha}{R_m - R_{mc}}$ calculées numériquement en suivant l'analyse linéaire de Ponomarenko et celles données par notre calcul.

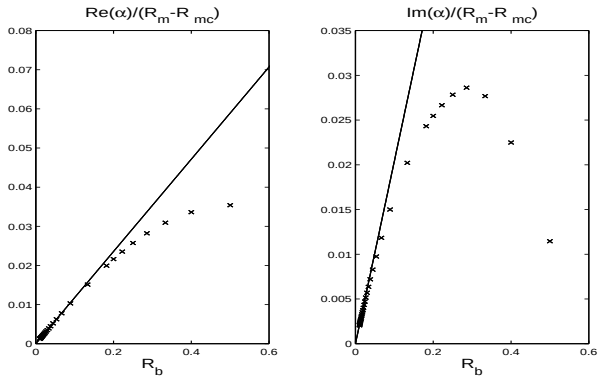

FIG. 1.10 – *Taux de croissance divisé par l'écart au seuil: résolution numérique du critère de Ponomarenko* (×), *expression analytique* (−) *(1.42)*

Comme dans le cas de l'optimum, l'accord entre la résolution numérique et notre calcul est très bon dans la limite de petit Rb, ce qui justifie les différentes étapes du développement.

1.A.2 Saturation: calcul du coefficient β

L'étape suivante consiste à calculer la perturbation en vitesse à l'aide des équations (1.20,1.21). Nous nous sommes limités à la réponse à fréquence nulle. En figure (1.11), nous avons tracé les composantes du forçage et en figure (1.12) nous avons tracé la perturbation en vitesse pour $Rb = .1$ et $P_m = 1$.

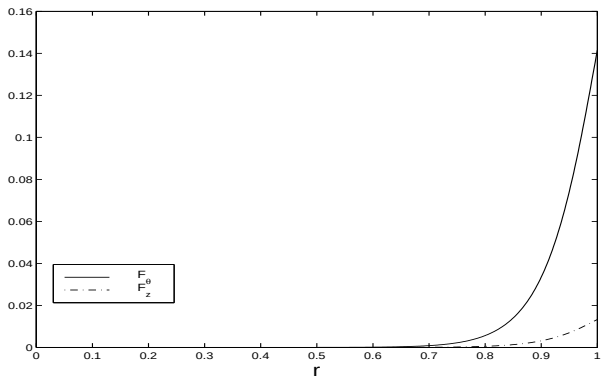

FIG. 1.11 – *Forçage suivant θ et z pour $Rb = .1$.*

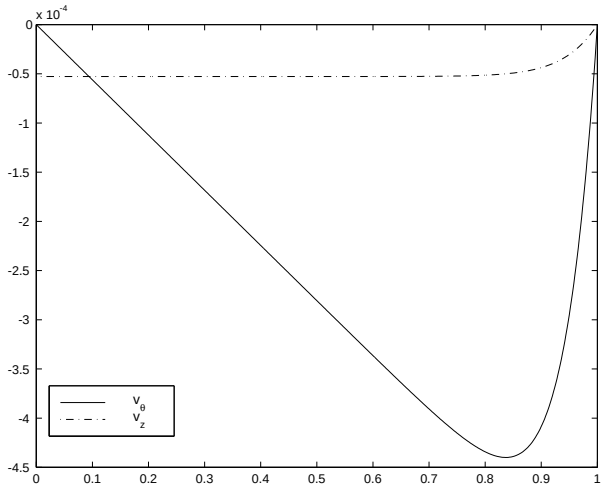

FIG. 1.12 – *Perturbation de vitesse pour $Rb = 0.1$, $P_m = 1$ et $|A|^2 = 1$. En pointillé la vitesse axiale, en trait continu la vitesse azimutale.*

L'effet de la force de Laplace est de freiner le fluide. Cela se produit de façon prépondérante au niveau de la paroi, là où le champ donc la force est le plus intense. Nous pouvons remarquer que la perturbation suivant θ et la perturbation suivant z, bien que d'amplitudes différentes, ont des contributions du même ordre pour le calcul de β. En d'autres

termes le mécanisme de saturation provient d'une diminution des deux composantes de la vitesse, et pas seulement de la vitesse la plus élevée.

Nous trouvons le même comportement en faisant varier Rb et calculons le coefficient β que nous avons tracé en figure (1.13). Il est proportionnel à Rb^4.

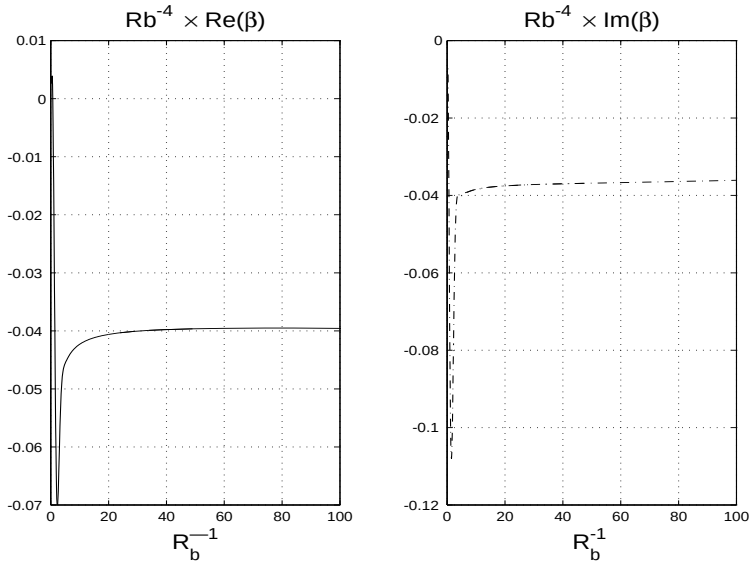

FIG. 1.13 – *Coefficient β pour $P_m = 1$ en fonction de Rb^{-1}*

Notons que le comportement pour Rb^{-1} tendant vers zéro n'a pas de sens physique puisque les développements asymptotiques des champs ne sont alors plus justifiés.

1.A.3 Champs à saturation

Globalement nous retrouvons les mêmes résultats qu'à l'optimum. Comme la partie réelle de β est négative, l'instabilité est supercritique. Physiquement le champ magnétique freine le fluide et diminue l'induction. Là encore, puisque l'écoulement de base est non dissipatif, la dissipation visqueuse est un ordre de grandeur plus faible que la dissipation Joule quand nous nous approchons du seuil.

Nous pouvons aussi calculer l'énergie magnétique à saturation

$$B^2 \propto \frac{1}{R^2 Rb^3} \frac{\rho\nu}{\sigma} (R_m - R_{mc}) \,. \tag{1.43}$$

Comme à l'optimum, nous retrouvons la loi d'échelle en énergie d'une dynamo saturée par viscosité. Une lecture naïve de cette formule laisse croire que l'énergie est d'autant plus grande que le nombre de Rossby est faible. Mais il faut prendre en compte que le seuil R_{mc} diverge lui aussi en Rb^{-3} et devient d'autant plus difficile à atteindre. A R_m fixé et dans la limite de petit Rb, l'amplitude est une fonction croissante de Rb. Pour obtenir le champ le plus intense, il vaut mieux être à des vitesses de translation et de rotation du même ordre de grandeur plutôt qu'à très forte rotation.

Chapitre 2

Lois d'échelle pour l'énergie magnétique au dessus du seuil

2.1 Étude par analyse dimensionnelle

Le calcul du chapitre précédent nous a permis d'expliciter comment s'exprime l'amplitude du champ magnétique dans le cas particulier de la dynamo de Ponomarenko près du seuil d'instabilité. L'objectif de ce chapitre est de généraliser ce raisonnement afin d'obtenir la dépendance de l'énergie en fonction des paramètres du problème pour n'importe quel écoulement générateur de champ magnétique. Bien sûr le calcul exact des coefficients n'est pas possible, aussi allons nous nous contenter d'ordres de grandeur.

Nous commençons par présenter l'analyse dimensionnelle du problème de saturation. Soit un fluide conducteur de résistivité σ, de viscosité cinématique ν, de perméabilité magnétique μ_o et de densité ρ mis en mouvement avec une vitesse caractéristique v dans un volume de taille L. Quelle est l'amplitude du champ magnétique à saturation B au-dessus du seuil d'instabilité?
Ce problème est décrit par sept grandeurs physiques qui s'expriment à l'aide de quatre dimensions indépendantes. D'après le théorème Pi [47], il existe une relation entre trois nombres sans dimensions, disons le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu_o \sigma v L$, le Prandtl magnétique $P_m = \mu_o \sigma \nu$ et $\frac{B^2 \mu_o (\sigma L)^2}{\rho}$. Ce dernier nombre est le rapport entre l'énergie magnétique et une énergie construite à partir de ρ, σ, L et μ_o. C'est le carré du nombre de Lundquist. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{B^2 \mu_0 (\sigma L)^2}{\rho} = \Phi(P_m, R_m)\,. \tag{2.1}$$

La connaissance de cette fonction Φ est la réponse au problème de l'amplitude du champ à saturation. C'est évidemment un problème trop complexe pour être résolu pour toutes les valeurs de R_m et P_m. Néanmoins nous connaissons la forme de cette fonction pour certaines valeurs des paramètres.

En effet, le phénomène physique est une bifurcation de la solution $B = 0$ pour $R_m = R_{mc}$. Il vient trivialement que $\Phi(P_m, R_m) = 0$ pour $R_m \leq R_{mc}$. Mais ce n'est pas tout. Si

nous supposons que la bifurcation est supercritique, la dépendance de B en fonction de R_m est connue près du seuil. En effet, B est alors proportionnel à $\sqrt{R_m - R_{mc}}$. Nous en déduisons que, près du seuil, $\Phi(P_m, R_m) = \psi(P_m)(R_m - R_{mc})$. Dans cette limite il nous suffit désormais de calculer la fonction $\psi(P_m)$.

C'est ce que nous avons fait dans le cas particulier de la dynamo de Ponomarenko pour laquelle nous avons montré que $\psi(P_m) \propto P_m$ et obtenu la loi d'échelle

$$B_{lam}^2 \simeq \frac{\rho\nu}{\sigma L^2}(R_m - R_{mc})\,. \tag{2.2}$$

C'est la loi d'échelle en énergie pour une dynamo saturée par viscosité (nous dirons aussi saturée laminairement) près du seuil d'instabilité. En effet, le calcul a été mené pour un écoulement laminaire et nous avons vu (équations 1.18, 1.19) qu'il correspond au cas où la perturbation en vitesse compense la force de Lorentz par un terme de viscosité.

Dans la limite de très faible P_m, il est possible de poursuivre l'analyse dimensionnelle. Dans ce cas, $Re = R_m P_m^{-1}$ est très grand puisque R_m est plus grand que R_{mc} qui vaut typiquement quelques dizaines dans les cas connus. Ainsi l'écoulement de base est très fortement turbulent bien avant le seuil d'instabilité R_{mc} et un calcul laminaire comme dans le cas de la dynamo de Ponomarenko n'est pas possible. Le mécanisme de transfert d'impulsion n'est plus la viscosité mais les termes d'advection dans l'équation de Navier-Stokes; la viscosité cinématique n'est alors plus un paramètre pertinent du problème. Nous en déduisons donc que pour P_m très petit, $\psi(P_m = \frac{\nu}{\eta})$ doit être indépendant de ν donc constant. La loi d'échelle d'une dynamo saturée par les termes inertiels (nous dirons aussi saturée turbulente) près du seuil est alors

$$B_{turb}^2 \simeq \frac{\rho}{\mu_0(\sigma L)^2}(R_m - R_{mc})\,. \tag{2.3}$$

Notons que dans ces deux cas, bien que σ et L apparaissent au dénominateur, le champ à saturation n'est pas d'autant plus fort que ces paramètres sont petits car il est alors plus dur de franchir le seuil R_{mc}.

Par ailleurs ces deux lois diffèrent d'un facteur P_m et nous avons $\frac{B_{lam}^2}{B_{turb}^2} \propto P_m$. Pour les métaux liquides connus ($P_m \leq 10^{-5}$), les ordres de grandeur des champs magnétiques créés sont donc nettement différents suivant le mécanisme de saturation envisagé.

2.2 Interprétation physique des lois d'échelles

Il est possible de comprendre ces lois d'échelles à partir des équations d'induction et de Navier-Stokes.
Au seuil la vitesse caractéristique est v_c telle que $R_{mc} = \mu_0\sigma v_c L$. Légèrement au dessus du seuil, la vitesse est v_f avec $R_m = \mu_0\sigma v_f L$.

La croissance cinématique vient de l'écart au seuil que nous écrivons formellement $\nabla \times ((v_f - v_c) \times B)$. La saturation ne pouvant avoir lieu que par la modification de vitesse

v_1, elle intervient quand la modification de l'induction due à la perturbation de vitesse équilibre la croissance cinématique. Ce qui correspond à l'équilibre

$$\nabla \times ((v_f - v_c) \times B) \simeq \nabla \times (v_1 \times B), \tag{2.4}$$

soit en ordre de grandeur

$$v_1 \simeq v_f - v_c \simeq \frac{R_m - R_{mc}}{\mu_0 \sigma L}. \tag{2.5}$$

Il reste alors à calculer v_1.

Le régime de saturation laminaire survient quand la modification en vitesse équilibre la force de Lorentz par un terme visqueux, soit pour

$$\nu \nabla^2 v_1 \simeq \frac{(\nabla \times B) \times B}{\rho \mu_0}, \tag{2.6}$$

ou encore

$$\nu \frac{v_1}{L^2} \simeq \frac{B^2}{\rho \mu_0 L}. \tag{2.7}$$

Avec l'équation (2.5), la loi d'échelle (2.2) s'en déduit à nouveau.

Nous avons parlé de saturation turbulente quand la modification en vitesse n'équilibre pas le force de Lorentz par un terme visqueux mais par un terme d'advection. En se rappelant que la modification en vitesse est petite par rapport à l'écoulement de base, la linéarisation des termes d'advection donne pour la saturation

$$(v_c.\nabla) v_1 \simeq \frac{(\nabla \times B) \times B}{\rho \mu_0}, \tag{2.8}$$

soit

$$\frac{v_c v_1}{L} \simeq \frac{B^2}{\rho \mu_0 L}. \tag{2.9}$$

Comme $R_{mc} = \mu_0 \sigma v_c L$ est une constante sans dimension, il vient la loi d'échelle de la dynamo saturée turbulente (2.3).

Il est possible d'obtenir d'autres lois d'échelles. Pour les écoulements en rotation à la vitesse angulaire Ω, l'analyse dimensionnelle se complique encore avec l'apparition d'un nouveau nombre sans dimension, par exemple le nombre de Rossby $Rb = \frac{v}{L\Omega}$. Dans la limite de forte rotation, nous pouvons supposer que c'est par la force de Coriolis que la modification en vitesse va compenser la force de Lorentz. Il vient

$$\Omega \times v_1 \simeq \frac{(\nabla \times B) \times B}{\rho \mu_0}, \tag{2.10}$$

soit

$$\Omega\, v_1 \simeq \frac{B^2}{\rho\mu_0 L}\,. \tag{2.11}$$

La loi d'échelle en énergie pour une dynamo saturée par la force de Coriolis (nous dirons aussi saturée dans la limite de forte rotation) prend dans ce cas la forme

$$B_{rot}^2 \simeq \frac{\rho\Omega}{\sigma}(R_m - R_{mc})\,. \tag{2.12}$$

Notons qu'en introduisant d'autres phénomènes physiques (par exemple la convection thermique), nous pouvons envisager d'autres lois d'échelles si ces phénomènes entrent en jeu dans le mécanisme de saturation.

Ces lois pour l'énergie magnétique sont très différentes des lois qui sont construites sur des hypothèses d'équipartition ($\frac{B^2}{\mu_0} = \rho v^2$). Près du seuil, celles-ci sont évidemment inadaptées puisque la saturation a lieu pour une énergie magnétique tendant vers zéro au seuil alors que l'énergie cinétique est non nulle. Une autre conséquence de cette hypothèse est que la force de Lorentz est très faible comparée aux autres termes de l'équation de Navier-Stokes. La dynamique de l'écoulement ne sera donc que très faiblement influencée par la présence du champ magnétique ce qui rend peu probable certains scenarii de dynamique du champ (par exemple l'existence de bifurcations de l'écoulement causées par le champ magnétique).

2.3 Ordres de grandeur et applications

Ces raisonnements sont basés sur l'hypothèse très forte que la dynamo est étudiée près du seuil d'instabilité. Néanmoins les dynamos existantes en laboratoire fonctionnent dans ce régime. En effet, pour un écoulement turbulent, la puissance mécanique injectée pour maintenir l'écoulement est, en ordre de grandeur, $P \propto \rho\, v^3\, L^2$. A puissance mécanique fixée, le nombre de Reynolds magnétique qu'il est possible d'atteindre est [54]

$$R_m = \mu_0\sigma(\frac{PL}{\rho})^{1/3}. \tag{2.13}$$

Ainsi pour multiplier R_m par 2, il faut multiplier par 8 la puissance injectée. Il est clair que cela est très contraignant pour les systèmes expérimentaux et que ceux-ci seront toujours dans des régimes proches du seuil. Il est possible aussi que certaines dynamos d'objets astrophysiques se trouvent près du seuil, c'est ce qui peut être envisagé pour la Terre. Il est ainsi pertinent de comparer nos lois d'échelles avec les mesures.

A ce jour deux équipes ont réussi à mettre en évidence l'effet dynamo, une équipe à Riga [52, 53] et une équipe à Karlsruhe [51]. Les deux observent des champs d'amplitude $10 - 100\,G$ pour des expériences utilisant des écoulements de taille $L \simeq 0.1\,m$ avec du sodium liquide pour lequel $\rho \simeq 10^3\,kg.m^{-3}$, $\mu_0\sigma \simeq 10\,s.m^{-2}$, $\nu = 10^{-6}\,m^2.s^{-1}$. Dans le meilleur des cas, R_m est de l'ordre de 10% au dessus du seuil.

La calcul du champ pour une dynamo saturée laminairement (2.2) donne, pour ces valeurs des paramètres, $B_{lam} \simeq 0.1\,G$. Mais il est clair que ce calcul n'est pas pertinent car ces écoulements sont turbulents ($Re \geq 10^6$). La loi d'échelle correspondante (2.3) donne $B_{turb} \simeq 10\,G$. Ce résultat est en bon accord avec les expériences. Remarquons que les dynamos expérimentales présentent une propriété assez intéressante. Elles franchissent le seuil pour des valeurs de R_{mc} assez proches de celles calculées pour l'écoulement laminaire obtenu en prenant la moyenne temporelle de l'écoulement réel, fortement turbulent. En effet toutes les études prédisant la valeur des seuils sont basées sur des simulations du problème cinématique laminaire et sont en assez bon accord avec les valeurs mesurées [51, 52]. Au contraire le champ magnétique sature à des amplitudes déterminées par le caractère turbulent de l'écoulement puisque ce sont les termes inertiels qui entrent en jeu.

Dans le cas de la dynamo terrestre, les paramètres physiques du liquide en mouvement sont très mal connus. Nous choisissons une taille caractéristique égale à une fraction du rayon du globe terrestre $L \simeq 10^6\,m$. En première approximation nous considérons que le liquide est constitué de fer pour lequel $\rho \simeq 10^4\,kg.m^{-3}$, $\mu_0\sigma \simeq 0.5\,s.m^{-2}$, $\nu \simeq 10^{-6}\,m^2.s^{-1}$. Les deux lois précédentes donnent $B_{lam} \simeq 10^{-6}\,G$ et $B_{turb} \simeq 10^{-3}\,G$. Ce sont des valeurs nettement inférieures à celle du champ terrestre qui en surface vaut de l'ordre de $1\,G$. En appliquant la loi concernant la dynamo en rotation rapide, nous trouvons $B_{rot} \simeq 10\sqrt{R_m - R_{mc}}\,G$. Contrairement aux valeurs prédites par les lois d'échelles laminaires et turbulentes, ce résultat est cohérent avec les valeurs mesurées si nous admettons que $R_m - R_{mc}$ n'est pas trop grand et en gardant en mémoire que la valeur du champ en surface est *a priori* plus faible que celle dans le coeur.

Compléments

Étude d'une variante fluide de la dynamo de Bullard

Description et problème cinématique

La dynamo de Bullard [34] est l'exemple le plus simple de système qui puisse créer du champ magnétique par effet dynamo. Elle est constituée d'un cylindre métallique qui est mis en rotation suivant son axe (voir figure II.1). La partie externe du cylindre est en contact électrique tournant avec un circuit fixe qui décrit un solénoïde dont l'autre extrémité est en contact avec l'axe du cylindre.

C'est une dynamo inhomogène en ce sens qu'une fluctuation de courant ayant lieu dans le cylindre va ensuite circuler dans le solénoïde extérieur. De cette fluctuation de courant naît alors une fluctuation de champ magnétique. Comme le cylindre métallique est en mouvement dans ce champ, une force électromotrice (f.e.m.) apparaît par induction. Si le sens du bobinage et celui de rotation du cylindre sont adaptés et si la vitesse de rotation est assez forte, cette f.e.m. peut faire croître la fluctuation de courant donc le champ. Le mécanisme d'instabilité est donc très simple, notamment car la génération du champ a lieu dans la bobine, ce qui contraint sa géométrie.

Nous allons résoudre le problème cinématique en raisonnant sur le courant électrique i qui parcourt la bobine et crée un champ magnétique $\vec{B}$ supposé uniforme au niveau du cylindre. Nous utilisons les coordonnées cylindriques. Nous avons les résultats classiques de magnétostatique

$$\vec{B} = \mu_0 \, n \, i \, \vec{u}_z \, , \tag{II.14}$$

$$L = \mu_0 \, n \, N \, s \, , \tag{II.15}$$

où L est le coefficient d'inductance de la bobine, s la section d'une spire, N le nombre de spires et n le nombre de spires par unité de longueur. $\vec{u}_z$ est le vecteur directeur du champ, c'est celui de la normale aux spires orientée par le sens correspondant à i positif.

Le circuit électrique équivalent à cette dynamo est dessiné en figure (II.2). R est la résistance équivalente à l'ensemble des éléments résistifs du circuit (solénoïde, cylindre métallique, contacts tournants). La f.e.m., notée e, est créée au niveau du cylindre en rotation dans le champ magnétique $\vec{B}$. Nous reconnaissons l'expérience dite de la roue de

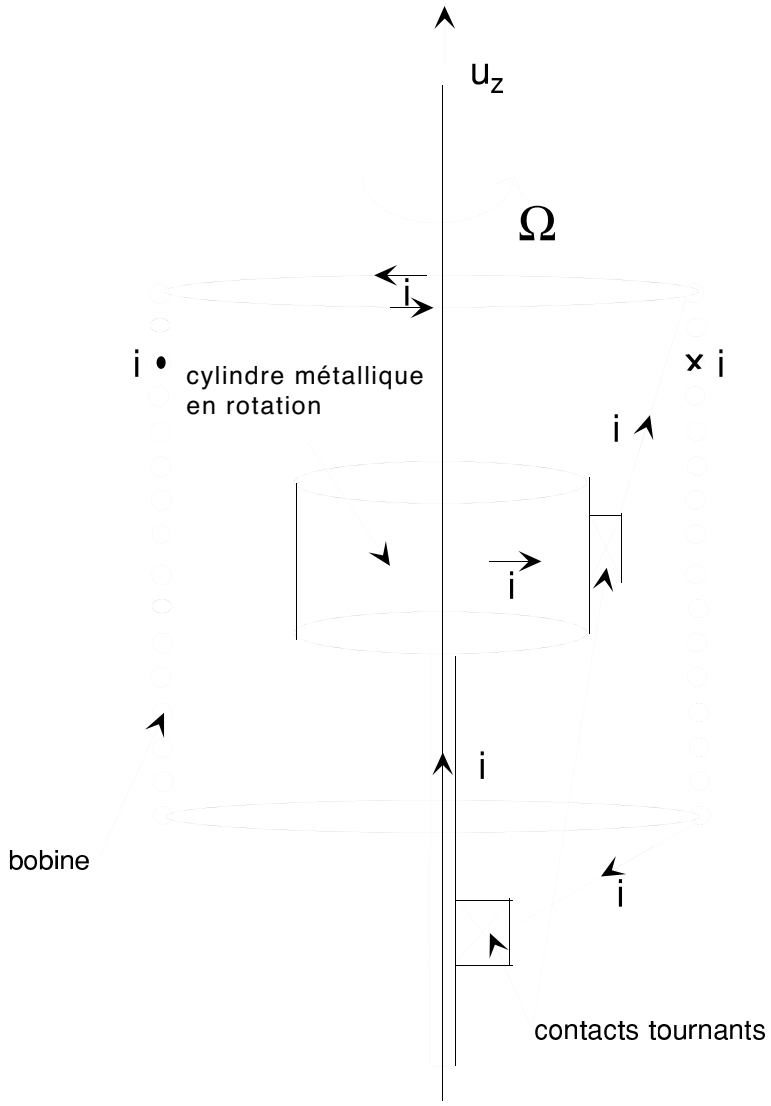

FIG. II.1 – *Schéma de principe de la dynamo de Bullard et trajet suivi par les courants électriques i.*

Barlow (aussi appelée disque de Faraday [35]). Il vient pour la f.e.m.

$$e = \frac{a^2\,\vec{\Omega}.\vec{B}}{2}\,, \tag{II.16}$$

où a est le rayon du cylindre et $\vec{\Omega}$ le vecteur vitesse angulaire de rotation. Notons que le signe de e est celui de $\vec{\Omega}.\vec{u}_z$.

L'équation électrique est alors

$$\textit{induction dans la bobine} + \textit{dissipation} = \textit{f.e.m.}\,, \tag{II.17}$$

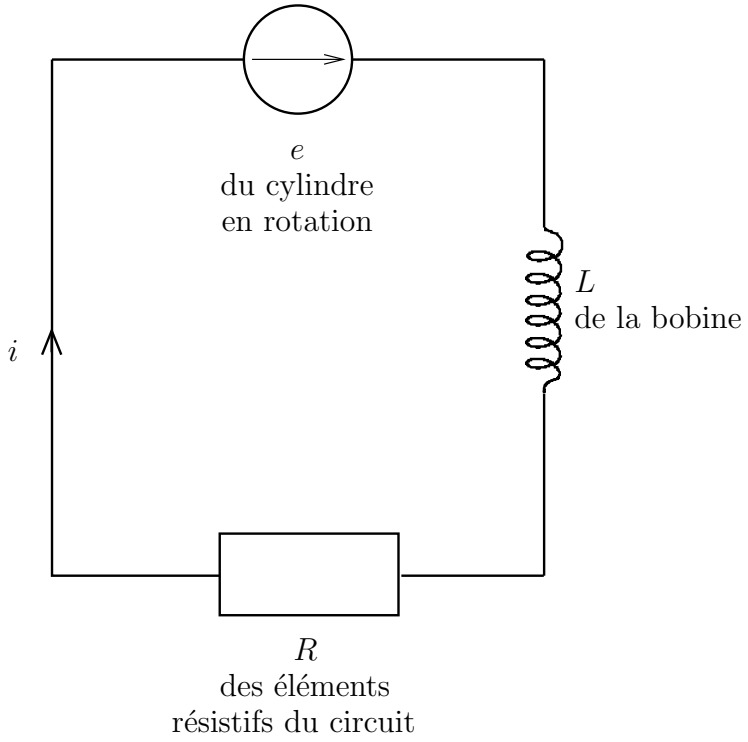

FIG. II.2 – *Circuit électrique équivalent à la dynamo de Bullard.*

que nous réécrivons

$$L\frac{d\,i}{dt} = e - Ri \tag{II.18}$$

$$= \left(\frac{\mu_0 n a^2 \Omega}{2} - R\right) i\,. \tag{II.19}$$

Si e est positif, c'est-à-dire si $\vec{\Omega}.\vec{u}_z$ l'est, la solution $i = 0$ peut être instable. En effet, quand le cylindre est immobile, une fluctuation de courant décroît avec un temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$. Quand Ω augmente, ce temps croît en $(b - c\Omega)^{-1}$ jusqu'à diverger pour $\Omega_c = \frac{b}{c}$ (avec $b = \frac{R}{L}$ et $c = \frac{\mu_0 n a^2}{2L}$). Au dessus de cette valeur, une fluctuation croît exponentiellement, c'est l'instabilité dynamo. Nous pouvons interpréter ce seuil comme le nombre de Reynolds magnétique critique que nous définissons par

$$R_{mc} = \frac{\mu_0 n a^2 \Omega_c}{2R} = 1\,. \tag{II.20}$$

Comme le fait remarquer Moffatt dans son étude de la dynamo de Bullard solide [55], cette description des courants est un peu simpliste. Considérons un tore inscrit dans le cylindre en rotation, de rayon r et de section s. Ce tore est un circuit conducteur de résistance $\rho \propto \frac{r}{\sigma\, s}$ et d'inductance propre $l \propto \mu_0\, r$. Si le champ magnétique est créé

principalement par la bobine externe, au dessus du seuil d'instabilité, la variation de flux Φ liée à la croissance du champ magnétique crée une f.e.m. qui induit un courant i_t dans le tore. Ce courant vérifie

$$l\frac{di_t}{dt} + \rho\, i_t = -\frac{d\Phi}{dt}\,,$$
$$\frac{di_t}{dt} \propto -\frac{1}{\mu_0\,\sigma\,s}\, i_t - r\,n\,\frac{di}{dt}\,. \tag{II.21}$$

En régime stationnaire $\frac{di}{dt} = 0$ et le courant i_t reste de valeur nulle. Ainsi la solution saturée stationnaire que nous déterminons par la suite n'est pas modifiée par la prise en compte de ce courant dans le cylindre. Il peut cependant modifier la stabilité de cette solution et, comme le montre Moffatt, celle-ci devient instable pour certaines valeurs des paramètres et peut mener à un régime chaotique. Quoi qu'il en soit, si nous considérons que la résistivité du cylindre métallique est plus élevée que celle de la bobine, il est possible de se placer dans un régime où le taux d'amortissement du courant i_t est très élevé et sa valeur peut être considérée comme nulle à tout instant. C'est dans cette limite que l'étude de stabilité que nous menons ultérieurement est valide.

Mise en équation du problème dynamique

Une fois le seuil franchi, le courant et le champ magnétique croissent exponentiellement. Bien évidemment cette croissance n'a pas lieu indéfiniment et ces deux grandeurs vont saturer. Dans le cas que nous venons de décrire, la force de Laplace exerce un couple sur le cylindre et la saturation intervient quand ce couple est égal au couple maximal que peut fournir le moteur. Envisageons une variante de cette dynamo solide dans laquelle le cylindre métallique est rempli d'un métal liquide. En dessous du seuil d'instabilité, l'ensemble du liquide est en rotation solide. Le seuil est le même que dans le cas d'un cylindre solide. A vitesse fixée au-dessus du seuil, la saturation du champ magnétique est provoquée par la modification du champ de vitesse causée par la force de Laplace. Il s'agit du problème de dynamo dynamique le plus simple: le valeur du seuil et la structure du mode instable sont ceux de la dynamo de Bullard solide mais la saturation intervient par une modification du champ de vitesse, ce qui nécessite la résolution de l'équation de Navier-Stokes régissant la vitesse du fluide.

Dans cet exemple de dynamo fluide, le problème complet (champ magnétique et champ de vitesse) peut être décrit analytiquement sans faire l'hypothèse que l'étude a lieu près du seuil d'instabilité. En effet, comme la dynamo est inhomogène, le champ magnétique est entièrement fixé par la valeur du courant i. Cela diminue la complexité de l'étude de la saturation qui d'un problème à deux champs vectoriels (vitesse et magnétique) devient un problème à un champ vectoriel et une grandeur scalaire (vitesse et courant).

Nous supposons que la répartition des courants a lieu en volume, qu'elle est axi-symétrique et radiale. Nous en déduisons

$$\vec{\jmath}(r) = \frac{i}{2\pi h r}\,\vec{u}_r\,, \tag{II.22}$$

où $\vec{j}$ est la densité de courant, r la distance à l'axe et h la hauteur du cylindre. Nous notons a et r_1 respectivement le rayon extérieur et intérieur du cylindre (voir figure II.3).

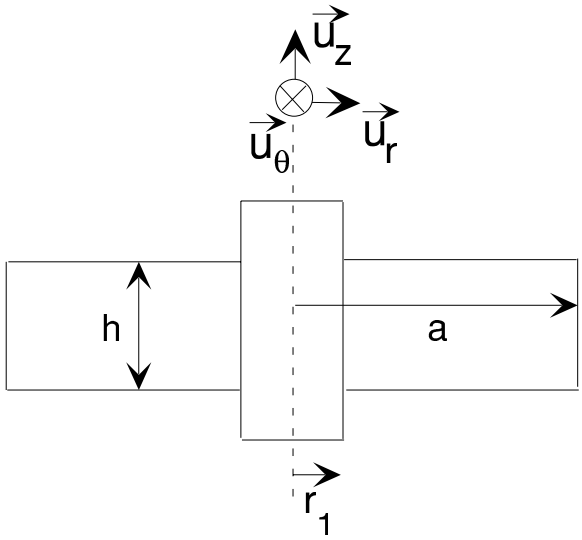

FIG. II.3 – *Vue en coupe du cylindre mis en rotation dans la dynamo de Bullard.*

Pour une vitesse orthoradiale et axisymétrique vérifiant

$$\vec{v} = v(r,t)\,\vec{u}_\theta, \tag{II.23}$$

la force électromotrice le long d'un rayon du circuit s'écrit

$$e = \int_{centre}^{extérieur} (\vec{v} \times \vec{B}).d\vec{r} \tag{II.24}$$

$$= B \int_{centre}^{extérieur} v(r,t)dr\,. \tag{II.25}$$

Bien évidemment dans le cas où l'écoulement est en rotation solide à la vitesse angulaire Ω et que r_1 est très petit devant a nous retrouvons $e = \frac{B\Omega a^2}{2}$.

En utilisant la définition de la vitesse angulaire au seuil Ω_c, nous pouvons réécrire l'équation électrique (II.19) sous la forme

$$\frac{di}{dt} + f(\vec{v})i = 0, \tag{II.26}$$

où f est une fonctionnelle linéaire de la vitesse qui s'annulle au seuil de l'instabilité. Elle correspond physiquement à la différence entre l'induction et la dissipation et vaut

$$f(\vec{v}) = \beta \int_{r_1}^{a} (\Omega_c\, r - v(r,t))dr\,, \tag{II.27}$$

avec $\beta = \frac{\mu_0 n}{L} = \frac{1}{Ns}$.

Il nous faut maintenant écrire l'équation qui régit le champ de vitesse du fluide. Il s'agit de l'équation de Navier-Stokes avec une force de Laplace. En utilisant l'axisymétrie de l'écoulement (équation II.23), la forme de la densité de courant et celle du champ magnétique (équations II.22 et II.15), nous obtenons

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \Delta_c v - \alpha \frac{i^2}{r} \,, \tag{II.28}$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide et $\alpha = \frac{\mu_0 n}{2\pi h \rho}$. L'opérateur Δ_c est la composante azimutale du Laplacien vectoriel appliqué à un champ orthoradial, soit

$$\Delta_c v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \,. \tag{II.29}$$

Étude de la solution saturée

Il faut résoudre le système d'équations (II.26,II.28). C'est un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires couplées dont les inconnues sont une grandeur scalaire $i(t)$ et un champ scalaire $v(r,t)$. Nous cherchons à priori une solution stationnaire. $i(t)$ est donc une constante qui joue le rôle d'une constante d'intégration pour l'équation (II.28). Celle-ci étant du second ordre pour les dérivées par rapport à r, sa résolution permet d'obtenir l'expression de v avec au total trois constantes d'intégration. Il reste alors à vérifier d'une part les conditions aux limites de non glissement aux parois soit $v(r_1) = \Omega\, r_1$ et $v(a) = \Omega\, a$, d'autre part une condition déduite de l'équation électrique (II.26) qui donne $f(\vec{v}) = 0$.

Nous obtenons ainsi une expression analytique pour la vitesse à saturation

$$v_{sat}(r) = a \left(\Omega\, x + \frac{2\,\delta\Omega}{1 - \frac{4u^2}{(1-u^2)^2} \ln^2 u} \left(x \ln x + (x - \frac{1}{x}) \frac{u^2 \ln u}{1-u^2} \right) \right) \,, \tag{II.30}$$

où $u = \frac{r_1}{a}$ est le rapport d'aspect du cylindre, $x = \frac{r}{a}$ est une variable sans dimension comprise entre u et 1, $\delta\Omega = \Omega - \Omega_c$ est l'écart au seuil en vitesse angulaire. Par ailleurs nous obtenons pour le courant à saturation

$$i_{sat}^2 = \frac{2\pi h \rho \nu}{\mu_0 n} \frac{4\,\delta\Omega}{1 - \frac{4u^2}{(1-u^2)^2} \ln^2 u} \,. \tag{II.31}$$

En figure (II.4) nous avons tracé l'allure de la correction en vitesse $(v - \Omega\, r)$ pour plusieurs rapports d'aspects. Comme cette correction est proportionnelle à l'écart au seuil et au rayon, nous avons choisi $a\,\delta\Omega = 1$. Le mécanisme de saturation consiste là encore en un freinage global du fluide qui diminue l'induction. Ce freinage est plutôt localisé près de la paroi intérieure quand le rapport d'aspect est faible. Il est de plus en plus symétrique par rapport au milieu de la coquille cylindrique lorsque le rapport d'aspect tend vers 1.

En effet, dans cette limite, l'épaisseur entre les deux parois devient négligeable devant le rayon des coquilles cylindriques et l'équation du champ de vitesse tend vers celle qui régit le champ entre deux parois planes, configuration pour laquelle il n'y a plus de différence entre paroi intérieure et paroi extérieure. Dans le domaine des écoulements cisaillés, un résultat similaire est que, dans la limite de faible épaisseur entre les parois, l'écoulement de Taylor-Couette (entre deux cylindres concentriques) se rapproche d'un écoulement de Taylor plan (entre deux plaques parallèles) pour lequel les deux parois sont équivalentes [56].

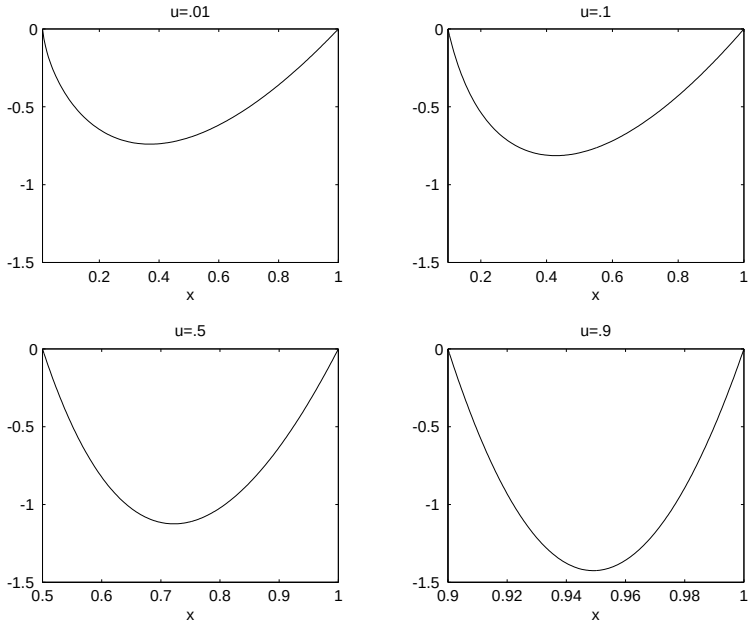

FIG. II.4 – *Correction en vitesse normalisée par* $a\,\delta\Omega$ *pour différentes valeurs du rapport d'aspect* u *(dans l'ordre* 0.01, 0.1, 0.5 *et* 0.9*)*

Stabilité de l'écoulement

Il faut maintenant étudier la stabilité de ces solutions saturées. Pour cela, nous allons étudier l'évolution d'une fluctuation près de ces solutions et donc linéariser les équations du problème pour $v = v_{sat} + \tilde{v}$ et $i = i_{sat} + \tilde{\imath}$ avec $\tilde{v} \ll v_{sat}$ et $\tilde{\imath} \ll i_{sat}$. Il vient

$$\frac{d\tilde{\imath}}{dt} = \beta i_{sat} \int_{r_1}^{a} \tilde{v}(r,t)\, dr\,, \tag{II.32}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \nu \Delta_c \tilde{v} - \frac{2\,\alpha\, i_{sat}}{r}\,\tilde{\imath}\,. \tag{II.33}$$

Ce système d'équations étant linéaire, plusieurs techniques de résolution peuvent être envisagées. Nous pourrions projeter ce système sur les vecteurs propres de Δ_c et diagonaliser

ensuite l'opérateur constitué du second membre du système d'équations. Il est possible de montrer que les valeurs propres de cet opérateur ont toutes des parties réelles strictement négatives, ce qui assure la stabilité des solutions que nous étudions. Nous présentons une autre technique basée sur l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov pour ce problème. Multiplions la première de ces équations par $\tilde{\imath}$ et remplaçons le dans le second membre par sa valeur en fonction de $\tilde{v}$ déduite de la seconde équation. Il vient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\tilde{\imath}^2}{2}+\frac{\beta}{2\alpha}\int_{r_1}^{a}\frac{\tilde{v}^2}{2}\,r\,dr\right)=\frac{\beta\nu}{2\alpha}\int_{r_1}^{a}(\tilde{v}\frac{d}{dr}(r\frac{d\tilde{v}}{dr})-\frac{\tilde{v}^2}{r})\,dr\,. \tag{II.34}$$

En utilisant les valeurs de α et β, nous multiplions par L l'équation et intégrons par partie le premier terme du second membre, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{\tilde{\imath}^2}{2}+\int_{r_1}^{a}\rho\frac{\tilde{v}^2}{2}\,\pi\,h\,r\,dr\right)=-\pi\,h\,\rho\,\nu\int_{r_1}^{a}(r(\frac{d\tilde{v}}{dr})^2+\frac{\tilde{v}^2}{r})\,dr\,. \tag{II.35}$$

Posons

$$V(\tilde{\imath},\tilde{v})=L\frac{\tilde{\imath}^2}{2}+\int_{r_1}^{a}\rho\frac{\tilde{v}^2}{2}\,\pi\,h\,r\,dr\,, \tag{II.36}$$

nous avons

$$\frac{d}{dt}(V(\tilde{\imath},\tilde{v}))\leq\,0\,. \tag{II.37}$$

V est donc une fonctionnelle de Lyapunov du problème de stabilité linéaire de la solution saturée. En effet, elle est quadratique en $\tilde{\imath}$ et $\tilde{v}$ et c'est une fonction du temps décroissante. Nous en déduisons que la solution saturée (soit $\tilde{\imath}=\tilde{v}=0$) est linéairement stable. Nous avons donc le diagramme de bifurcation de la figure (II.5).

Notons cependant que cette étude est limitée à des faibles perturbations en vitesse $\tilde{v}$ axisymétriques. Il est clair que le problème de stabilité complet nécessite la prise en compte de fluctuations non axisymétriques. En effet, nous pouvons supposer que le freinage du fluide non homogène (voir figure II.4) provoque l'apparition de rouleaux analogues aux rouleaux de Taylor dans l'écoulement de Taylor-Couette [56]. C'est-à-dire qu'un mode non axisymétrique de l'écoulement est instable. Résoudre le problème de stabilité linéaire est alors bien plus compliqué. Pour se faire une idée du mécanisme d'instabilité, nous pouvons utiliser le critère de Rayleigh [57] qui est associé à la stabilité d'un écoulement non visqueux entre deux cylindres sans champ magnétique

$$\frac{d}{dr}\left(r^2(\frac{dv}{dr})^2\right)\geq 0\,. \tag{II.38}$$

Il correspond pour l'écoulement à une stratification croissante du moment cinétique. En utilisant l'expression du champ de vitesse (équation II.30), il est aisé de vérifier que ce critère est violé lorsque nous nous éloignons du seuil de la dynamo. Bien que cela ne donne qu'une information qualitative sur l'instabilité possible de l'écoulement avec effet dynamo, nous pouvons imaginer qu'à de plus hautes vitesses de rotation apparaissent de nouvelles instabilités.

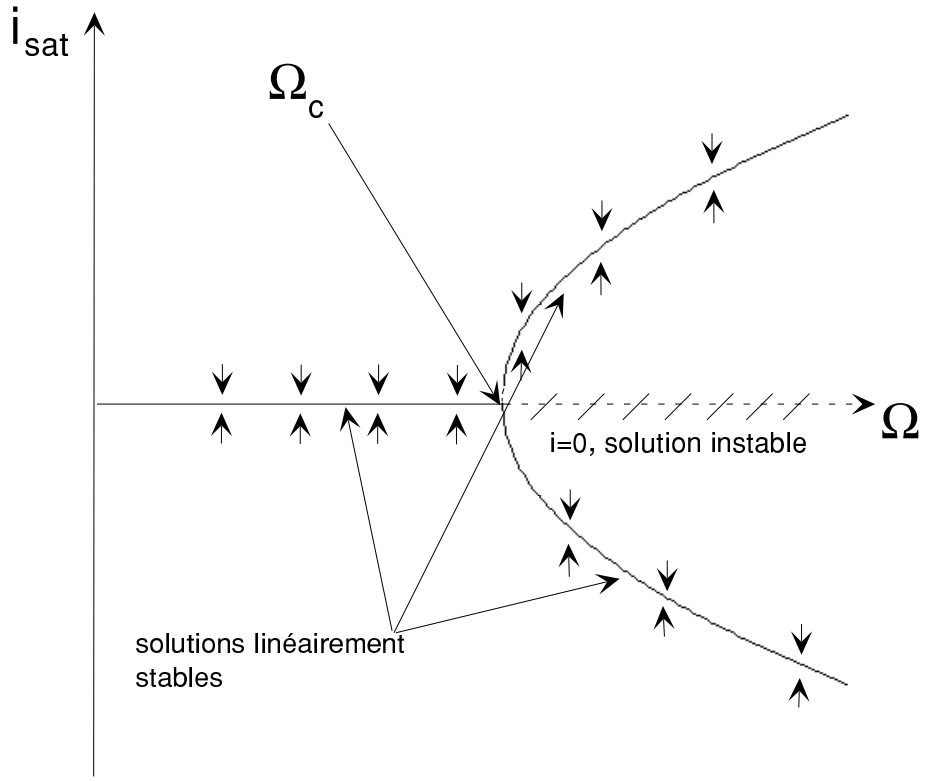

FIG. II.5 – *Diagramme de bifurcation pour la dynamo de Bullard, courant en fonction de la vitesse de rotation.*

Énergie magnétique à saturation

Le régime saturé a de nombreuses caractéristiques communes avec celui de la dynamo de Ponomarenko. L'étude a montré que la bifurcation est supercritique (voir figure II.5). Les lois d'échelles pour la perturbation en vitesse et pour le courant sont similaires à celles que nous avons obtenues dans le cas d'une dynamo saturée laminairement au voisinage du seuil. La correction en vitesse (équation II.30) est proportionnelle à l'écart au seuil. Quand au courant (i) et donc au champ magnétique ($B = \mu_0 n i$), il varie en racine de l'écart au seuil (équation II.31). L'énergie magnétique s'écrit

$$\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{8\pi h\,\rho\,n\,\nu}{1 - \frac{4u^2}{(1-u^2)^2}\ln^2 u}\delta\Omega\,. \tag{II.39}$$

En utilisant la définition de R_m (II.20), nous retrouvons la loi d'échelle pour une dynamo saturée laminairement. Plus précisemment

$$B^2 \propto \frac{\rho \nu h R}{a^2}(R_m - R_{mc}) \,, \tag{II.40}$$

ce qui est similaire à l'équation (2.2) page 112. Les sources de dissipation par effet Joule étant localisées dans des matériaux de résisitivités différentes (solénoïde, métal liquide...), c'est la résistance de l'ensemble du circuit qui entre en jeu. Néanmoins, le coefficient devant l'écart au seuil est bien proportionnel à la viscosité du fluide et à sa densité, tandis qu'il est inversement proportionnel au carré de la taille caractéristique de l'écoulement et à une conductivité effective que nous pouvons définir comme $\sigma_{eff} = (h\,R)^{-1}$.

Ici encore, près du seuil, aucune équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie magnétique ne peut exister puisque la seconde tend vers zéro au seuil contrairement à la première qui reste finie.

L'étude des puissances dissipées donne les mêmes résultats que pour la dynamo de Ponomarenko puisque l'écoulement de base est non dissipatif (rotation solide). Plus précisément nous retrouvons

$$P_j \propto B^2 \propto (R_m - R_{mc}) \,, \tag{II.41}$$

$$P_\nu \propto (\delta v)^2 \propto (R_m - R_{mc})^2 \,, \tag{II.42}$$

où P_j (resp. P_ν) est la puissance dissipée par effet Joule (resp. par viscosité) et δv est la correction en vitesse due à la force de Laplace. Ainsi près du seuil l'essentiel de la puissance est dissipée par effet Joule.

Tous ces résultats ont été établis sans faire l'hypothèse que la dynamo fonctionne près du seuil d'instabilité. Néanmoins ils ne restent vrais que tant que la solution axisymétrique pour la perturbation en vitesse est stable et que d'autres instabilités n'apparaissent pas. Ainsi une étude expérimentale possible consiste à voir comment se modifie la loi d'échelle $B^2 \propto \rho\,\nu\,\delta\Omega$ (II.39) lorsqu'apparaissent ces nouvelles instabilités. Il est possible que loin du seuil nous retrouvions ensuite une loi d'échelle du type d'une dynamo saturée turbulente (2.3) page 112.

Une autre expérience possible est de voir comment des perturbations de l'écoulement initial modifient le seuil de la dynamo. En effet, il est assez facile d'introduire dans le cylindre des obstacles qui modifient l'écoulement de rotation solide et peuvent le rendre turbulent. En jouant sur la forme et le nombre de ces obstacles, il est possible d'étudier l'effet de perturbations hydrodynamiques (éventuellement turbulentes) sur le Reynolds magnétique critique. En outre, pour un tel écoulement, le rapport entre la puissance dissipée par viscosité et celle dissipée par effet Joule n'a aucune raison d'être négligeable près du seuil, et sa valeur reste à déterminer.

Troisième partie

Étude expérimentale d'un écoulement tourbillonnaire de sodium liquide

Dans cette partie nous présentons certains résultats expérimentaux obtenus par l'équipe VKS en étudiant un écoulement tourbillonnaire de sodium liquide.

Le premier chapitre est une présentation du système expérimental et des divers écoulements réalisés. Nous nous sommes intéressés principalement à deux écoulements: l'écoulement à un disque et l'écoulement à deux disques contrarotatifs.

Le second chapitre présente les mesures du champ moyen induit par l'application d'un champ magnétique extérieur. Différentes configurations du champ appliqué sont étudiées. De cette façon nous mettons en évidence les différents mécanismes d'induction qui peuvent entrer en jeu dans l'instabilité dynamo et étudions leur dépendance en fonction de la vitesse de rotation du ou des disques. En complément à ce chapitre nous détaillons le calcul de l'induction pour un écoulement de Ponomarenko. Pour un champ appliqué transverse, les champs induits moyens sont assez proches de ceux de l'écoulement à un disque. Cela prouve que l'écoulement de Ponomarenko et celui à un disque sont similaires et que les mêmes phénomènes d'induction sont présents.

Enfin nous présentons les mesures des fluctuations du champ magnétique induit dans le troisième chapitre et retrouvons le spectre du domaine inertiel précédemment prédit théoriquement et mesuré dans une expérience similaire réalisée dans du gallium liquide.

Chapitre 1

Description de l'expérience de "von Kármán Sodium" (VKS)

1.1 La boucle de sodium et les instruments de mesure

Depuis plusieurs années une collaboration entre le CEA-Saclay (J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, L. Marié), l'ENS-Lyon (M. Bourgoin, P. Odier, J-F. Pinton) et l'ENS de Paris a permis la mise au point d'une expérience de magnéto-hydrodynamique qui permet d'atteindre de hauts nombres de Reynolds magnétiques. C'est la collaboration de tous ces membres qui a permis d'obtenir tous les résultats expérimentaux que nous allons présenter. L'écoulement choisi est un écoulement de type von Kármán [58]. Il est produit par un ou deux disques coaxiaux pouvant être mis en rotation indépendamment et placés dans un cylindre rempli de sodium liquide. Cette expérience a été développée au CEA de Cadarache pour des raisons de sécurité.

Des études préliminaires en gallium [59] et des simulations numériques [60] ont montré qu'un tel écoulement est susceptible d'engendrer du champ magnétique par effet dynamo et que le seuil de l'instabilité est de l'ordre des valeurs qu'il est possible d'obtenir en laboratoire. Le sodium a été choisi car c'est le métal liquide qui possède la meilleure conductivité [62] ($\sigma \simeq 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ soit $\eta \simeq 0.1$ à $110\,°C$). Il est par ailleurs peu dense ($\rho = 920\,kg.m^{-3}$ à $110\,°C$). Sa viscosité et sa masse volumique à $200\,°C$ sont proches de celles de l'eau à $50\,°C$. Cela facilite sa mise en mouvement et permet, à puissance des moteurs constante, d'obtenir des vitesses plus élevées qu'avec d'autres métaux liquides plus denses. Pour ces deux raisons, le sodium permet d'atteindre expérimentalement les plus hauts nombres de Reynolds magnétiques qu'il est possible de réaliser.

Son utilisation présente quelques difficultés techniques. Son point de fusion, quand il est pur, est $T_f = 98\,°C$. Cela oblige à travailler à chaud. Il est par ailleurs très réactif avec de nombreux matériaux. Ces deux derniers points contraignent fortement la réalisation de la cuve et des systèmes de mesure. Le risque principal est bien entendu son extrême réactivité avec l'eau. En effet la réaction sodium-eau est explosive. Au contraire, sa combustion est peu dangereuse car le rayonnement des flammes est absorbé à très courte distance par les fumées dégagées. La réalisation de nombreux systèmes de sécurité (capteurs de fuites

de sodium et de fumées) permet de minimiser les risques. Par ailleurs la conductivité électrique est une fonction décroissante de la température. A 200 $°C$, elle est environ 1.4 fois plus faible qu'à 110 $°C$. Ainsi, pour avoir R_m le plus élevé possible, il est important de faire les expériences à froid, c'est-à-dire le plus près possible du point de fusion. Il faut veiller à ne pas descendre à trop basse température car le sodium se solidifie et bouche le système de circulation. En outre, il n'est pas non plus possible de travailler longtemps à vitesse de rotation élevée car la cuve n'échange pas assez de chaleur avec l'extérieur et sa température augmente rapidement (environ 30° par minute aux plus hautes vitesses).

La solution technique réalisée consiste en une boucle de sodium qui alimente une cuve où a lieu l'écoulement (voir Fig. 1.1). La boucle est constituée d'un stockage d'un maximum de trois cents litres de sodium maintenus au dessus de sa température de fusion. Il est relié par un réseau de tuyauteries à la cuve. La circulation du sodium est assurée par une pompe électromagnétique. Une unité de purification par condensation des impuretés (piège froid) et une unité de mesure de pureté du sodium (sonde de bouchage) sont situées le long de la boucle.

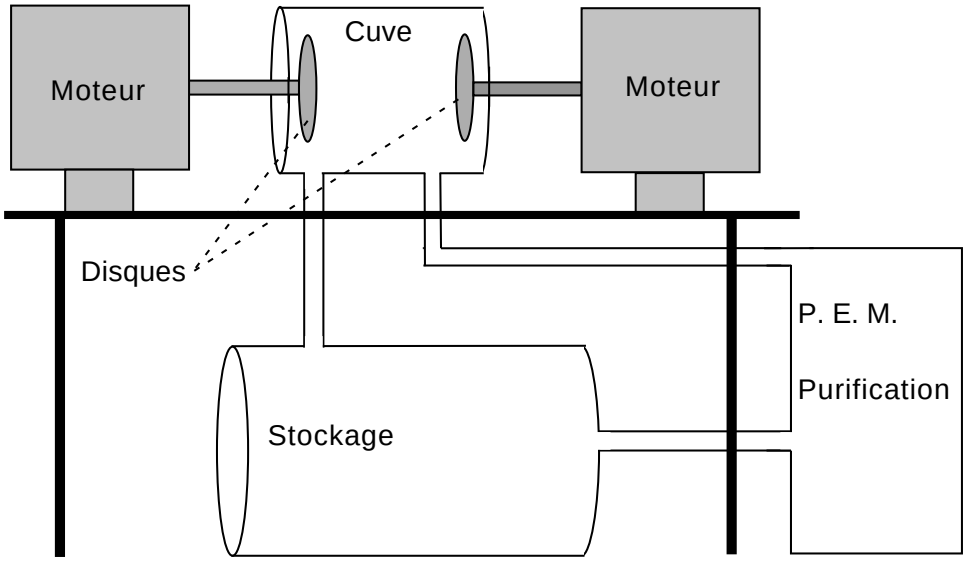

FIG. 1.1 – *Schéma de principe de l'expérience von Kármán Sodium.*

La cuve, réalisée en inox, est un cylindre de 40 cm de longueur et de 20 cm de rayon. Chacune des sections comporte un palier permettant le passage d'un arbre entrainé par un moteur de puissance maximale 75 kW. L'étanchéité entre le milieu extérieur et la cuve est réalisée par des garnitures métalliques fonctionnant en surpression d'argon pour éviter toute fuite de sodium vers l'extérieur. L'ensemble de la boucle fonctionne en atmosphère d'argon afin d'éviter les réactions d'oxydation du sodium avec l'air.

Une mesure du champ magnétique est réalisée à l'aide d'une sonde à effet Hall reliée à un Gaussmètre BELL et placée dans un des doigts de gant prévu à cet effet. Cette sonde est refroidie à l'air comprimé car elle est détruite si sa température atteint 90 $°C$. Comme

elle fonctionne sur le principe de l'effet Hall, elle est sensible à la densité de porteurs de charges dans le semi-conducteur qui la compose. Elle est donc fortement affectée par la température et une calibration de la mesure du champ en fonction de la température a été réalisée. C'est une sonde trois axes qui donne la valeur des trois composantes du champ. Sa position est réglable en profondeur et en orientation par rapport à son axe. Toutes ces mesures ainsi que des mesures complémentaires (température de la cuve, température de la sonde, couple et vitesse de chaque moteur, fluctuations de pression engendrées par l'écoulement) sont enregistrées sur un ordinateur par l'intermédiaire d'une carte d'acquisition. Enfin un jeu de deux paires de bobines de Helmoltz de diamètres $43\,cm$ est alimenté par un générateur de courant KEPCO et permet de créer un champ magnétique horizontal parallèle ou transverse à l'axe des moteurs. L'intensité maximale du champ au centre de la cuve est d'environ $30\,G$. En première approximation ces champs seront considérés comme uniformes sur l'ensemble de la cuve.

1.2 Les différents écoulements

Suivant le mode de fonctionnement des moteurs, trois écoulements de natures différentes sont possibles.

L'écoulement à un disque est réalisé si un disque tourne et l'autre est maintenu fixe. Nous présentons un schéma très simplifié de l'écoulement dans la figure 1.2. Plus précisément nous dessinons l'allure des lignes de courant associées à la moyenne temporelle du champ de vitesse en chaque point. Près du disque en rotation, la vitesse orthoradiale croît lorsque nous nous éloignons du centre. La pression est donc plus élevée au centre du disque ce qui provoque une expulsion radiale du fluide. Elle est compensée par une aspiration vers le disque le long de l'axe de rotation. Un écoulement de retour est localisé près des parois latérales. Au centre du cylindre a donc lieu un écoulement tourbillonnaire dont le coeur est aspiré vers le disque.

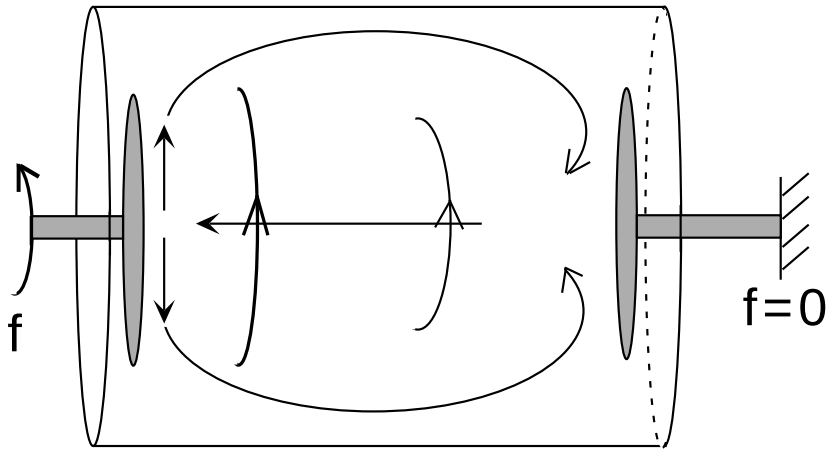

FIG. 1.2 – *Lignes de courant de l'écoulement moyen dans le cas à un disque.*

L'écoulement à deux disques corotatifs est réalisé si les deux disques tournent dans le même sens. En figure 1.3 est présenté un schéma très simplifié de l'écoulement. Dans chaque demi-cylindre a lieu un écoulement similaire à celui à un disque. Les vitesses d'aspiration vers chaque disque sont opposées mais les vitesses de rotation sont les mêmes. Le tourbillon central est dans ce cas très stable [63]. Il crée une zone de basse pression qui augmente la fuite d'argon des garnitures vers l'intérieur de la cuve. En plus de ce problème technique, cet écoulement est à hélicité nulle. Nous l'avons donc peu étudié.

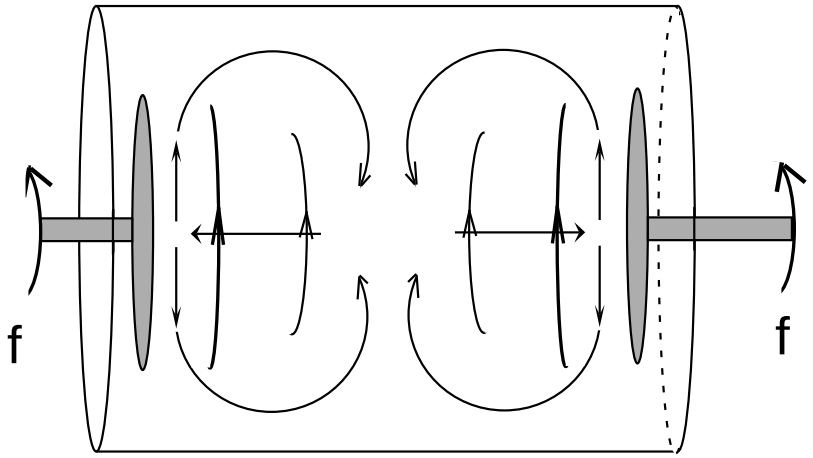

FIG. 1.3 – *Lignes de courant de l'écoulement moyen dans le cas à deux disques corotatifs.*

L'écoulement à deux disques contrarotatifs est réalisé si les deux disques tournent avec la même vitesse en sens opposés. Le champ de vitesse moyen, voir figure 1.4, est composé de deux cellules qui séparent la cuve en deux parties. Dans chacune des cellules a lieu un écoulement du même type que celui à un disque. Les hélicités dans chaque cellule sont égales. Près du plan central du cylindre est localisé une zone de fort cisaillement qui est instable. L'écoulement est ainsi particulièrement turbulent: le champ de vitesse instantanée fluctue énormément et n'est à aucun moment égal au champ de vitesse moyen.

Notons que la classification précédente est artificielle. En effet quand les deux disques tournent en sens opposés avec des vitesses différentes, l'écoulement réalisé est plutôt similaire à celui réalisé à un disque. Par ailleurs la description que nous faisons des écoulements moyens est très simpliste. Dans le cas à deux disques contrarotatifs, des études sont en cours pour savoir comment évolue cet écoulement moyen et notamment la couche centrale dite couche de cisaillement [61].

Diverses formes de disques ont été testées: des disques à pales droites et des disques à pales courbes. Ces divers types de pales permettent de modifier l'écoulement. La courbure des pales change le rapport entre la vitesse azimutale et la vitesse radiale et donc change le rapport entre la composante poloïdale et la composante toroïdale du champ de vitesse. Par ailleurs des pales plus épaisses engendrent un écoulement plus important mais aussi

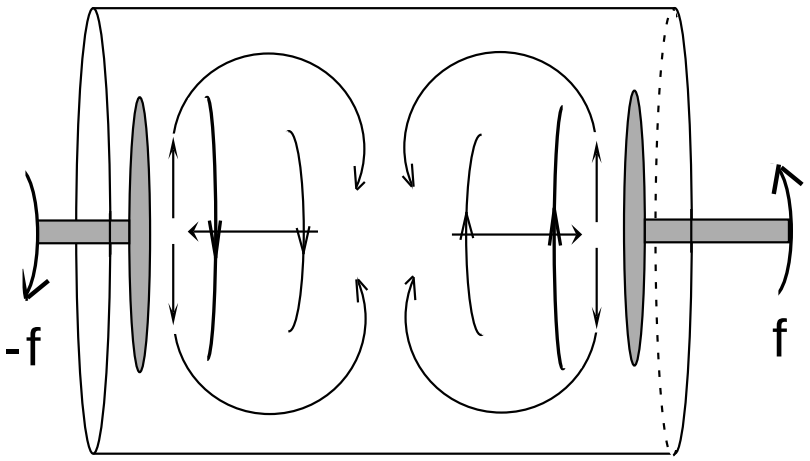

FIG. 1.4 – *Lignes de courant de l'écoulement moyen dans le cas à deux disques contrarotatifs.*

plus turbulent: les vitesses produites sont plus élevées mais les puissances nécessaires à les maintenir aussi.

Il est possible de fixer des baffles (déflécteurs) parallèles à l'axe des moteurs sur la paroi interne de la cuve. Ces baffles bloquent le mouvement azimutal du fluide près de la paroi.

Enfin la cuve comporte un chemisage interne par une couche de cuivre de $1\,cm$ d'épaisseur. La conductivité électrique de la cuve réalisée en inox est un ordre de grandeur plus faible que celle du sodium. Au contraire, le cuivre est plus conducteur que le sodium et les quelques résultats numériques disponibles [65] montrent que cette modification des conditions aux limites tend à faire baisser le seuil.

1.3 Principe des mesures

En dessous du seuil de l'instabilité dynamo, nous essayons de mesurer la réponse du système à un champ magnétique $\vec{B}_0$ constant créé par les bobines de Helmoltz. Nous mesurons le champ induit par l'écoulement à l'aide de la sonde à effet Hall. En figure 1.5, nous schématisons la position de la sonde (S) et la direction du champ appliqué dite transverse. Il est aussi possible d'appliquer un champ axial parallèle à $\vec{u}_x$.

Si nous décomposons le champ total en champ appliqué et champ induit, ce que nous notons

$$\vec{B}_t = \vec{B}_0 + \vec{B} \ ,$$

le champ induit $\vec{B}$ est solution de

$$\mathcal{L}\vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \eta \nabla^2 \vec{B} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) + \eta \nabla^2 \vec{B}_0 \, . \qquad (1.1)$$

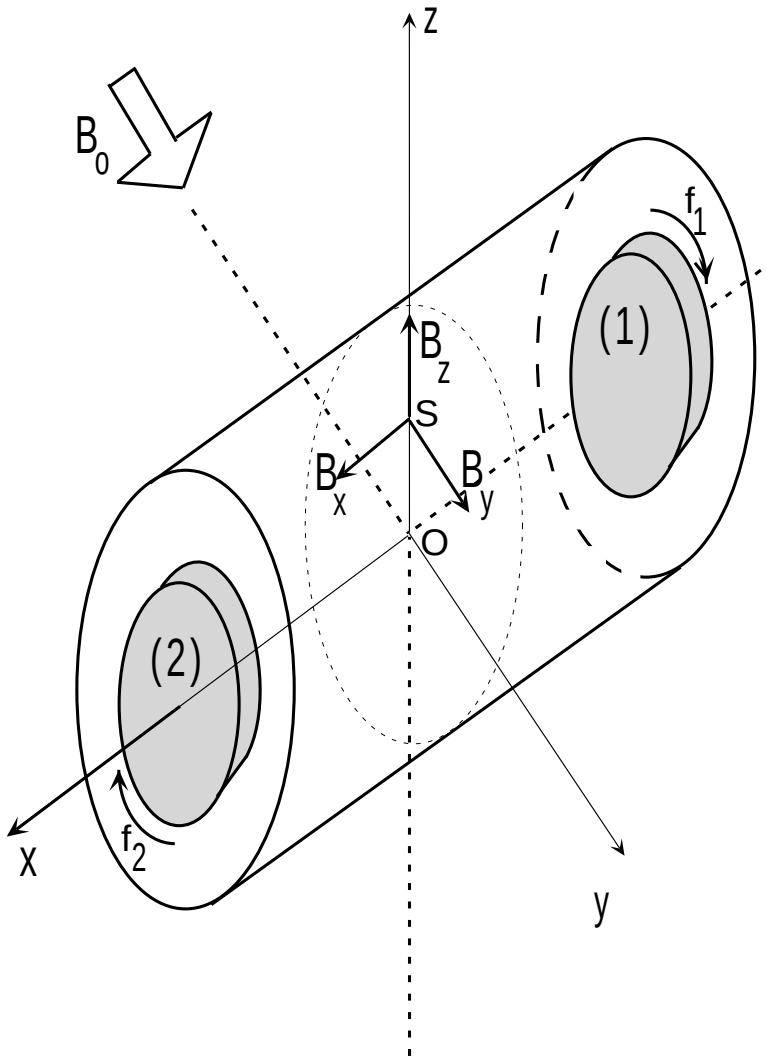

FIG. 1.5 – *Principe des mesures d'induction pour un champ appliqué transverse.*

Nous avons donc une équation linéaire pour $\vec{B}$ avec terme source noté $\phi(\vec{v},\vec{B}_0)$. En dessous du seuil $\mathcal{L}$ est inversible et $\vec{B}$ s'écrit formellement

$$\vec{B} = \mathcal{L}^{-1}\phi(\vec{v},\vec{B}_0) \; . \tag{1.2}$$

La dépendance de $\vec{B}$ en $\vec{B}_0$ est liée à celle du champ de vitesse qui est solution de l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v} = -\nabla\frac{P}{\rho} + \nu\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{\rho\mu_o}(\nabla \times \vec{B}_t) \times \vec{B}_t \, . \tag{1.3}$$

A cette équation doivent être ajoutées des conditions aux limites qui traduisent l'entraînement inertiel par les pales et qui sont indépendantes du champ magnétique. En ordre

de grandeur et au premier ordre en vitesse de l'écoulement, le champ induit B est de l'ordre de $B_o\, v\, L/\eta$, ce que nous obtenons en équilibrant le terme d'induction de l'équation 1.1 par un terme de diffusion. Nous notons v et L la vitesse et les taille caractéristiques de l'écoulement. La force de Laplace est alors proportionnelle à $\frac{\vec{B}_0.\nabla\vec{B}}{\mu_0} \propto \sigma\, v\, B_0^2$. Le rapport entre la force de Laplace et le terme inertiel s'appelle paramètre d'interaction et est défini par $N = \frac{\sigma\, L\, B_0^2}{\rho\, v}$. Dans toutes nos expériences $B_0 \leq 30\, G$. Pour une valeur typique de vitesse $v = 6\, m.s^{-1}$, la valeur maximale de N est de l'ordre de 4.10^{-3}. Le rôle de la force de Laplace est ainsi négligeable par rapport à celui des termes inertiels. La dépendance de $\vec{v}$ en fonction de $\vec{B}_0$ est donc très faible et avec une très bonne approximation nous considérerons que le champ de vitesse est indépendant du champ magnétique appliqué. De l'équation (1.2), il vient que $\vec{B}$ est linéaire en $\vec{B}_0$.

Dans la figure 1.6, nous avons tracé une série temporelle typique du champ induit, pour un écoulement à deux disques contrarotatifs à fréquence $8\, H_z$ et un champ appliqué de $12\, G$. Plusieurs caractéristiques du champ induit s'en dégagent. La valeur moyenne est très anisotrope et nous étudierons ses variations en fonction de la vitesse de rotation dans le paragraphe "Mesures d'induction moyenne". Par ailleurs les champs sont très fluctuants et, dans le paragraphe "Mesures des fluctuations d'induction", nous étudierons les propriétés de la partie fluctuante du champ.

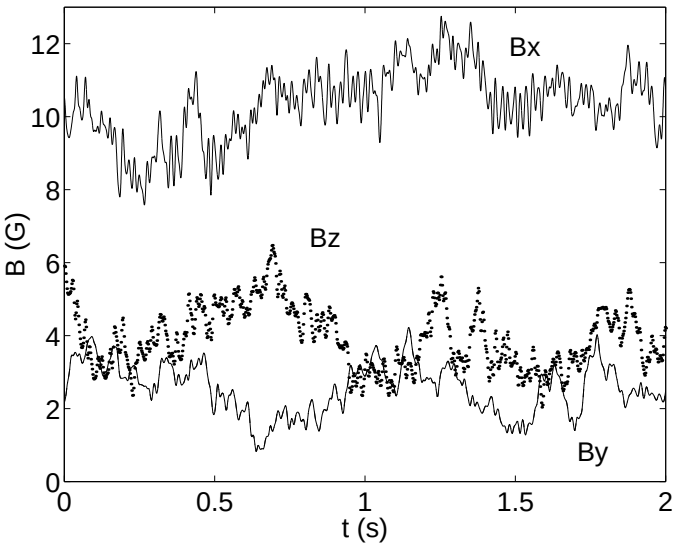

FIG. 1.6 – *Enregistrement des trois composantes du champ magnétique en fonction du temps pour un champ appliqué axial $B_0 = 12\, G$ et un écoulement à deux disques contrarotatifs à fréquence $f = 8\, Hz$. La sonde est en $z = 10\, cm$. Les disques sont de rayon $R = 15\, cm$ et sont pourvus de pales courbes. Il n'y a pas de baffles sur la cuve.*

Chapitre 2

Mesures d'induction moyenne

Notons $\langle g \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T g(t')\,dt'$, la valeur moyenne de g. Puisque $\vec{B}$ est linéaire en $\vec{B}_0$, il en va de même pour le champ induit moyen $\langle \vec{B} \rangle$. En figures 2.1 (resp. 2.2) nous avons tracé les composantes du champ induit moyen en fonction du champ appliqué axial (resp. transverse) pour un écoulement à deux disques contrarotatifs à fréquence de rotation fixée $f = 8\,Hz$ et $f = 17\,Hz$.

La réponse est bien linéaire, un comportement que nous avons retrouvé dans toutes les mesures réalisées.

Pour déterminer l'équation qui régit l'évolution du champ induit moyen, nous décomposons le champ de vitesse (resp. le champ magnétique induit) sous la forme $\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v'}$ (resp. $\vec{B} = \langle \vec{B} \rangle + \vec{B'}$) où $\langle . \rangle$ désigne la valeur moyenne temporelle et $\vec{v'}$ (resp. $\vec{B'}$) les fluctuations. En prenant la moyenne de l'équation 1.1 page 135, il vient

$$\nabla \times (\langle \vec{v} \rangle \times \langle \vec{B} \rangle) + \eta \nabla^2 \langle \vec{B} \rangle = -\nabla \times (\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}_0) - \eta \nabla^2 \vec{B}_0 - \nabla \times (\langle \vec{v'} \times \vec{B'} \rangle). \quad (2.1)$$

Dans la limite des faibles vitesses, les champs induits sont faibles par rapport au champ appliqué supposé uniforme et cette équation devient

$$\eta \nabla^2 \langle \vec{B} \rangle = -\vec{B}_0 . \nabla \langle \vec{v} \rangle . \quad (2.2)$$

Cette équation est le développement du champ induit au premier ordre en la vitesse du fluide. Le champ magnétique induit est solution d'une équation de diffusion avec terme source. Ce terme source est proportionnel aux gradients du champ de vitesse dans la direction du champ appliqué. A plus hautes vitesses apparaissent des effets non linéaires en la vitesse. Le champ induit est alors du même ordre de grandeur que le champ appliqué et l'interaction entre fluctuations de vitesse et fluctuations de champ magnétique peut entrer en jeu ainsi que l'interaction entre la vitesse moyenne et le champ induit moyen.

2.1 Écoulement à deux disques contrarotatifs

Nous étudions la réponse à un champ appliqué axial. En figure 2.3 nous avons tracé les composantes du champ induit en fonction de la fréquence de rotation. Plus précisément,

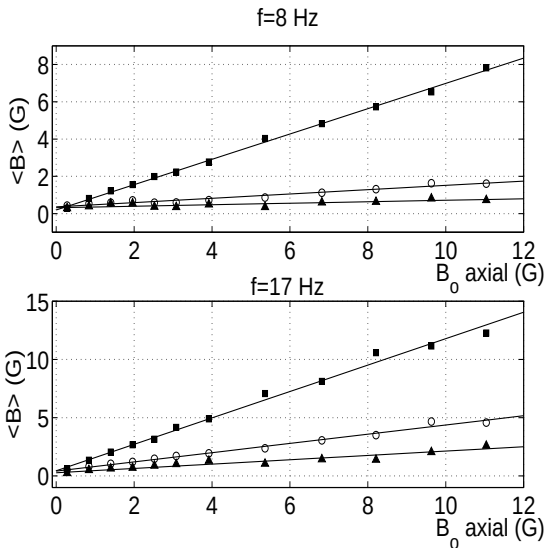

FIG. 2.1 – *Champ induit moyen en fonction du champ appliqué axial pour un écoulement à deux disques contrarotatifs à fréquence $f = 8\,Hz$ et $f = 17\,Hz$. La sonde est en $z = 10\,cm$. $(o) = \langle B_x \rangle$, $(\blacksquare) = \langle B_y \rangle$, $(\blacktriangle) = \langle B_z \rangle$.*

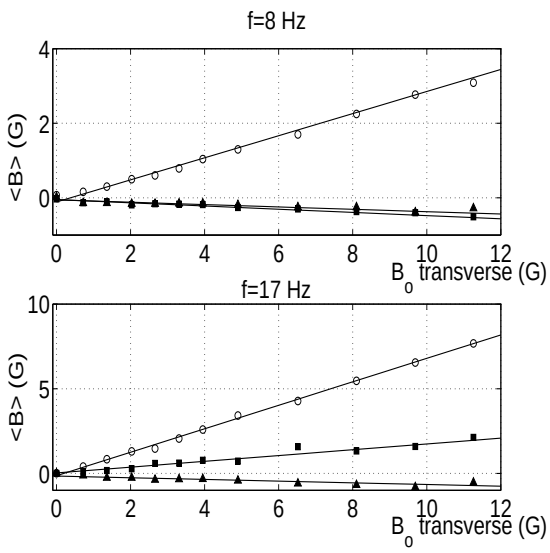

FIG. 2.2 – *Champ induit moyen en fonction du champ appliqué transverse pour un écoulement à deux disques contrarotatifs à fréquence $f = 8\,Hz$ et $f = 17\,Hz$. La sonde est en $z = 10\,cm$. $(o) = \langle B_x \rangle$, $(\blacksquare) = \langle B_y \rangle$, $(\blacktriangle) = \langle B_z \rangle$.*

comme les champs sont linéaires en fonction du champ appliqué B_0, nous avons tracé le champ induit divisé par le champ appliqué.

A faible vitesse de rotation, il y a très peu de champ induit axial et vertical. Par contre le champ induit orthoradial (suivant $\vec{u}_y$) est important et varie linéairement en fonction de la fréquence de rotation. C'est la mise en évidence de l'effet oméga. La rotation différentielle appliquée au champ axial crée du champ induit azimutal. Les champs "saturent" aux plus hautes vitesses en ce sens que leurs valeurs atteignent des plateaux. Le champ induit sur $\vec{u}_y$ est alors le double du champ appliqué sur $\vec{u}_x$. Même si l'effet est faible, le champ axial augmente aux grandes vitesses. Nous pensons que le champ azimutal, créé par effet oméga à partir du champ axial appliqué, crée à son tour du champ axial.

Si nous changeons le sens de rotation des disques, le champ induit sur l'axe est inchangé tandis que le champ induit transverse est changé en son opposé. Nous pouvons prédire cette transformation en étudiant les symétries du problème complet. Par symétrie par rapport au plan $P_2 = (Oyz)$, les vitesses de rotation de chaque moteur sont changées en leurs opposées. Les champs magnétiques étant des pseudo-vecteurs, il en résulte que le champ appliqué $\vec{B}_o$ est inchangé ainsi que le champ induit $\langle B_x \rangle$ tandis que les champs $\langle B_y \rangle$ et $\langle B_z \rangle$ sont changés en leurs opposés. En résumé, cette opération de symétrie implique

$$f \rightarrow -f\,,$$
$$(\langle B_x \rangle\,, \langle B_y \rangle\,, \langle B_z \rangle\,) \rightarrow (\langle B_x \rangle\,, -\langle B_y \rangle\,, -\langle B_z \rangle\,)\,,$$

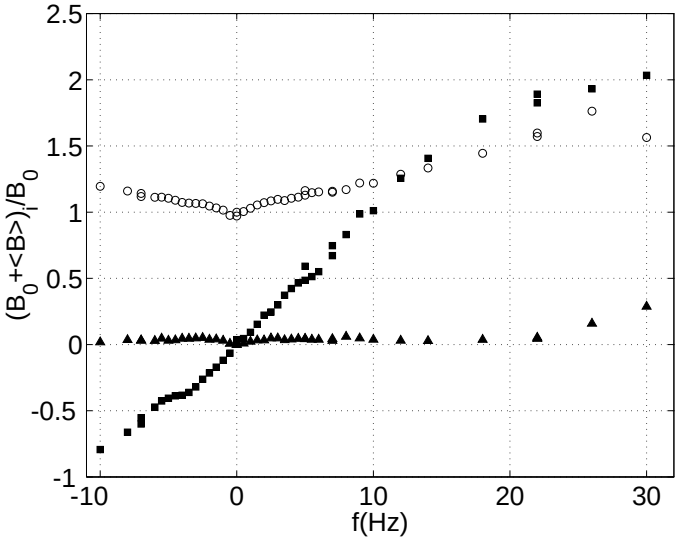

FIG. 2.3 – *Champ moyen en fonction de la fréquence de rotation pour un champ appliqué axial et un écoulement à deux disques contrarotatifs. La sonde est en* $z = 10\,cm$. *Les disques sont de rayon* $R = 15\,cm$ *et sont pourvus de pales droites. Quatre baffles sont montées sur la paroi interne de la cuve cylindrique. Le moteur (2) tourne à la fréquence* f, *le moteur (1) tourne à fréquence* $-f$. $(o) = \frac{B_o+\langle B_x\rangle}{B_o}$, $(\blacksquare)= \frac{\langle B_y\rangle}{B_o}$, $(\blacktriangle) = \frac{\langle B_z\rangle}{B_o}$.

ce que nous vérifions expérimentalement. Ceci est rigoureusement vrai dans le cas où les pales sont droites et n'est qu'approché dans le cas des pales courbes. En effet, dans ce dernier cas, la symétrie par rapport à P_2 ne transforme pas exactement l'écoulement en celui engendré en faisant tourner le disque dans le sens opposé.

En figure 2.4, nous avons tracé la réponse à un champ appliqué transverse. Il y a peu de champ induit vertical. Le champ induit transverse est faible à basse vitesse et croît ensuite.

Par changement du sens de rotation des disques, le champ axial est changé en son opposé tandis que le champ transverse n'est pas changé. Nous comprenons cette transformation en étudiant la symétrie par rapport au plan $P_1 = (Oxz)$. Celle-ci change le sens de rotation des disques, laisse inchangés le champ appliqué et le champ induit transverse tandis qu'elle transforme en leurs opposés les champs induits axiaux et verticaux. En résumé par cette opération de symétrie par rapport à P_1, nous avons

$$f \rightarrow -f\,,$$
$$(\langle B_x\rangle\,,\langle B_y\rangle\,,\langle B_z\rangle\,) \rightarrow (-\langle B_x\rangle\,,\langle B_y\rangle\,,-\langle B_z\rangle\,)\ ,$$

ce que nous vérifions expérimentalement de façon qualitative.

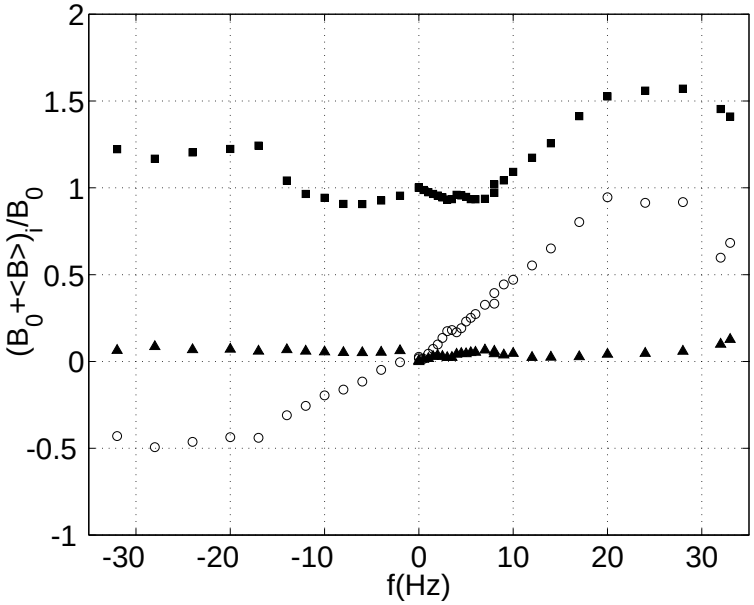

FIG. 2.4 – *Champ moyen en fonction de la fréquence de rotation pour un champ appliqué transverse et un écoulement à deux disques contrarotatifs. La sonde est en* $z = 10\,cm$*, même configuration expérimentale qu'en figure 2.3.* $(o) = \frac{\langle B_x \rangle}{B_o}$, $(\blacksquare) = \frac{B_o + \langle B_y \rangle}{B_o}$,$(\blacktriangle) = \frac{\langle B_z \rangle}{B_o}$.

2.2 Écoulement à un disque

En figure 2.5, nous avons tracé la réponse à un champ appliqué axial. Les champs induits sont nettement plus faibles que dans le cas contrarotatif. En effet les gradients de vitesse suivant la direction du champ appliqué, c'est-à-dire suivant l'axe, sont nettement plus faibles pour un écoulement à un disque.

En figure 2.6, nous avons tracé les composantes du champ total en fonction de la fréquence de rotation du disque (2) pour un champ appliqué transverse.

Si nous changeons le sens de rotation, c'est-à-dire changeons f en $-f$, les champs induits axiaux et verticaux sont changés en leurs opposés tandis que le champ induit transverse est inchangé. Nous pouvons prévoir cette transformation en utilisant les symétries du problème complet. Par symétrie par rapport à $P_1 = (0xz)$, la fréquence de rotation est changée en son opposée. Le champ magnétique appliqué $\vec{B}_0$, qui est normal à P_1 est inchangé puisque c'est un pseudo-vecteur. De la même façon $\langle B_x \rangle$ et $\langle B_z \rangle$ sont changés en leurs opposés tandis que $\langle B_y \rangle$ est inchangé. En résumé, cette opération de symétrie implique

$$f \rightarrow -f\,,$$
$$(\langle B_x \rangle\,, \langle B_y \rangle\,, \langle B_z \rangle\,) \rightarrow (-\langle B_x \rangle\,, \langle B_y \rangle\,, -\langle B_z \rangle\,)\ ,$$

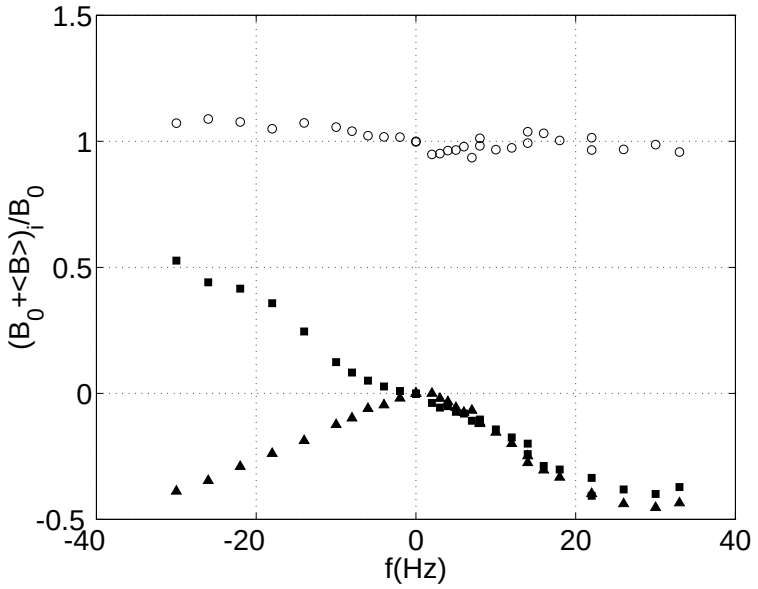

FIG. 2.5 – *Champ moyen en fonction de la fréquence de rotation du moteur* (2) *pour un champ appliqué axial et un écoulement à un disque. La sonde est en* $z = 10\,cm$, *même configuration expérimentale qu'en figure 2.3.* $(o) = \frac{B_o+\langle B_x\rangle}{B_o}$, $(\blacksquare) = \frac{\langle B_y\rangle}{B_o}$,$(\blacktriangle) = \frac{\langle B_z\rangle}{B_o}$.

ce que nous vérifions expérimentalement.

Une autre opération de symétrie intéressante est la symétrie par rapport au plan $P_2 = (0yz)$. Par cette opération le disque (1) est mis en rotation à la place du disque (2). Le champ magnétique appliqué est changé en son opposé ainsi que $\langle B_y\rangle$ et $\langle B_z\rangle$ tandis que $\langle B_x\rangle$ est inchangé. Pour retrouver la configuration où $\vec{B}_0$ est appliqué à l'écoulement, il faut changer tous les champs induits en leurs opposés. En effet, nous avons montré que ceux-ci sont proportionnels au champ appliqué. Ainsi par symétrie par rapport au plan P_2 et transformation de $-\vec{B}_0$ en $\vec{B}_0$, le disque (1) est mis en rotation à la place du disque (2) et les champs induits se transforment suivant $(\langle B_x\rangle, \langle B_y\rangle, \langle B_z\rangle) \rightarrow (-\langle B_x\rangle, \langle B_y\rangle, \langle B_z\rangle)$. Nous avons vérifié cette propriété expérimentalement.

Notons que l'hélicité de l'écoulement $\mathcal{H} = \int \vec{v}.\nabla \times \vec{v}$ est transformée en son opposée par symétrie par rapport à P_1 ou P_2 puisque c'est un pseudo-scalaire. Pour des faibles valeurs de fréquence de rotation, certaines composantes du champ induit ne sont pas linéaires. Les champs induits suivant l'axe $\langle B_x\rangle$ et transverse $\langle B_y\rangle$ sont quadratiques en la fréquence de rotation, tandis que le champ vertical $\langle B_z\rangle$ est linéaire. En figure 2.7-a le champ axial est tracé en fonction du carré de la fréquence de rotation et la courbe est linéaire jusqu'à environ 10 Hz. En figure b, la linéarité du champ vertical $\langle B_z\rangle$ est vérifiée jusqu'à un peu moins de $10\,Hz$. En figure c (resp. d), nous traçons le champ induit axial (resp. transverse) en fonction du carré du champ induit vertical. Les comportements sont linéaires ce qui est cohérent avec un comportement linéaire de $\langle B_z\rangle$ et quadratique de

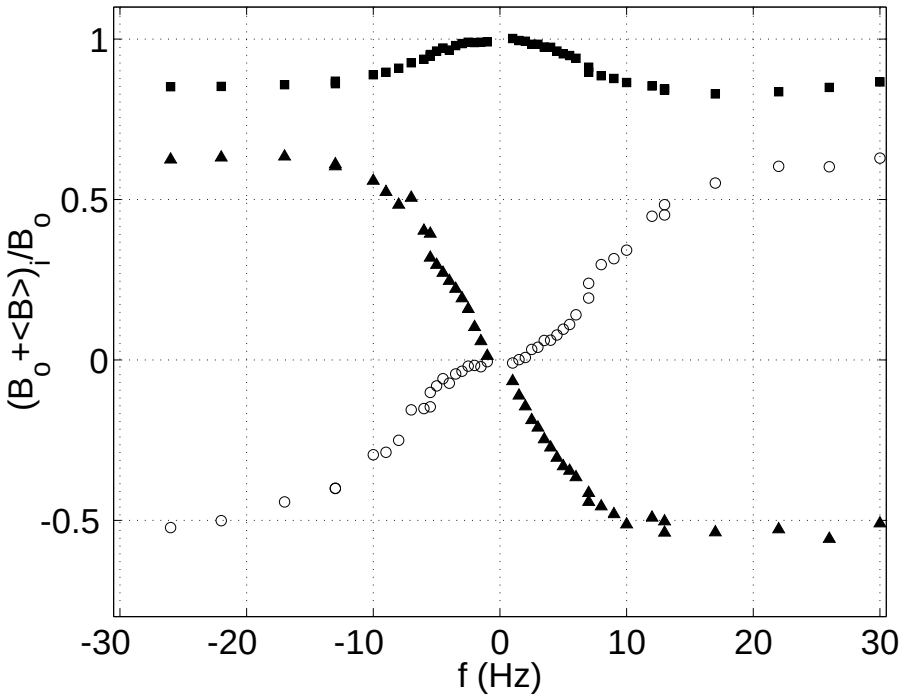

FIG. 2.6 – *Champ moyen en fonction de la fréquence de rotation du moteur* (2) *pour un champ appliqué transverse et un écoulement à un moteur. La sonde est en* $z = 10\,cm$*, même configuration expérimentale qu'en figure 2.3.* $(o) = \frac{\langle B_x \rangle}{B_o}$, $(\blacksquare) = \frac{B_o + \langle B_y \rangle}{B_o}$,$(\blacktriangle) = \frac{\langle B_z \rangle}{B_o}$.

$\langle B_x \rangle$ et $\langle B_y \rangle$ en fonction de la fréquence de rotation.

Compte-tenu des symétries de l'écoulement le champ induit suivant l'axe ne peut être linéaire en la fréquence de rotation. Il est ici quadratique. Il se comporte de la même façon que l'hélicité vis-à-vis des symétries par rapport à P_1 et P_2. Nous interprétons ce processus de génération d'un champ perpendiculaire au champ appliqué comme le résultat d'un effet alpha. Plus précisément, l'écoulement induit un courant parallèle au champ appliqué qui engendre un champ suivant l'axe. Ce champ est quadratique en fonction de la vitesse du fluide et se transforme comme l'hélicité de l'écoulement en ce qui concerne les symétries. Tous ces éléments sont cohérents avec une description en terme d'effet alpha.

En figures 2.8, 2.9, 2.10 nous traçons les champs pour d'autres positions de la sonde dont nous avons varié la hauteur entre $z = 4\,cm$ et $z = 15\,cm$. Nous voyons que l'effet alpha, donc le champ induit axial, est plus faible près de l'axe du cylindre. Ce résultat est encore lié aux symétries de l'expérience. Par rotation d'angle π par rapport à l'axe du cylindre, l'écoulement est inchangé, $\vec{B}_0$ est changé en son opposé et $\langle B_x \rangle (x,0,z)$ est transformé en $\langle B_x \rangle (x,0,-z)$. Pour un même champ appliqué, il vient donc $\langle B_x \rangle (x,0,z) = -\langle B_x \rangle (x,0,-z)$. Pour $z = 0$, le champ induit axial est nul. L'effet alpha est donc nul sur l'axe du cylindre et devient non nul lorsque nous nous en éloignons.

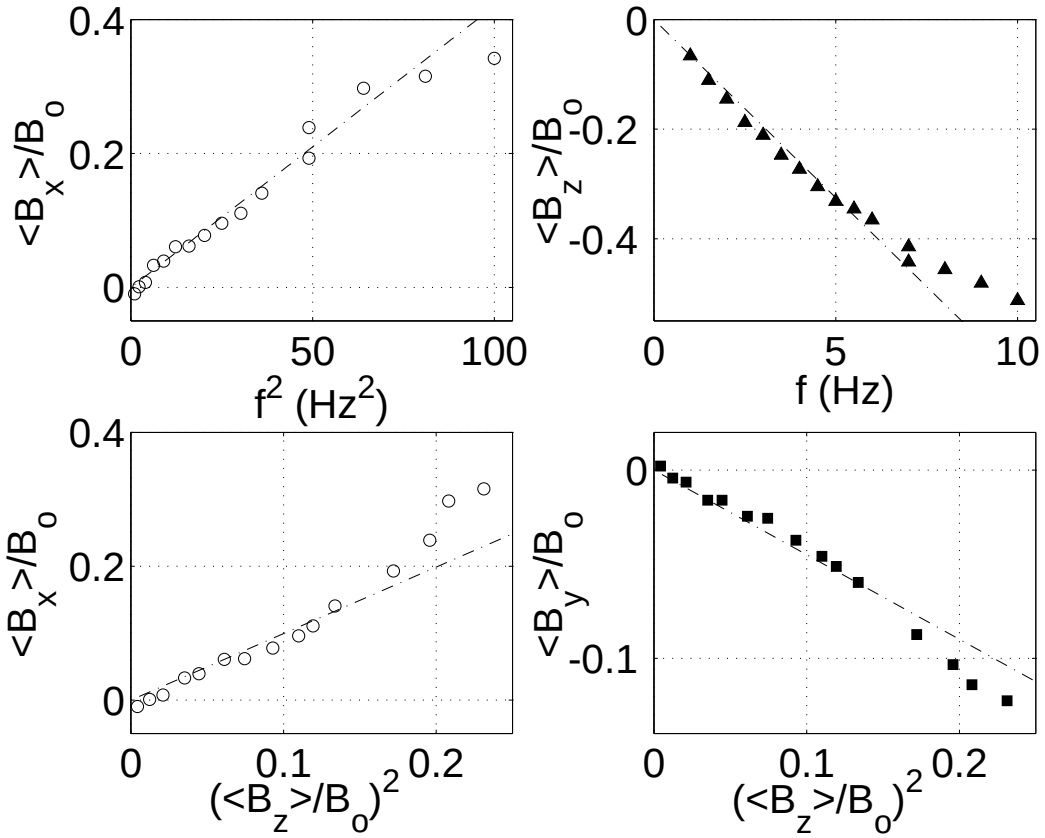

FIG. 2.7 – $(a-b)$ *Composantes axiales et verticales du champ induit en fonction de la fréquence de rotation.* $(c-d)$ *Composantes axiales et transverses du champ induit en fonction du carré du champ induit vertical pour des fréquences de rotation* $f \leq 10\,Hz$. *Mêmes mesures que celles de la figure 2.6.*

Nous avons calculé en annexe les champs induits pour un écoulement de Ponomarenko soumis à un champ transverse. Afin de pouvoir comparer ce calcul aux mesures à un disque que nous étudions, nous avons pris un écoulement de Ponomarenko qui soit à hélicité négative si la fréquence de rotation est positive, ce qui est le cas près de l'axe du cylindre pour les mesures que nous avons effectuées. Les figures 2.11, 2.12, 2.13 sont réalisées en considérant que le cylindre où a lieu l'écoulement est de rayon $R = 20\,cm$. Le métal a la perméabilité magnétique du sodium et la sonde est située à la verticale de l'axe du cylindre, à une hauteur variable $z = 4, 10, 15\,cm$.

L'écoulement expérimental à un disque et l'écoulement modèle de Ponomarenko présentent qualitativement les mêmes phénomènes d'induction pour un champ appliqué transverse. Le champ induit axial est quadratique à basse vitesse et l'importance de cette effet croît quand nous nous éloignons de l'axe central. Le champ induit transverse est lui aussi quadratique mais son signe dépend de la position de la sonde. Il est négatif près du centre du cylindre et devient positif lorsque nous nous approchons de la paroi. Le champ

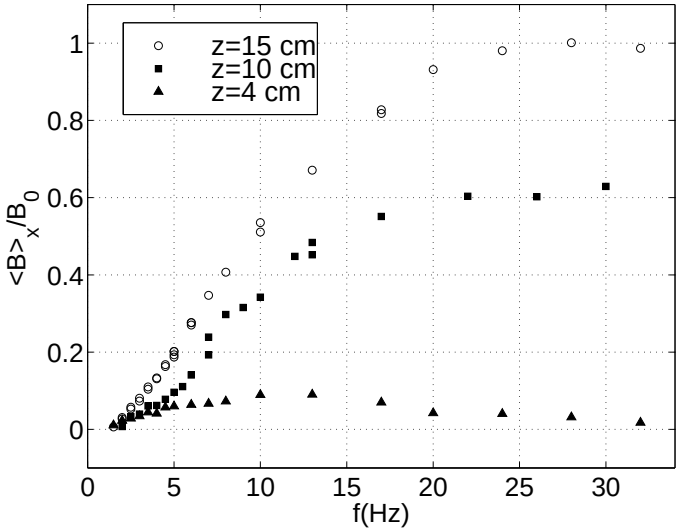

FIG. 2.8 – *Champ induit axial en fonction de la fréquence de rotation f du moteur* (2) *pour un champ appliqué transverse et un écoulement à un disque. La position de la sonde est $z = 4, 10, 15\,cm$. Les disques sont de rayon $R = 15\,cm$ et sont pourvus de pales droites. Quatre baffles de hauteur $h = 1\,cm$ sont montées sur la paroi interne de la cuve cylindrique.*

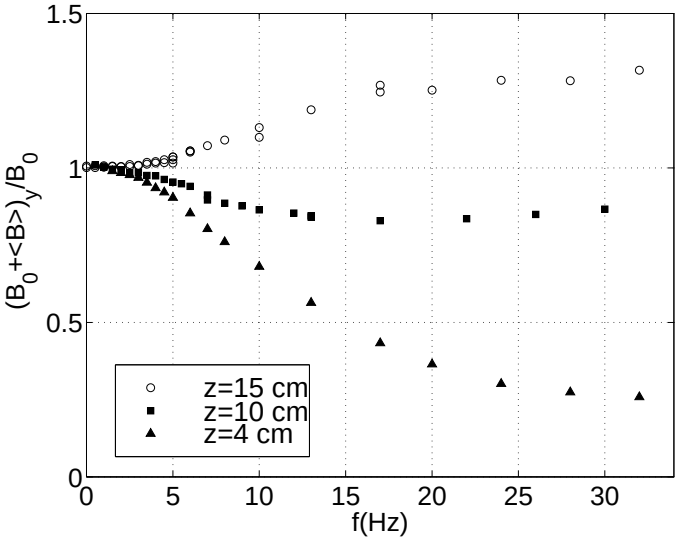

FIG. 2.9 – *Champ transverse en fonction de la fréquence de rotation f du moteur* (2) *pour un champ appliqué transverse et un écoulement à un disque. La position de la sonde est $z = 4, 10, 15\,cm$. Même configuration expérimentale qu'en figure 2.8.*

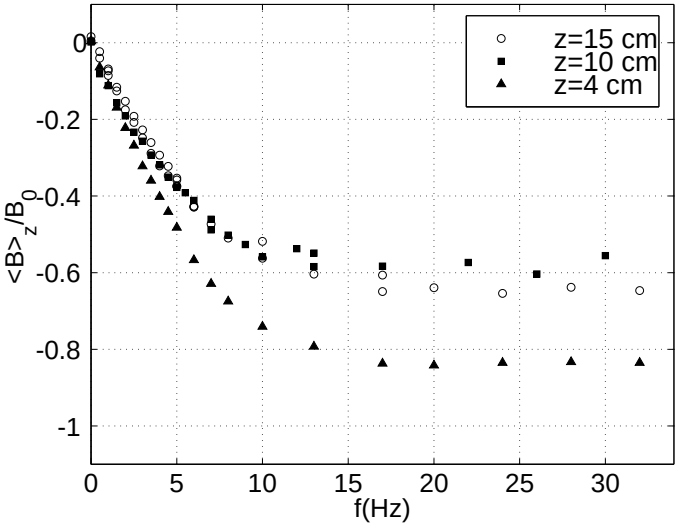

FIG. 2.10 – *Champ induit vertical en fonction de la fréquence de rotation f du moteur* (2) *pour un champ appliqué transverse et un écoulement à un disque. La position de la sonde est $z = 4, 10, 15\,cm$. Même configuration expérimentale qu'en figure 2.8.*

vertical est linéaire à basse vitesse et augmente quand nous nous éloignons du centre, ce qui est vrai expérimentalement si nous comparons les mesures faites pour $z = 10\,cm$ et $z = 15\,cm$ en figure 2.10.

A haute vitesse, l'écoulement de Ponomarenko expulse le champ du cylindre où a lieu l'écoulement de rotation solide et translation. Nous avons vu un effet similaire au cours d'une campagne expérimentale réalisée sans baffles sur la paroi du cylindre. Les résultats sont tracés en figure 2.14. Les champs tendent vers zéro à hautes fréquences de rotation. Nous interprétons ce résultat comme l'expulsion du champ appliqué par l'écoulement. En effet, sans les baffles, celui-ci est globalement en rotation solide sur un grand volume et ce type d'écoulement est connu pour expulser les champs appliqués [17, 59].

Dans le complément qui suit, nous détaillons le calcul du champ induit pour un écoulement de Ponomarenko soumis à un champ appliqué axial ou transverse.

En plus d'étudier les valeurs moyennes du champ induit nous nous sommes intéressés à la partie fluctuante. Contrairement aux mesures d'induction moyenne où une analyse détaillée des différentes mesures a été présentée, nous nous sommes limités pour les mesures de fluctuations d'induction à présenter quelques résultats caractéristiques.

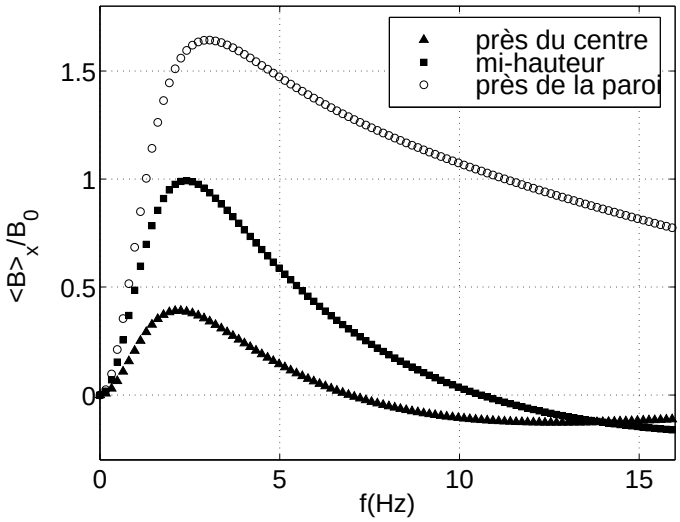

FIG. 2.11 – *Champ induit axial en fonction de la fréquence de rotation f du cylindre pour un écoulement de Ponomarenko et pour un champ appliqué transverse.*

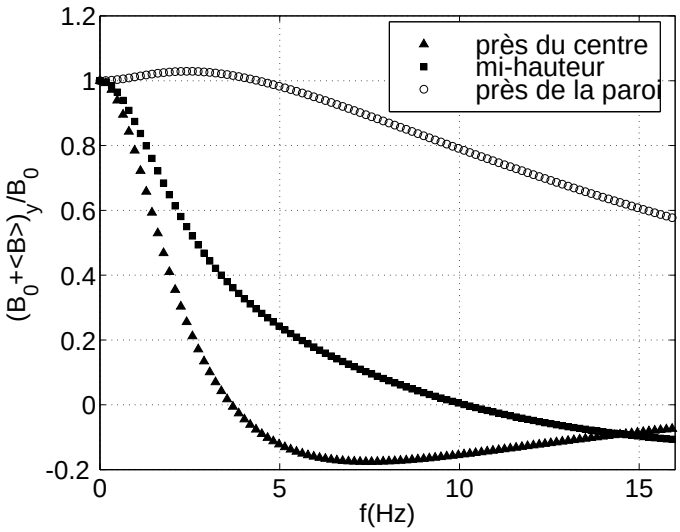

FIG. 2.12 – *Champ transverse en fonction de la fréquence de rotation f du cylindre pour un écoulement de Ponomarenko et pour un champ appliqué transverse.*

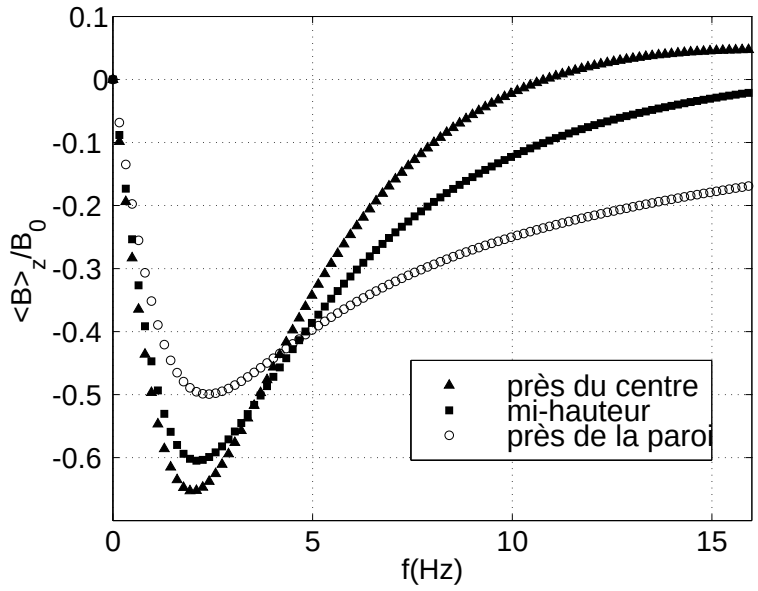

FIG. 2.13 – *Champ induit vertical en fonction de la fréquence de rotation f du cylindre pour un écoulement de Ponomarenko et pour un champ appliqué transverse.*

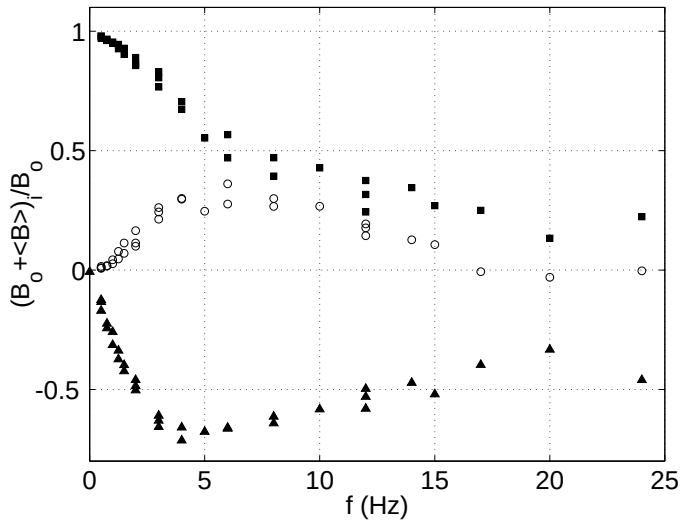

FIG. 2.14 – *Champ moyen en fonction de la fréquence de rotation du moteur* (2) *pour un champ appliqué transverse et un écoulement à un disque. La sonde est en $z = 10\,cm$. Les disques sont de rayon $R = 19\,cm$ et sont pourvus de pales courbes. Il n'y a pas de baffles sur la paroi interne de la cuve cylindrique.* $(o) = \frac{\langle B_x \rangle}{B_o}$, $(\blacksquare) = \frac{B_o + \langle B_y \rangle}{B_o}$, $(\blacktriangle) = \frac{\langle B_z \rangle}{B_o}$.

Compléments

2.A Induction pour l'écoulement de Ponomarenko

Dans le même esprit que les expériences, nous avons étudié les effets induits par l'application d'un champ magnétique sur l'écoulement de Ponomarenko. Comme nous l'avons déjà décrit, il s'agit d'un écoulement de rotation solide et translation localisé dans un cylindre infini. L'extérieur du cylindre est au repos et nous avons étudié successivement le cas où l'extérieur est conducteur, ce qui engendre la dynamo à partir d'une certaine vitesse, et le cas où l'extérieur est isolant, ce qui n'engendre jamais la dynamo.

Afin de comparer plus aisément les résultats avec ceux de l'expérience nous nommons différemment les axes du cylindre, voir Fig. 2.15. Par ailleurs nous nous intéresserons principalement aux valeurs du champ induit en des points de l'axe (Oz).

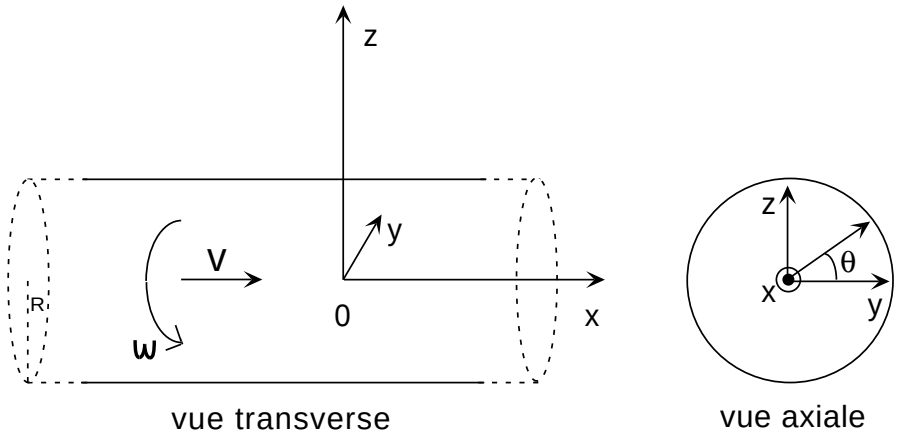

FIG. 2.15 – *Ecoulement de la dynamo de Ponomarenko et définition des axes pour l'étude de l'induction.*

Comme nous l'avons vu précédemment, lorsqu'est appliqué un champ uniforme $\vec{B}_0$ à un écoulement de vitesse $\vec{v}$ constant, il se crée un champ induit dont la valeur moyenne $\vec{B}$ est solution de l'équation

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} = -\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) \ . \tag{2.3}$$

Notons qu'il n'y a pas de termes liés aux fluctuations de vitesse qui sont nulles pour l'écoulement de Ponomarenko (rotation et translation solide). Il faut par ailleurs traduire les conditions aux limites sur $\vec{B}$, ce que nous détaillerons au cas par cas. Pour l'écoulement de Ponomarenko nous allons calculer ce champ induit pour un champ appliqué axial ou transverse et pour toutes les valeurs de la vitesse. Lorsque nous tracerons les champs induits nous nous placerons aux valeurs qui correspondent à l'optimum pour un écoulement de Ponomarenko dans un milieu conducteur au repos infini, soit $Rb = 1.314$ (voir page 38).

2.A.1 Champ appliqué axial

Il faut tout d'abord calculer le terme source de l'équation 2.3. Nous avons $\vec{v} \times \vec{B}_0 = r\,\omega\, B_o\,\Gamma(R-r)\,\vec{u}_r$ où $\Gamma(x)$ est nul pour x négatif et vaut un pour x positif. Le terme source est le rotationnel de ce champ qui est nul; il n'y a donc pas de champ induit et ce quelle que soit la valeur de R_m.

Physiquement un tel champ $\vec{B}_0$ uniforme et axial n'induit pas de champ suivant les autres directions car il n'y a pas d'effet alpha. Ceci n'est plus le cas si cette composante a une dépendance spatiale comme le mode neutre de la dynamo de Ponomarenko.

2.A.2 Champ appliqué transverse

Nous utilisons les coordonnées cylindriques dans lesquelles $\vec{B}_0 = B_0(\cos\theta\,\vec{u}_r - sin\theta\,\vec{u}_\theta)$. Le terme source est ainsi

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) = B_0 Re\Big(&\omega\,\Gamma(R-r)\,i\exp(i\,\theta)\vec{u}_r \\ &+\omega\,\exp(i\,\theta)(r\,\delta(r-R) - \Gamma(R-r))\,\vec{u}_\theta \\ &+v\,\delta(r-R)\,\exp(i\,\theta)\vec{u}_x\Big)\end{aligned} \tag{2.4}$$

où $Re(a)$ est la partie réelle de a. L'équation 2.3 étant linéaire nous utilisons la notation complexe et cherchons des champs induits sous la forme $\vec{B} = \vec{b}\exp(i\theta)$. Nous reviendrons aux champs physiques $\vec{B}$ en écrivant $\vec{B} = Re(\vec{b})\cos(\theta) - Im(\vec{b})\sin(\theta)$. Pour des champs complexes et pour $r \leq R$, le champ induit est solution de

$$-i\mu\Gamma(R-r)\vec{b} + \Delta\vec{b} - \mathcal{C}_l\,\vec{b} = -\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0) \tag{2.5}$$

où les définitions des divers opérateurs sont celles des équations 1.7 et 1.8 page 40 et $\mu = \omega$. Comme pour la recherche du mode neutre, nous introduisons $b\pm = b_r \pm i\,b_\theta$, ce qui découple les équations sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$. La solution est

$$\begin{aligned} b_+ &= A_+\,I(2, q\,r)\,, \\ b_- &= A_-\,I(0, q\,r) - 2B_0\,, \\ b_x &= A_x\,I(1, q\,r)\,, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $q = \exp(i\pi/4)\sqrt{\frac{\omega}{\eta}}$.

La résolution dépend alors de la nature du milieu extérieur.

Milieu extérieur conducteur

Dans ce cas, l'équation 2.5 est valable aussi pour $r \geq R$. La solution tendant vers zéro à l'infini est

$$\begin{aligned} b_+ &= \frac{C_+}{r^2}\,, \\ b_- &= 0\,, \\ b_x &= \frac{C_x}{r}\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Les champs sont donc déterminés à l'aide de cinq constantes d'intégration que nous déterminons avec les relations de continuité. Le champ magnétique est continu donc $b_+, b_-, et\, b_x$ sont continus en R. Par ailleurs, comme $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, il vient que $\frac{db_r}{dr}$ est continu. Enfin les composantes tangentielles du champ électrique $\vec{E} = \eta\,\nabla \times \vec{B} - \vec{v} \times \vec{B}$ sont continues. La composante orthoradiale donne une cinquième relation de continuité, celle de

$$\eta \tfrac{db_x}{dr} + v\,\Gamma(R-r)\,b_r + B_0\,v\,\Gamma(R-r).$$

La résolution de ce système d'équations donne l'expression des champs

$$\begin{aligned} & r \leq R & & r \geq R\,, \\ b_+ &= -2B_0 \frac{I(2,q\,r)}{I(0,q\,R)} & & -2B_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{I(2,q\,R)}{I(0,q\,R)}\,, \\ b_- &= 2B_0 \frac{I(0,q\,r)}{I(0,q\,R)} - 2B_0 & & 0\,, \\ b_x &= -\frac{2\,v\,R\,B_0}{\eta}\,\frac{I(1,q\,R)I(1,q\,r)}{(q\,R\,I(0,q\,R))^2} & & -\frac{2\,v\,R\,B_0}{\eta}\,\frac{R}{r}\left(\frac{I(1,q\,R)}{q\,R\,I(0,q\,R)}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Comme nous l'avons dit précédemment, il est possible de calculer le champ physique avec $\vec{B} = Re(\vec{b})\cos(\theta) - Im(\vec{b})\sin(\theta)$. Afin d'étudier le comportement à bas R_m, nous développons ces expressions dans la limite de petit ω soit de petit q. Il vient, pour le champ physique à l'intérieur du cylindre

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{B_0\,\omega\,R^2}{8\,\eta}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\right)\sin(\theta) + \frac{B_0\,\omega^2\,R^4}{\eta^2}\left(-\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^4}{192} + \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2}{32} - \frac{3}{64}\right)\cos(\theta) \\ B_\theta &= \frac{B_0\,\omega\,R^2}{8\,\eta}\left(2 - 3\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\cos(\theta) - \frac{B_0\,\omega^2\,R^4}{\eta^2}\left(\frac{5\,\left(\frac{r}{R}\right)^4}{192} - \frac{3\,\left(\frac{r}{R}\right)^2}{32} + \frac{3}{64}\right)\sin(\theta) \\ B_x &= -\frac{B_0\,v\,R}{2\,\eta}\frac{r}{R}\cos(\theta) + \frac{B_0\,v\,\omega\,R^3}{\eta^2}\left(-\frac{3\,r}{16\,R} + \frac{1}{16}\left(\frac{r}{R}\right)^3\right)\sin(\theta) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Les champs induits sont proportionnels au champ appliqué B_0 puisque nous ne tenons pas compte de l'effet du champ magnétique sur le champ de vitesse. Notons que le développement 2.9 prend la forme d'une série entière en les variables $\frac{v\,R}{\eta}$ et $\frac{\omega\,R^2}{\eta}$. Ce

développement diverge si les variables sont en dehors du rayon de convergence de la série, c'est-à-dire à grand R_m. Ce n'est pas le cas du champ qui ne diverge pas et vaut pour tout R_m les valeurs déduites de l'équation 2.8. Pour cet écoulement, il semble qu'il n'y a pas d'effet physique associé à la divergence du développement perturbatif du champ induit. Afin de comparer aux expériences nous nous intéressons aux valeurs du champ mesuré sur l'axe vertical, soit pour $\theta = \pi/2$. Dans ce cas nous notons, comme lors de l'expérience VKS, $B_z = B_r$ le champ vertical et $B_y = -B_\theta$ le champ transverse. A l'ordre linéaire seul le champ vertical est non nul. Les autres champs induits sont quadratiques et résultent d'un terme en ω^2 pour B_y et en $\omega\, v$ pour B_x. Nous interprétons ce dernier terme comme la génération de champ axial à partir d'un champ transverse pour un écoulement hélicoïdal, ce qui est le mécanisme de base de l'effet alpha.

Nous avons tracé en figures 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, la courbe d'induction $(\vec{B_0} + \vec{B})/B_0$ en fonction de ω pour différentes positions de la sonde sur l'axe vertical. Afin de visualiser les comportements à basses et hautes fréquences nous traçons à chaque fois une courbe pour des petites valeurs de ω et une courbe pour des plus grandes valeurs.

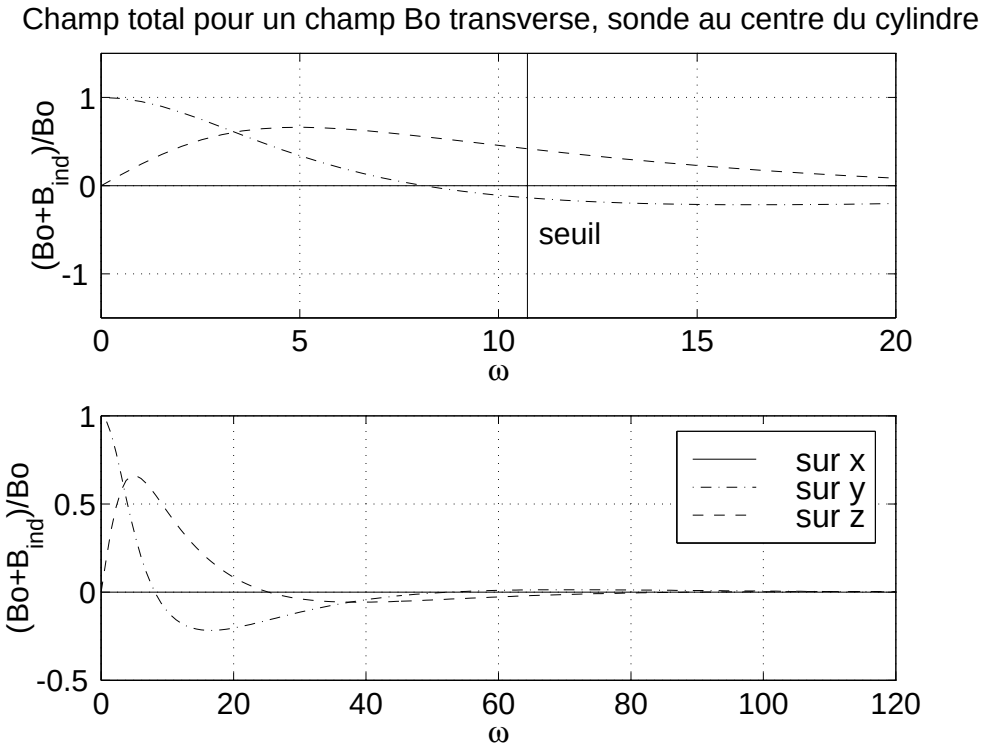

FIG. 2.16 – *Champ total pour un écoulement de Ponomarenko. Le champ appliqué est transverse (suivant y). La sonde est au centre du cylindre, en $z = 0$. L'extérieur est conducteur. $(-)$ champ sur x, $(-.)$ champ sur y, $(--)$ champ sur z.*

Plusieurs résultats sont généraux. A basse vitesse, seule la composante verticale est linéaire tandis que les autres sont quadratiques ou nulles. A haute vitesse, le champ total

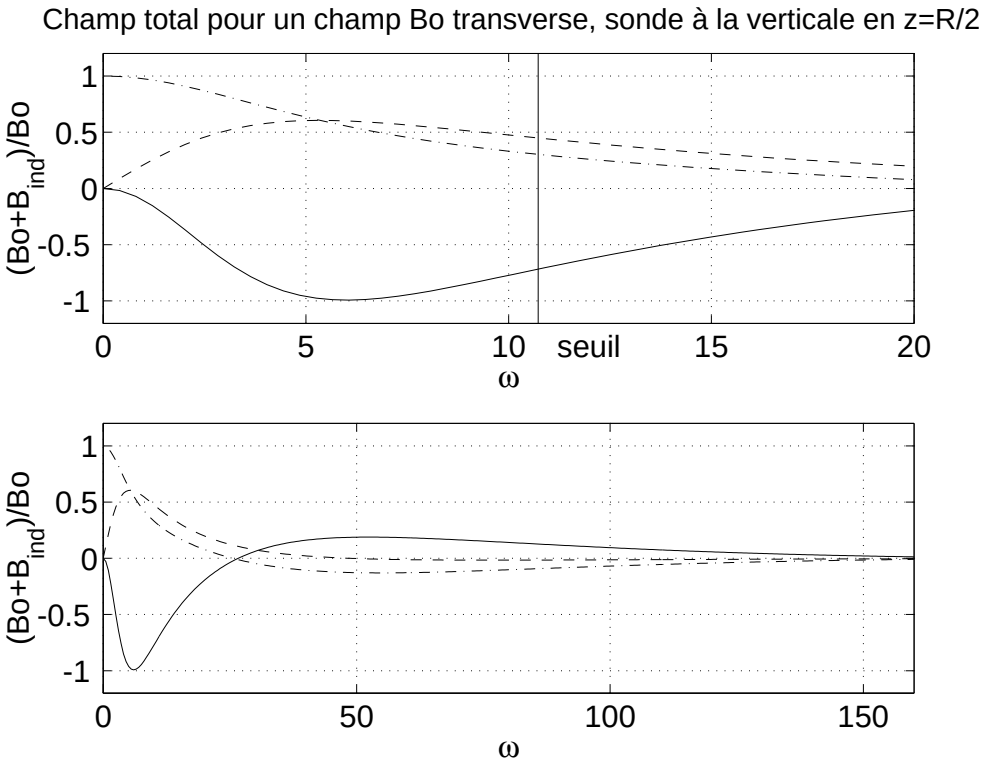

FIG. 2.17 – *Champ total pour un écoulement de Ponomarenko. Le champ appliqué est transverse (suivant y). La sonde est sur la verticale, en $z = R/2$. L'extérieur est conducteur. $(-)$ champ sur x, $(-.)$ champ sur y, $(--)$ champ sur z.*

décroît à zéro à l'intérieur du cylindre. C'est l'expulsion du champ magnétique sous l'effet de l'écoulement en rotation solide [17, 59].

Un autre résultat très important est qu'il ne se passe rien de particulier au seuil de la dynamo ($\omega_c = 10.73\,\eta/R^2$), comme nous pouvons le voir par exemple dans la fig. 2.16. En effet nous nous intéressons à l'évolution d'un mode qui n'est pas le mode instable car il n'a pas de dépendance suivant l'axe ni de dépendance temporelle. Bien évidemment dans le cas d'une expérience, le mode instable croît au dessus du seuil et, en modifiant l'écoulement pour atteindre la saturation, il perturbe l'évolution du champ induit moyen que nous avons calculé. Dans notre calcul du champ induit nous ne trouvons pas cet effet qui nécessite la résolution du problème dynamique complet. Mais cet effet est nul au seuil puisque l'amplitude du mode instable tend vers zéro. Il peut être par ailleurs rendu aussi petit que voulu en augmentant la viscosité cinématique du fluide, ce qui diminue l'effet de la force de Laplace due à la croissance du mode instable.

Le champ vertical, suivant $\vec{u}_z$, est à basse vitesse linéaire en fonction de la vitesse de rotation. Il passe par un maximum puis décroît. Si la sonde est proche de l'axe central (figures 2.16, 2.17), sa valeur peut devenir négative. A haute vitesse cette composante tend

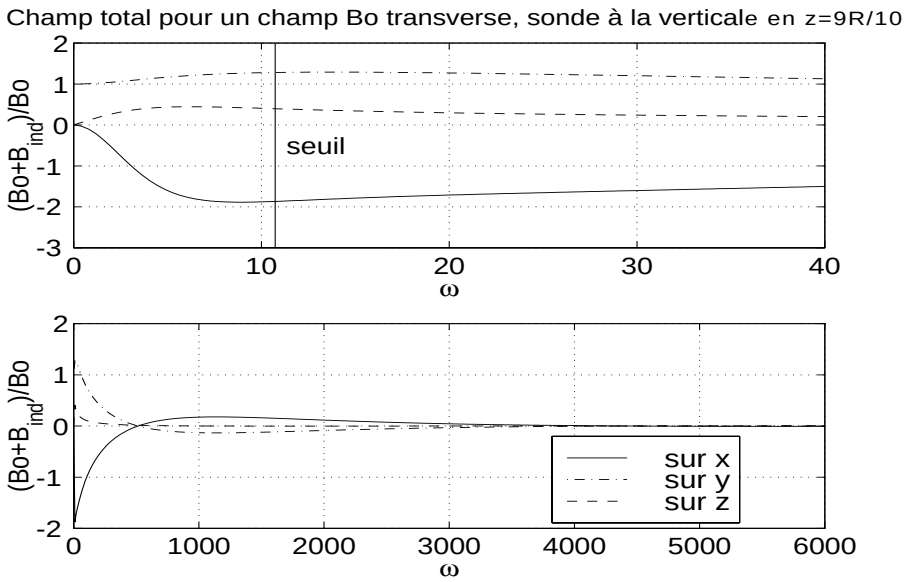

FIG. 2.18 – *Champ total pour un écoulement de Ponomarenko. Le champ appliqué est transverse (suivant y). La sonde est sur la verticale, en $z = 9\,R/10$. L'extérieur est conducteur. $(-)$ champ sur x, $(-.)$ champ sur y, $(--)$ champ sur z.*

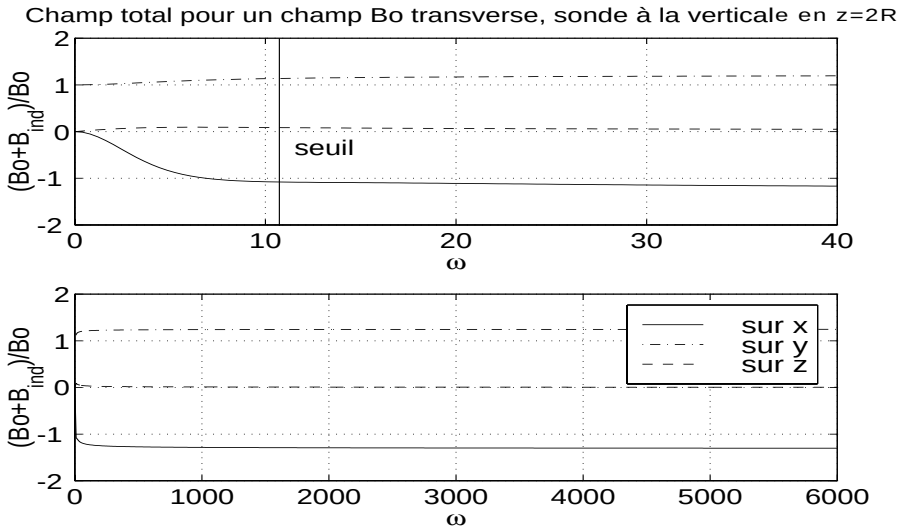

FIG. 2.19 – *Champ total pour un écoulement de Ponomarenko. Le champ appliqué est transverse. La sonde est sur la verticale, à l'extérieur du cylindre, en $z = 2\,R$. L'extérieur est conducteur. $(-)$ champ sur x, $(-.)$ champ sur y, $(--)$ champ sur z.*

vers zéro. Le champ induit transverse, suivant $\vec{u}_y$ est quadratique pour de basses vitesses de rotation. Si la sonde est proche de l'axe central, ce champ est négatif et le champ total décroît, atteint un minimum et tend à zéro pour de grandes valeurs de ω. Si la sonde est proche de la paroi du cylindre, le champ induit est positif à basse vitesse, le champ total commence par croître avant d'atteindre un maximum puis de tendre vers zéro à hautes vitesses. Hors du cylindre le champ induit est positif et le champ total sature à une valeur qui dépend de la position de la sonde. Plus la sonde est loin, plus la valeur limite du champ induit est proche de zéro. Le champ axial se comporte quadratiquement à basse vitesse de rotation sauf au centre où il est nul à toute vitesse. Il est négatif, atteint un minimum puis croît et devient positif avant de tendre vers zéro à l'intérieur du cylindre. Hors du cylindre le champ axial tend vers zéro si nous nous en éloignons.

Milieu extérieur isolant

Dans ce cas la résolution du problème est différente en raison notamment des conditions aux limites. Pour $r \geq R$, le champ induit $\vec{B}$ est solution de $\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$ et $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Ce sont les mêmes équations que celles de l'électrostatique dans le vide pour lesquelles le champ électrostatique $\vec{E}$ est défini par la valeur du potentiel scalaire à la paroi du milieu isolant. Il en est de même dans notre cas. Pour des champs de la forme $\vec{B} = Re(\vec{b}(r)\exp(i\theta))$, la solution de ces équations est [66]

$$\begin{aligned} b_r &= -\frac{A}{r^2}\,, \\ b_\theta &= \frac{i\,A}{r^2}\,, \\ b_x &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous connaissons donc la forme du champ dans tout l'espace à l'aide de quatre constantes d'intégration qui sont déterminées par la continuité de $\vec{B}$ et de $\frac{db_r}{dr}$ à la paroi. Il vient

$$\begin{array}{ll} r \leq R & r \geq R\,, \\ b_r = B_0\left(\dfrac{I(0,q\,r)}{I(0,qR)} - \dfrac{I(2,q\,r)}{I(0,qR)} - 1\right) & b_r = -B_0\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 \dfrac{I(2,q\,R)}{I(0,q\,R)}\,, \\ b_\theta = -i\,B_0\left(1 - \dfrac{I(2,q\,r)}{I(0,q\,R)} - \dfrac{I(0,q\,r)}{I(0,q\,R)}\right) & b_\theta = i\,B_0\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 \dfrac{I(2,q\,R)}{I(0,q\,R)}\,, \\ b_x = 0 & b_x = 0, \end{array} \tag{2.11}$$

où $q = \exp(i\pi/4)\sqrt{\frac{\omega}{\eta}}$. Le champ physique s'en déduit à l'aide de $\vec{B} = Re(\vec{b})\cos(\theta) - Im(\vec{b})\,\sin(\theta)$. Nous retrouvons la même expression que pour le milieu extérieur conducteur en ce qui concerne les composantes du champ induit suivant $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$. Mais le principal résultat est qu'il n'y a pas de champ induit suivant l'axe. En effet l'extérieur étant isolant, cela contraint le champ axial à être nul à la paroi. Il ne peut alors y avoir de conversion entre le champ radial et le champ axial par effet oméga car cette conversion est localisée à

la paroi où le champ axial est nécessairement nul. Dans le cas du milieu extérieur isolant, qui rappelons le n'engendre pas la dynamo, c'est un résultat très fort pour le champ induit axial qui est nul pour toute valeur de R_m. Cela signifie que le mécanisme de génération de champ magnétique axial par un écoulement soumis à un champ externe transverse nécessite la prise en compte des conditions aux limites. Dans les figures 2.16, 2.18, 2.18, 2.19, nous avons tracé le champ induit lorsque le milieu extérieur est conducteur. Dans le cas où le milieu extérieur est le vide, les champs induits suivant $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont les mêmes tandis que les champs suivant $\vec{u}_x$ sont nuls.

Étude des lignes de champ

De l'étude du champ en un point du cylindre nous avons pu comprendre diverses propriétés du champ magnétique induit. Mais cette approche nous limite à une valeur ponctuelle du champ magnétique. Une vision plus globale est fournie par la donnée des lignes de champ. Ce sont les courbes de l'espace qui sont tangentes en tout point au champ magnétique. A vitesse de l'écoulement fixée, il faut résoudre le système d'équations qui s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\frac{dr}{dB_r} = \frac{rd\theta}{dB_\theta} = \frac{dx}{dB_x} = ds,$$

ce qui définit une courbe de l'espace $\mathcal{C} \equiv (r,\theta,x)(s)$ à une constante d'intégration près. Cette constante est la position d'un point de la courbe pour la valeur du paramètrage s égale à zéro. Nous résolvons le système d'équations numériquement par une méthode de Runge-Kutta.

Nous avons choisi d'étudier les lignes de champ de l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur. Aucune composante du champ n'étant nulle, ces courbes ne sont pas localisées dans un plan. Ce n'est pas le cas si le milieu extérieur est isolant. Le champ suivant l'axe est alors nul et les lignes de champ sont localisées dans les plan (yz). Comme aucune des composantes ne dépend de x, nous obtenons les courbes dans le cas où le milieu extérieur est isolant en projetant sur les plans (yz) les courbes du cas où le milieu extérieur est conducteur.

A vitesse nulle, il n'y a pas de champ induit et les lignes de champ sont des droites parallèles à $(0y)$. Pour une vitesse de rotation $\omega = 1$ nous traçons d'une part un ensemble de lignes de champ à trois dimensions en figure 2.20. Nous traçons en figures 2.21 (resp. 2.22) la projection de ces lignes de champ sur le plan (Oyz) (resp. (Oyx)).

Les lignes de champ sont principalement modifiées dans la zone où a lieu l'écoulement. Celle-ci est délimitée par un cercle sur les figures à trois dimensions et sur les projections dans le plan (Oyz). A basse vitesse de rotation pour $\omega = 1$ et pour $\omega = 3$ (voir figures 2.23, 2.24, 2.25) l'advection des lignes de champ a tendance dans le plan $(0yz)$ à les tordre dans le sens de la vitesse azimutale. Elles sont aussi advectées dans le sens de l'écoulement axial. Cet effet est d'autant plus marqué que la ligne considérée entre dans le cylindre près du point $\theta = \pi$ et donc qu'elle parcourt plus de trajet dans la zone où a lieu l'écoulement. Lorsque la vitesse augmente, pour $\omega = 8$ (voir figures 2.26, 2.27, 2.28), les lignes de champ

à trois dimensions sont de plus en plus complexes. Pour ω valant douze, vingt, cent et cinq cents, nous ne traçons que les projections sur le plan (Oyz) des trajectoires en figures 2.29, 2.30, 2.31 et 2.32. Nous voyons apparaître le phénomène d'expulsion des lignes de champ. Celles-ci ne pénètrent quasiment plus dans le cylindre et sont localisées dans une couche à la paroi.

Ce phénomène a déjà été étudié en géométrie sphérique [67] et pour des écoulements dont les lignes de courant sont fermées. Nous obtenons des résultats qualitativement similaires. Notons que le comportement asymptotique de la composante verticale des lignes de champ est divergente. En effet, asymptotiquement loin du cylindre, la forme des champs donne les comportements $\frac{d\theta}{ds} \to 0$, $\frac{dr}{ds} \to c$ où c est une constante. Pour la composante axiale, puisque $B_x \propto \frac{1}{r}$, il vient $\frac{dx}{ds} \to \frac{c'}{s}$ et donc la coordonnée axiale diverge logarithmiquement. Cette influence à longue distance de l'écoulement vient clairement du comportement de B_x qui est réminiscent de l'existence de courants à l'infini. Autrement dit, il n'est pas surprenant d'avoir un comportement singulier à l'infini, et ce même à très faibles vitesses de l'écoulement. Cela est dû à la présence de courants à l'infini.

En outre, si nous ne considérons que leurs directions et pas leurs sens, il apparaît que les lignes de champ ne sont pas symétriques par rapport à l'axe du cylindre (Ox) alors que celles-ci le sont dans le cas où le cylindre est uniquement en rotation solide et n'a pas de vitesse axiale [68]. Dans ce dernier cas, les lignes de champ sont symétriques par rapport à l'axe ce que nous pouvons comprendre à l'aide de simples arguments de symétrie.

Par rotation d'axe (Ox) et d'angle π, nous transformons les lignes de champ $\mathcal{C}$ en leurs images par cette rotation que nous notons $R(\mathcal{C})$. Le champ magnétique appliqué $\vec{B}_0$ est changé en son opposé tandis que l'écoulement n'est pas modifié.

Effectuons ensuite la symétrie par rapport au plan $P = (Oyz)$. Le champ magnétique $-\vec{B}_0$ est changé en son opposé alors que le champ de vitesse est inchangé. Les lignes de champs $R(\mathcal{C})$ sont inchangées puisqu'elles sont comprises dans le plan P, et que nous ne nous intéressons pas au sens des lignes mais seulement à leur direction.

Ainsi par l'application successive de ces deux transformations nous retrouvons la configuration initiale du champ appliqué et de l'écoulement. Nous en déduisons donc que les lignes de champ sont les mêmes ce qui s'écrit $\mathcal{C} = \mathcal{R}(\mathcal{C})$ et signifie que l'ensemble des lignes de champ est invariant par rotation d'axe (Ox) et d'angle π.

Dans le cas de l'écoulement de Ponomarenko, le raisonnement précédent est faussé par la présence d'un champ de vitesse axial qui n'est pas invariant par symétrie par rapport au plan P et il n'y a pas de raison pour que les lignes de champ soient symétriques par rapport à l'axe.

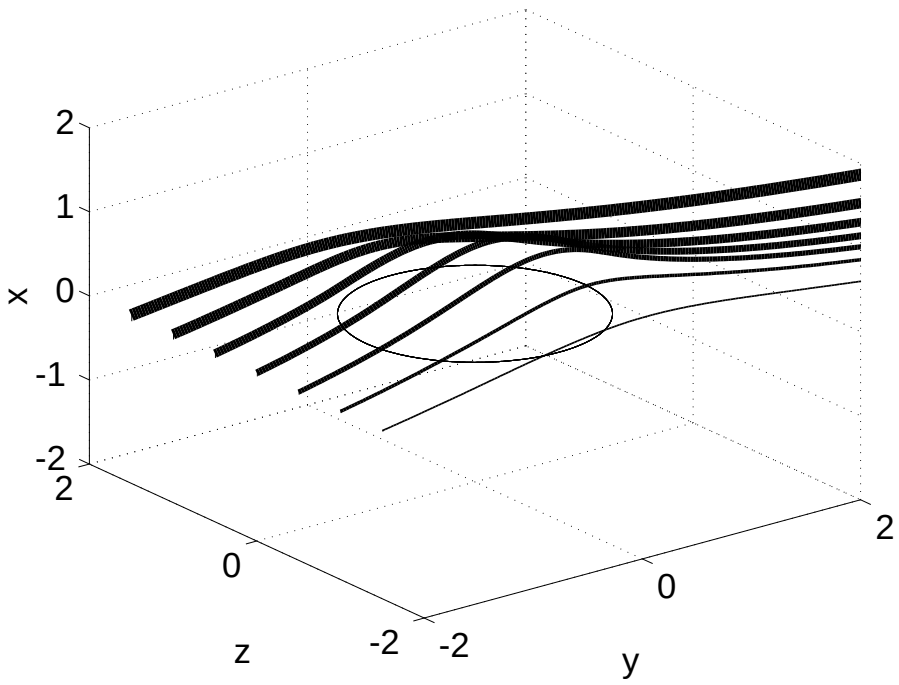

FIG. 2.20 – *Lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 1$.

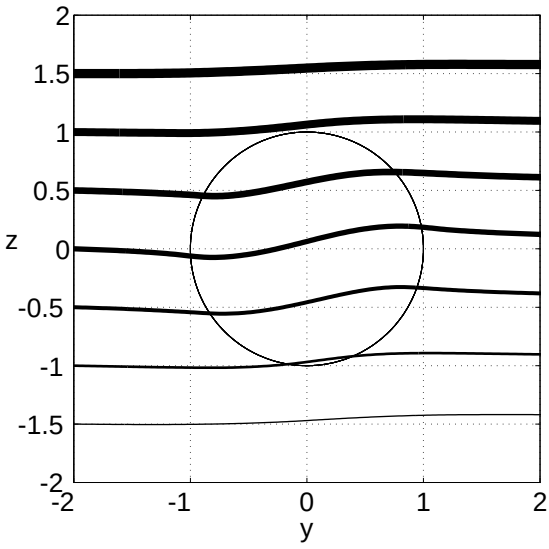

FIG. 2.21 – *Projection sur le plan* (Oyz) *des lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 1$.

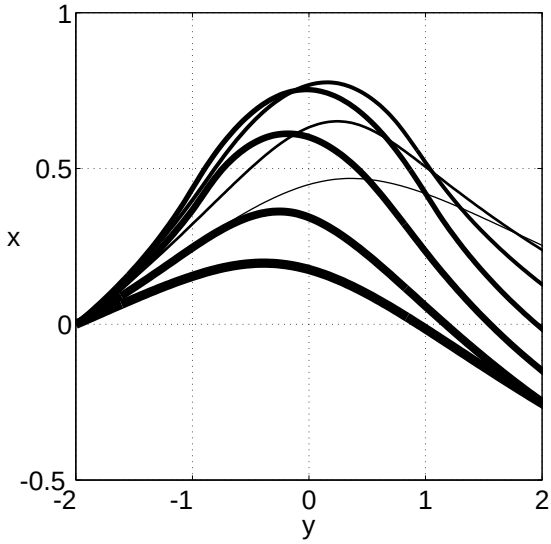

FIG. 2.22 – *Projection sur le plan* (Oyx) *des lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 1$.

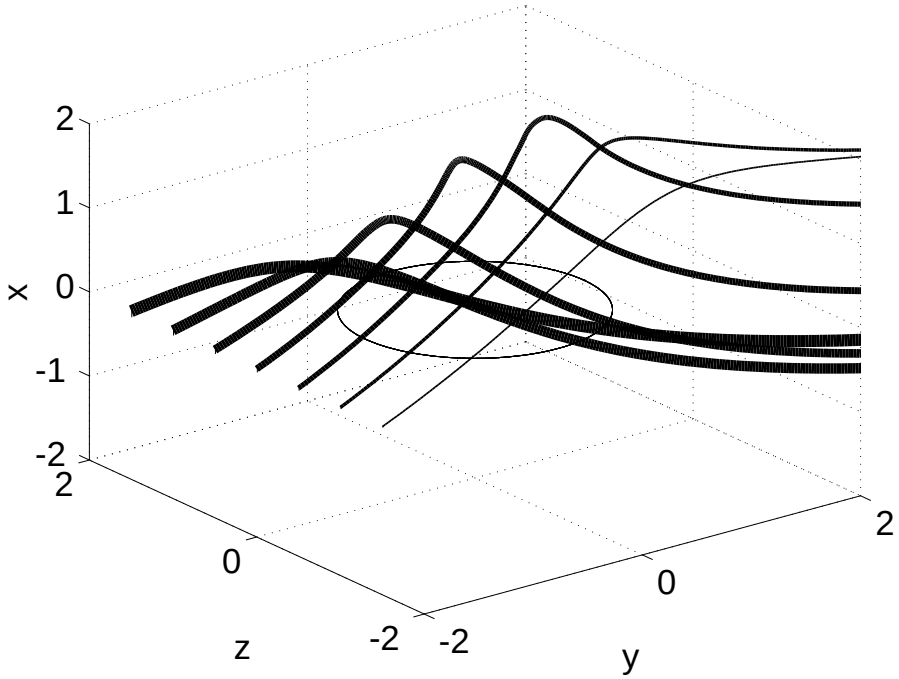

FIG. 2.23 – *Lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 3$.

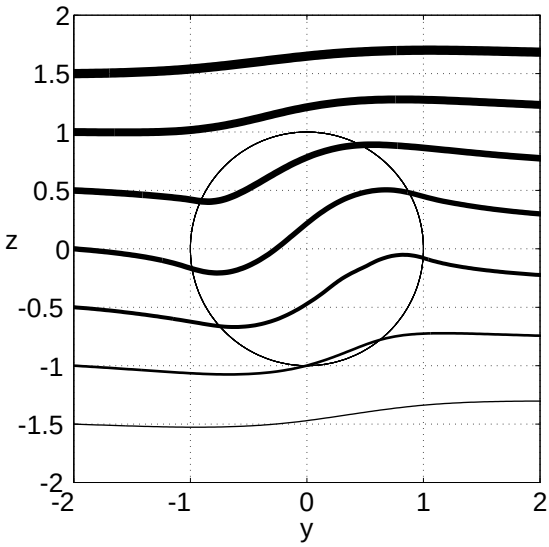

FIG. 2.24 – *Projection sur le plan* (Oyz) *des lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 3$.

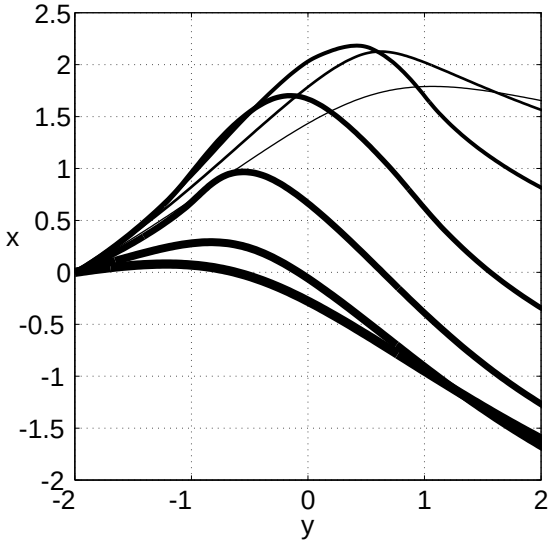

FIG. 2.25 – *Projection sur le plan* (Oyx) *des lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 3$.

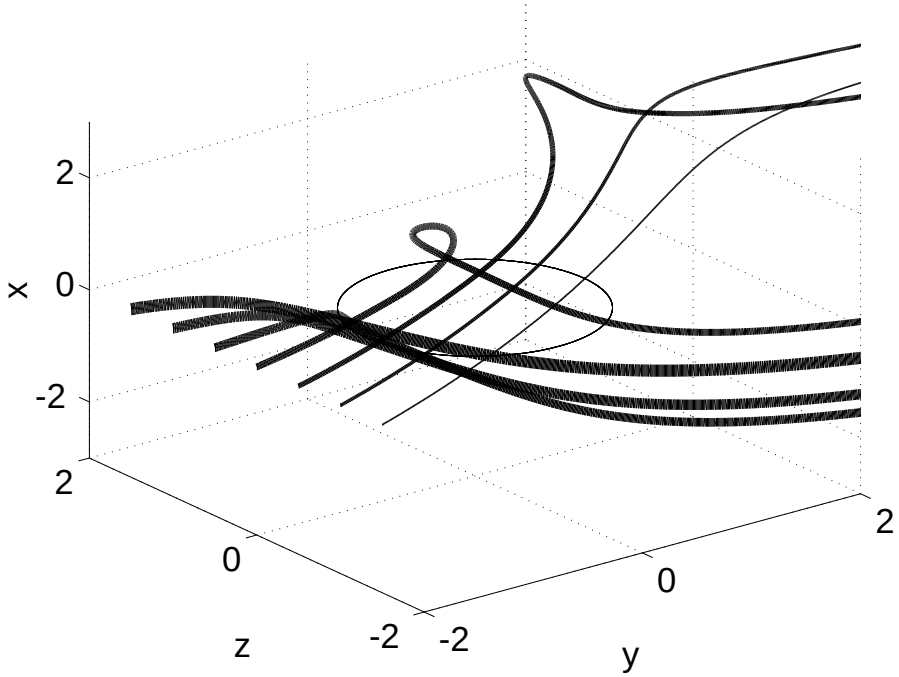

FIG. 2.26 – *Lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 8$.

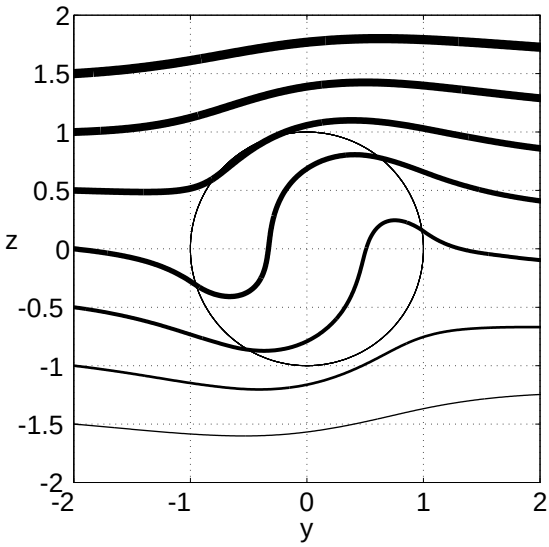

FIG. 2.27 – *Projection sur le plan* (Oyz) *des lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 8$.

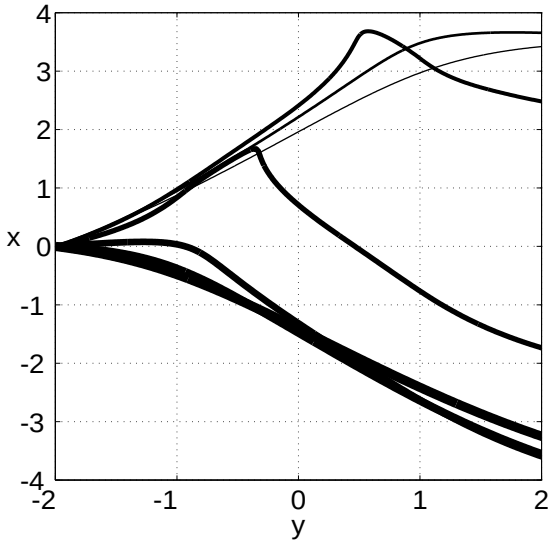

FIG. 2.28 – *Projection sur le plan* (Oyx) *des lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 8$.

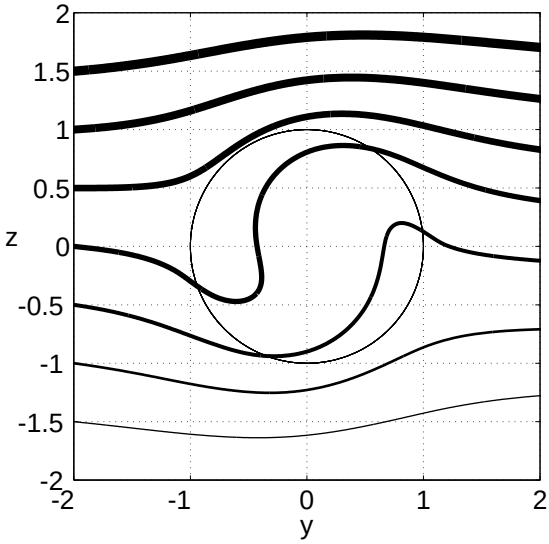

FIG. 2.29 – *Projection sur le plan* (Oyz) *des lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 12$.

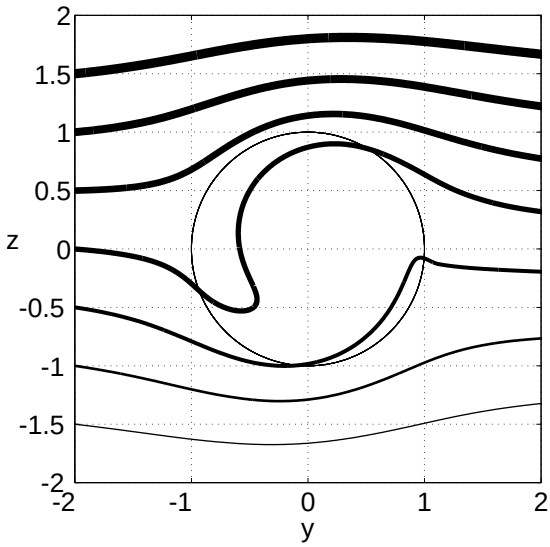

FIG. 2.30 – *Projection sur le plan* (Oyz) *des lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 20$.

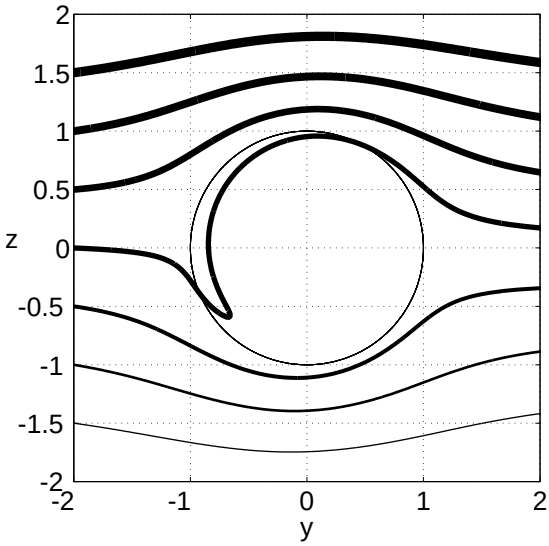

FIG. 2.31 – *Projection sur le plan* (Oyz) *des lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 100$.

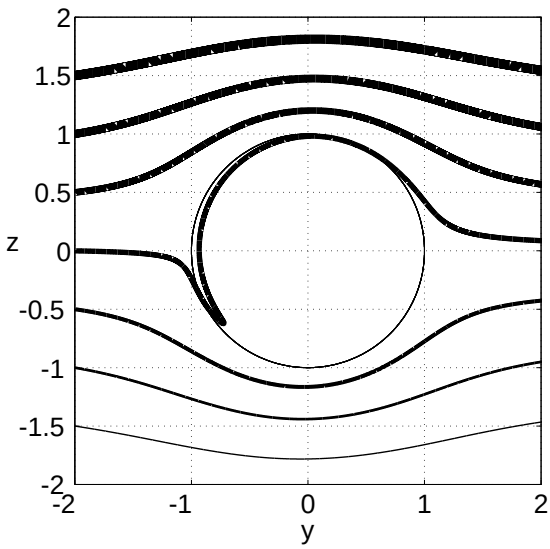

FIG. 2.32 – *Projection sur le plan* (Oyz) *des lignes de champ pour l'écoulement de Ponomarenko avec milieu extérieur conducteur et vitesse de rotation* $\omega = 500$.

Chapitre 3

Mesures des fluctuations d'induction

Le champ induit $\vec{B}$ et sa moyenne $\langle\vec{B}\rangle$ étant proportionnels à $\vec{B}_0$, il en va de même pour la partie fluctuante du champ induit $\vec{B}' = \vec{B} - \langle\vec{B}\rangle$. En figures 3.1 (resp. 3.2), nous avons tracé l'écart quadratique moyen $\vec{B}\,rms$ des différentes composantes du champ induit en fonction du champ appliqué axial (resp. transverse) pour un écoulement à deux disques contrarotatifs à fréquence de rotation fixée à $f = 8\,Hz$ et $f = 17\,Hz$.

Nous vérifions expérimentalement la proportionnalité des composantes fluctuantes du champ induit en fonction du champ appliqué. Désormais nous étudierons les valeurs des composantes fluctuantes divisées par le champ appliqué B_0.

En figure 3.3, nous avons tracé la dépendance fréquentielle de l'écart quadratique moyen pour un champ appliqué transverse. Contrairement aux mesures d'induction moyenne, les différentes composantes sont à peu près égales. Ainsi, alors que le champ de vitesse crée une induction moyenne fortement anisotrope, il crée une induction fluctuante qui ne l'est pas. Cela est clairement relié à la nature des termes sources du champ moyen qui dépendent du champ de vitesse moyen, lui même fortement anisotrope. Il en va différemment pour les termes sources du champ fluctuant où entre en jeu la composante fluctuante du champ de vitesse qui est à priori plus isotrope. Notons aussi qu'en première approximation les composantes fluctuantes du champ restent linéaires en fonction de la fréquence de rotation et qu'il n'apparaît aucune trace des divers phénomènes non linéaires qui régissent les variations du champ moyen. De tels effets apparaissent certainement à plus hautes fréquences de rotation.

La mesure de l'écart quadratique moyen revient à sommer les contributions de toutes les fréquences temporelles qui composent le signal. Pour accéder à la distribution fréquencielle des fluctuations, nous avons calculé le spectre des différentes composantes du champ magnétique. Nous notons $\hat{\vec{B}}'(F)$ la transformée de Fourier temporelle de $\vec{B}'$ à la fréquence F. Pour une fréquence de rotation des moteurs de $f = 17\,Hz$, nous avons tracé la puissance spectrale de chaque composante du champ en figure 3.4.

Notons que les courbes pour les trois composantes du champ sont très semblables, c'est pourquoi nous ne les différencions pas dans la légende. C'est, là encore, la traduction

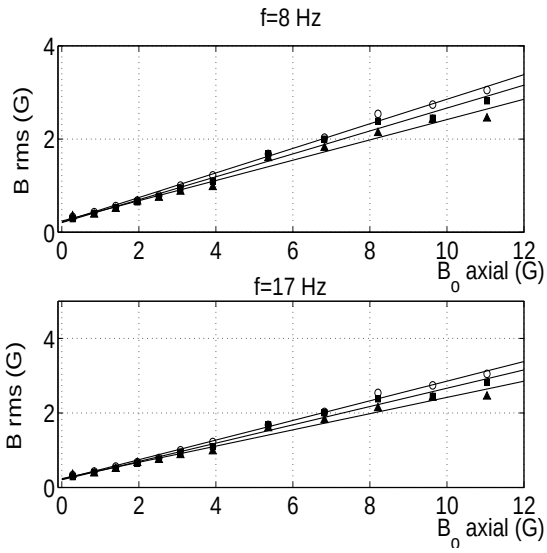

FIG. 3.1 – *Ecart quadratique moyen des composantes du champ en fonction du champ appliqué axial pour un écoulement à deux disques contrarotatifs à fréquence* $f = 8\,Hz$ *et* $f = 17\,Hz$*. Même configuration qu'en figure 2.14.* $(o) = B_x\,rms$, $(\blacksquare) = B_y\,rms$, $(\blacktriangle) = B_z\,rms$.

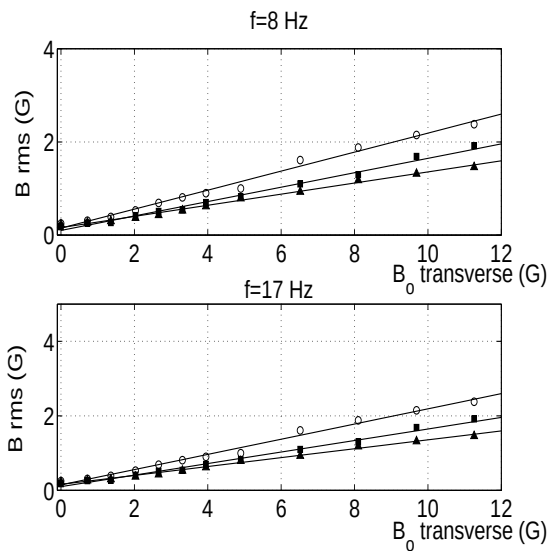

FIG. 3.2 – *Ecart quadratique moyen des composantes du champ en fonction du champ appliqué transverse pour un écoulement à deux disques contrarotatifs à fréquence* $f = 8\,Hz$ *et* $f = 17\,Hz$*. Même configuration qu'en figure 2.14.* $(o) = B_x\,rms$, $(\blacksquare) = B_y\,rms$, $(\blacktriangle) = B_z\,rms$.

que les fluctuations du champ magnétique sont complétement isotropes, et ce pour toutes les fréquences temporelles.

La pente de la partie haute fréquence est assez proche de $F^{-11/3}$. Ceci se comprend bien dans le cadre d'une description de la turbulence à la Kolmogorov [69]. Plus précisément, supposons que le spectre de l'énergie cinétique soit en $\hat{v'}^2 \propto F^{-5/3}$ comme c'est le cas pour un écoulement turbulent isotrope. Pour de faibles champs induits, les fluctuations de champ magnétique sont engendrées principalement par un équilibre entre le terme diffusif et le terme d'induction de l'équation 1.1 page 135 soit

$$\eta \nabla^2 \vec{B'} \simeq -\vec{B}_0.\nabla\,\vec{v'}\,, \tag{3.1}$$

ce qui donne, pour des fréquences élevées et en faisant l'hypothèse de Taylor,

$$\eta F^2 \hat{B'} \simeq B_o\,F\,\hat{v'}\,. \tag{3.2}$$

Nous obtenons donc un spectre pour le champ magnétique

$$\hat{B'} \propto \frac{\hat{v'}}{F} \propto F^{-11/6}, \tag{3.3}$$

soit pour la puissance spectrale $\hat{B'}^2 \propto F^{-11/3}$. Quoi qu'il en soit, des mesures plus précises sont prévues afin d'avoir une plus large dynamique du champ magnétique et donc de calculer son spectre sur une fenêtre fréquencielle plus étendue.

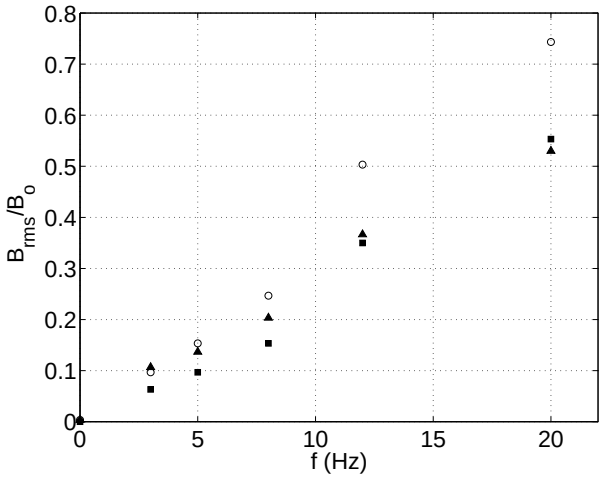

FIG. 3.3 – *Ecart quadratique moyen du champ en fonction de la fréquence de rotation f pour un champ appliqué transverse et un écoulement à deux disques contrarotatifs. La sonde est en $z = 10\,cm$. Les disques sont de rayon $R = 19\,cm$ et sont pourvus de pales courbes. Quatre baffles de hauteur $h = 1\,cm$ sont montées sur la paroi interne de la cuve cylindrique.* $(o) = \frac{B_x rms}{B_o}$, $(\blacksquare) = \frac{B_y rms}{B_o}$, $(\blacktriangle) = \frac{B_z rms}{B_o}$.

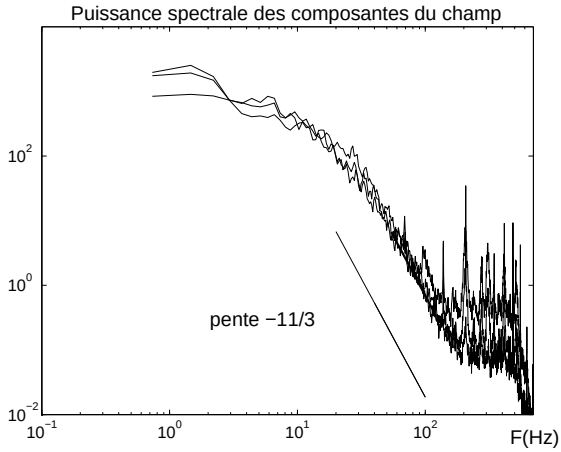

FIG. 3.4 – *Superposition du carré du spectre des trois composantes du champ magnétique (aussi appelé puissance spectrale) en fonction de la fréquence F pour un champ appliqué transverse de $3\,G$ et un écoulement à deux disques contrarotatifs à $f = 17Hz$. La droite correspond à une pente $-11/3$. Le plateau à haute fréquence est associé au bruit de l'acquisation.*

Quatrième partie

Complément: Effet d'un bruit multiplicatif sur une instabilité

Cette dernière partie est un complément à la thèse en ce sens que nous y présentons des résultats liés à l'effet du bruit sur des instabilités décrites hors du cadre de la magnéto-hydrodynamique.

Il nous a paru intéressant de montrer que les techniques utilisées pour calculer l'effet de la turbulence sur le seuil de l'instabilité dynamo peuvent être appliquées à d'autres instabilités. Nous insistons notamment sur la forme bilinéaire que nous introduisons pour calculer les conditions de solvabilité de toute étude perturbative d'un système bruité.

Nous étudions tout d'abord une bifurcation stationnaire dont le paramètre de contrôle est modulé, éventuellement de façon stochastique. Notre développement donne le même résultat qu'un calcul réalisé antérieurement par Lücke et al. mais où l'introduction de la forme bilinéaire est évitée ce qui rend leur développement très particulier à ce système. Nous comparons la prédiction théorique aux mesures réalisées en vibrant verticalement une couche de ferrofluide soumis à un champ magnétique vertical. Dans ce cas l'amplitude d'une onde de surface de vecteur d'onde fixé subit une bifurcation stationnaire (instabilité de Rosensweig) dont le paramètre de contrôle est une fonction de l'accélération de la couche vibrée. Si la vibration est sinusoïdale (modulation), le seuil de l'instabilité de Rosensweig est retardé. C'est le phénomène de stabilisation paramétrique dont l'étude est présentée sous la forme d'un article. Dans le cas où la vibration est aléatoire, nous mettons en évidence la stabilisation paramétrique stochastique de l'instabilité de Rosensweig.

Enfin l'effet d'un bruit de phase sur un oscillateur forcé paramétriquement est étudié dans la limite de faible dissipation. Le seuil et la saturation de l'instabilité sont calculés en présence de bruit. Tout se passe comme si le paramètre de forçage était modifié par le bruit, tant en ce qui concerne le déplacement du seuil de stabilité linéaire que le régime saturé non linéairement.

Principe de l'étude

Nous voulons étudier l'effet d'une perturbation multiplicative stochastique sur des instabilités simples. Nous allons donc nous intéresser à des systèmes dont la dynamique est décrite par une équation différentielle ordinaire régissant l'évolution d'une grandeur scalaire et nous souhaitons calculer perturbativement les modifications induites par le bruit. Nous supposons que la nature de la bifurcation n'est pas modifiée et nous effectuons un développement des fonctions et variables Y sous la forme $Y = Y_0 + \Delta\, Y_1 + \Delta^2\, Y_2 + ...$ où Δ est un petit paramètre (généralement l'amplitude du bruit $\zeta(t)$). Dans le développement apparaît naturellement une condition de solvabilité puisque la structure du calcul est, de façon très générale, un ensemble d'équations

$$\mathcal{L}\, Y_{i+1} = \phi(Y_i, Y_{i-1}, ...Y_0, \zeta(t))\,, \tag{4}$$

où $\mathcal{L}$ est un opérateur et ϕ une fonction des termes du développement aux ordres précédents et du bruit.

Notons $\langle f|g\rangle$ une forme bilinéaire sur deux espaces de fonctions E_1 et E_2. Il peut s'agir par exemple d'un produit scalaire et $E_1 = E_2$. La différence entre les deux espaces peut résulter des conditions aux limites imposées aux fonctions. L'adjoint $\mathcal{L}^\dagger$ de $\mathcal{L}$ est défini par $\left\langle \mathcal{L}^\dagger\, f|g\right\rangle = \langle f|\mathcal{L}\, g\rangle$, quelles que soient f appartenant à E_1 et g appartenant à E_2. Si C est dans le noyau de $\mathcal{L}^\dagger$, la condition de solvabilité de l'équation 4 s'écrit

$$\langle C|\phi(Y_i, Y_{i-1}, ...Y_0, \zeta(t))\rangle = 0\,. \tag{5}$$

Dans le cas où la forme bilinéaire est un produit scalaire, cette égalité correspond à l'alternative de Fredholm [70] et est une condition nécessaire et suffisante à l'existence du développement. La nullité du produit scalaire, condition nécessaire triviale, est vérifiée aussi si nous utilisons une forme bilinéaire et pas un produit scalaire. Dans ce cas, si nous supposons pour des raisons physiques que le développement existe, cette égalité permet d'obtenir la valeur des coefficients du développement et c'est ce qui nous intéresse dans un calcul perturbatif. Cette liberté dans le choix de la forme bilinéaire permet entre autre de restreindre la recherche du noyau de l'adjoint à des fonctions simples.

Dans les cas que nous allons étudier, certaines fonctions sont des réalisations d'un processus stochastique. Il en découle une particularité: la valeur d'une forme linéaire sur ces fonctions dépend en général de la réalisation du bruit. C'est le cas par exemple pour la moyenne temporelle. Nous allons introduire une forme bilinéaire qui est adaptée aux processus stochastiques. Si F et G sont deux processus stochastiques de réalisations $f_\zeta(t)$ et $g_\zeta(t)$, nous définissons

$$\langle F|G\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \langle f_\zeta(t)^*\, g_\zeta(t)\rangle_s\, dt\,, \tag{6}$$

où $\langle . \rangle_s$ est la moyenne sur les réalisations du bruit et où la valeur de la forme bilinéaire est à prendre dans la limite de T tendant vers l'infini. Il s'agit d'une généralisation du

produit scalaire: si F et G ne dépendent pas du bruit, $f_\zeta = f$ et $g_\zeta = g$ sont des fonctions déterministes qui vérifient $\langle f_\zeta(t)^* \, g_\zeta(t) \rangle_s = f(t)^* \, g(t)$. Nous retrouvons donc le produit scalaire classique $\langle F|G \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^* \, g(t) \, dt$.

Nous allons montrer sur des exemples que l'utilisation de cette forme bilinéaire permet d'obtenir divers développements perturbatifs dans le cas des systèmes bruités. Nous étudions tout d'abord une bifurcation stationnaire dont le paramètre de contrôle est bruité et retrouvons la valeur du déplacement du seuil d'instabilité que Lücke et al. ont calculé [37]. Notre calcul est similaire au leur mais introduit clairement cette forme bilinéaire. Nous vérifions la validité du développement et en définissons les limites par une expérience consistant à vibrer verticalement une couche de ferrofluide soumis à un champ magnétique vertical (forçage paramétrique de l'instabilité de Rosensweig). En effet, une composante de Fourier de l'amplitude des ondes de surface subit une bifurcation stationnaire dont le paramètre de contrôle est une fonction de la gravité qui est modulée si nous vibrons la couche. Nous étudions ensuite l'effet d'un bruit de phase sur un oscillateur paramétrique. Nous obtenons une équation d'amplitude non linéaire où apparaît un paramètre de forçage effectif qui tient compte de l'effet du bruit. Le déplacement du seuil causé par le bruit ainsi que l'amplitude à saturation en fonction de l'écart au seuil sont prédits.

Bifurcation stationnaire dont le paramètre de contrôle est bruité

Développement perturbatif

Nous étudions l'équation

$$m \, \ddot{x} + m \, d \, \dot{x} = (\epsilon + \Delta \, \zeta(t)) \, x - x^3 \, , \tag{7}$$

où x est une fonction scalaire du temps et ζ un bruit de moyenne nulle dont l'amplitude est Δ. C'est une équation très générale qui modélise de nombreux systèmes subissant une bifurcation stationnaire. Au terme non linéaire près, c'est, par exemple, l'équation qui régit pour un pendule de masse m l'écart à la position verticale la "tête en haut" dans un champ de gravité ϵ et avec un coefficient de frottement visqueux d. En l'absence de bruit, la solution stable $x = 0$ pour $\epsilon \leq 0$ est déstabilisée si $\epsilon \geq 0$ et les nouvelles solutions stables sont $x = \pm \sqrt{\epsilon}$. La bifurcation est supercritique et la forme de son diagramme a été dessinée en figure II.5 page 125. Nous allons faire deux développements successifs: le premier pour déterminer l'amplitude à saturation et le second pour déterminer le déplacement du seuil.

L'amplitude du bruit étant supposé fixée nous nous plaçons près du seuil avec bruit noté $\epsilon_c(\Delta)$ et développons

$$\begin{aligned} \epsilon - \epsilon_c(\Delta) &= \lambda \, \epsilon_1 + \lambda^2 \, \epsilon_2 + \dots \, , \\ x &= \lambda x_1 + \lambda^2 \, x_2 + \dots \, , \end{aligned} \tag{8}$$

λ est le petit paramètre de ce premier développement. Nous écrivons l'équation 7 aux trois premiers ordres en λ, soit

$$\mathcal{L}x_1 = m\,\ddot{x_1} + m\,d\,\dot{x_1} - (\epsilon_c(\Delta) + \Delta\,\zeta(t))\,x_1 = 0\,, \tag{9}$$
$$\mathcal{L}x_2 = \epsilon_1\,x_1\,, \tag{10}$$
$$\mathcal{L}x_3 = \epsilon_1\,x_2 + \epsilon_2\,x_1 - x_1^3\,. \tag{11}$$

En introduisant une forme bilinéaire, nous calculons les éléments y_1 du noyau de l'adjoint de $\mathcal{L}$ et, en utilisant la condition de solvabilité, il vient $\epsilon_1 = 0$ et $\epsilon_2 = \frac{\langle y_1|x_1^3\rangle}{\langle y_1|x_1\rangle}$. Nous en déduisons la solution saturée en présence de bruit

$$x(t) = \lambda\,x_1 = \sqrt{\epsilon - \epsilon_c(\Delta)}\sqrt{\frac{\langle y_1|x_1\rangle}{\langle y_1|x_1^3\rangle}}\,x_1\,. \tag{12}$$

Le premier développement est terminé, même si nous devons encore préciser la forme bilinéaire et calculer y_1 et x_1. C'est ce que nous allons faire en cherchant à résoudre l'équation $\mathcal{L}x_1 = 0$ perturbativement dans la limite de faible bruit. Nous introduisons le développement

$$\epsilon_c(\Delta) = \epsilon_c^{(0)} + \Delta\,\epsilon_c^{(1)} + \Delta^2\,\epsilon_c^{(2)} + ...\,, \tag{13}$$
$$x_1 = x_1^{(0)} + \Delta\,x_1^{(1)} + \Delta^2\,x_1^{(2)} + ... \tag{14}$$

Les équations aux trois premiers ordres en Δ s'écrivent

$$\mathcal{L}_0 x_1^{(0)} = m\,\ddot{x_1}^{(0)} + m\,d\dot{x_1}^{(0)} - \epsilon_c^{(0)}\,x_1^{(0)} = 0\,, \tag{15}$$
$$\mathcal{L}_0 x_1^{(1)} = \epsilon_c^{(1)}\,x_1^{(0)} + \zeta(t)\,x_1^{(0)}\,, \tag{16}$$
$$\mathcal{L}_0 x_1^{(2)} = \epsilon_c^{(1)}\,x_1^{(1)} + \epsilon_c^{(2)}\,x_1^{(0)} + \zeta(t)\,x_1^{(1)}\,, \tag{17}$$

Nous utilisons la forme bilinéaire que nous avons présentée au paragraphe précédent: $\langle F|G\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \langle f_\zeta(t)^*\,g_\zeta(t)\rangle_s\,dt$ où F et G sont deux processus stochastiques de réalisations f_ζ et g_ζ, $\langle.\rangle_s$ est la moyenne sur les réalisations du bruit et T tend vers l'infini. Dans la première équation nous retrouvons le problème non bruité pour lequel $\epsilon_c^{(0)} = 0$. Les solutions sont $x_1^{(0)} = A + B\,e^{(-d\,t)}$ où A et B sont des constantes. Le terme en $e^{(-d\,t)}$ s'amortit sur un temps d^{-1}: sa contribution aux produits scalaires est négligeable et nous n'en tenons plus compte. Pour calculer l'adjoint de $\mathcal{L}_0$ nous nous plaçons dans l'espace des fonctions telles que $\frac{1}{T}\int^T \langle|f_\zeta|^2\rangle_s\,dt$ existe quand T tend vers l'infini. L'adjoint se calcule aisément et vaut $\mathcal{L}_0^\dagger\,g = m\,\ddot{g} - m\,d\,\dot{g}$. En nous restreignant à l'espace précédent, nous n'avons pas à tenir compte des solutions en $e^{(d\,t)}$ de $\mathcal{L}_0^\dagger\,g = 0$. Les éléments du noyau de l'adjoint sont donc les fonctions constantes et nous utilisons $g = 1$ pour les calculs.

Calculons les premières corrections au seuil. En appliquant la conditions de solvabilité à l'équation 16 nous obtenons $\epsilon_1 = -\frac{\left\langle g|\zeta(t)\,x_1^{(0)}\right\rangle}{\left\langle g|x_1^{(0)}\right\rangle}$, or $\left\langle g|\zeta(t)\,x_1^{(0)}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \langle\zeta(t)\rangle_s\,dt = 0$ car

ζ est un bruit de moyenne nulle. La première correction au seuil est donc nulle. A l'ordre suivant nous obtenons

$$\epsilon_c^{(2)} = -\frac{\left\langle g|\zeta(t)\, x_1^{(1)}\right\rangle}{\left\langle g|x_1^{(0)}\right\rangle}\,, \tag{18}$$

où $x_1^{(1)}$ est solution de $\mathcal{L}_0 x_1^{(1)} = \zeta(t)\, x_1^{(0)}$. En choisissant $x_1^{(0)} = 1$, la solution s'écrit $x_1^{(1)} = \frac{1}{m}\int_{t'=0}^{t} e^{-d\,t'}\int_{u=0}^{t'} e^{d\,u}\zeta(u)\,du\,dt'$ et la seconde correction au seuil vaut

$$\epsilon_c^{(2)} = -\frac{1}{T\,m}\int_{t=0}^{T}\left\langle \zeta(t)\int_{t'=0}^{t} e^{-d\,t'}\int_{u=0}^{t'} e^{d\,u}\zeta(u)\,du\,dt'\right\rangle_s dt\,. \tag{19}$$

Nous allons exprimer cette relation à l'aide de la densité spectrale de ζ. ζ étant un bruit stationnaire, sa fonction de corrélation s'écrit $\langle\zeta(t)\zeta(u)\rangle_s = K(|t-u|)$. Nous notons $D(\omega)$ sa transformée de Fourier $D(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)\, e^{i\,\omega\,\tau} d\tau$ qui est, d'après le théorème de Wiener-Khintchine, la densité spectrale de ζ et vérifie

$$\langle\zeta(\omega)\,\zeta(\omega')\rangle_s = 2\,\pi\, D(\omega)\,\delta(\omega-\omega')\,. \tag{20}$$

Notons que $D(\omega)$ est paire tout comme $K(\tau)$. Dans l'équation 19, nous remplaçons la fonction d'auto-corrélation du bruit par la transformée de Fourier de sa densité spectrale et effectuons successivement les intégrations sur u, t' et t pour obtenir

$$\epsilon_c^{(2)} = -\frac{1}{2\,\pi\,m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D(\omega)}{i\,\omega\,(d+\,i\,\omega)}\,d\omega\,, \tag{21}$$

que nous réécrivons en utilisant la parité de D comme

$$\epsilon_c^{(2)} = \frac{1}{m\,\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{D(\omega)}{d^2+\omega^2}\,d\omega\,. \tag{22}$$

Nous obtenons la première correction au seuil sous la forme de la convolution de la densité spectrale avec la fonction $(d^2+\omega^2)^{-1}$. Le seuil bruité est plus élevé que le seuil déterministe et la solution $x = 0$ est stabilisée. Dans la limite de fort amortissement $m \to 0$ avec $m\,d = 1$, la correction est nulle et, à cet ordre, le bruit n'a pas d'effet sur le seuil. Remarquons que la valeur du seuil s'obtient en étudiant l'opérateur $\mathcal{L}$ qui est obtenu par linéarisation du problème initial. C'est un résultat qui semble général et a été montré pour d'autres systèmes [45]: dans la limite de faible bruit les modifications de la valeur du seuil ne dépendent pas des non linéarités et sont déterminées par le problème linéaire.

En introduisant le développement de x_1 et de g dans l'équation 12, nous retrouvons le résultat de Lücke et al. concernant l'amplitude à saturation en fonction de l'écart au seuil [37]. A écart au seuil fixé, celle-ci est plus faible que dans le cas bruité. Une autre façon de l'exprimer est que le coefficient de proportionnalité entre le carré de l'amplitude et l'écart au seuil est une fonction décroissante de l'amplitude du bruit.

Pour résumer, l'effet d'un bruit faible sur une bifurcation stationnaire est double: le seuil d'instabilité est augmenté et l'amplitude à saturation est diminuée.

Remarquons qu'il est possible de retrouver la valeur du déplacement du seuil à l'aide d'un calcul *à la Kapitza* [71]. Il s'agit de calculer de façon indépendante l'effet de chaque composante de Fourier du bruit et de déterminer le déplacement du seuil créé par chaque composante par effet de stabilisation paramétrique. Le déplacement du seuil dans le cas du bruit est obtenu en sommant les déplacements causés par ses diverses composantes de Fourier. C'est un résultat surprenant: la nature stochastique du bruit ne joue pas et le seuil est le même si, au lieu d'un bruit, nous utilisons un signal déterministe de même spectre. Dans l'esprit de cette remarque, nous présentons tout d'abord l'étude de l'effet d'un forçage paramétrique sinusoïdal déterministe sur une instabilité stationnaire. Le système expérimental est décrit dans la copie de l'article [36]. Nous présentons ensuite l'étude expérimentale de la même instabilité dont le paramètre de contrôle est forcé stochastiquement.

Résultats expérimentaux

L'amplitude a_k des ondes de surface de vecteur d'onde de norme k pour un ferrofluide plongé dans un champ magnétique vertical B est régi par l'équation

$$\ddot{a}_k = -\omega_0^2(B,k)\, a_k\,, \tag{23}$$

où $\omega_0^2(B,k) = g\,k - \frac{\chi^2}{\rho\,\mu_0\,(2+\chi)\,(1+\chi)} B^2\,k^2 + \frac{\gamma}{\rho}\,k^3$ est le carré de pulsation de l'onde, g la gravité, ρ la densité du liquide, γ sa tension de surface et χ sa susceptibilité magnétique qui est une fonction du champ B. Aux fréquences considérées dans l'article, la dissipation visqueuse est négligeable.

Une instabilité a lieu quand la pulsation s'annule. Des ondulations statiques apparaissent à la surface du ferrofluide: c'est l'instabilité de Rosensweig.

Il s'agit d'une bifurcation stationnaire dont le paramètre de contrôle est $-\omega_0^2(B,k)$. Si nous faisons vibrer la couche de liquide verticalement, nous modulons la gravité et la pulsation s'écrit $\omega_0^2(B,k) + A\,k\,\cos(\omega t)$ où nous avons supposé que l'accélération de la cellule est $A\,\cos(\omega\,t)$. Ce dernier terme joue le rôle d'un forçage paramétrique multiplicatif de l'amplitude a_k.

En supposant que c'est le mode qui a le plus fort taux de croissance, donc la pulsation $\omega_0^2(B,k)$ la plus négative, qui détermine l'état de la surface, le calcul précédent permet de prédire le déplacement du seuil de l'instabilité de Rosensweig causé par ce forçage. Celui-ci doit être plus élevé que lorsque la couche n'est pas vibrée. Ainsi à champ magnétique fixé supérieur au seuil d'instabilité de Rosensweig sans vibration, si nous vibrons la couche avec une accélération suffisante, la surface redevient plane: c'est la stabilisation paramétrique. Nous présentons un article résumant l'étude expérimentale de ce phénomène ainsi qu'une étude théorique. Celle-ci diffère du calcul perturbatif précédent mais donne le même résultat pour le déplacement du seuil d'instabilité. Elle prédit le champ magnétique au seuil B_c en fonction de l'amplitude de vibration A. L'accord entre l'expérience et la théorie est bon. Dans cette étude nous nous sommes limités à des

fréquences telles que les effets visqueux n'entrent pas en jeu et qu'il n'y ait pas à tenir compte de la dissipation dans l'équation 23.

Copie de l'article présentant l'étude de l'effet d'un forçage paramétrique sur l'instabilité de Rosensweig

Avec Sébastien Aumaître, nous avons modifié cette expérience afin de pouvoir vibrer la cellule avec une accélération aléatoire $\zeta(t)$. Un générateur de fonctions HP 8904 A produit un bruit de spectre plat jusqu'à une fréquence au moins égale à 51.2 kHz. Le signal est filtré par un filtre passe-bande SR 650. Nous obtenons alors un bruit coloré de largeur spectrale contrôlée qui est amplifié par un amplificateur de puissance BK 2706 lequel alimente un vibreur. Le spectre de l'accélération du vibreur dépend à la fois de la tension appliquée et de sa propre réponse en fréquence. Nous mesurons donc l'accélération à l'aide d'un accéléromètre BK fixé à la cuve. Le signal est analysé par un analyseur de spectre HP 2706. Pour chaque mesure nous enregistrons le courant I circulant dans les bobines et le spectre donné par l'analyseur. La valeur du champ magnétique a été initialement calibrée et se déduit de la valeur du courant I.

L'équation qui régit l'évolution d'une onde d'amplitude a_k et de vecteur d'onde k à la surface du ferrofluide est, en tenant compte de la dissipation,

$$\ddot{a}_k + d_k \dot{a}_k = (-\omega_0^2(B,k) - \zeta(t)k)\, a_k \,. \tag{24}$$

d_k est la dissipation effective subie par une onde de surface de vecteur d'onde k. Dans la limite d'une couche profonde et pour un liquide de faible viscosité cinématique ν, $d_k \simeq 4\nu k^2$ [72].

Pour un mode de vecteur d'onde k fixé, il s'agit d'une bifurcation stationnaire dont le paramètre de contrôle est bruité. Le calcul présenté au paragraphe précédent est donc adapté à l'étude de ce système et prédit l'augmentation du seuil d'instabilité de chaque mode si nous vibrons aléatoirement la couche. C'est ce que nous mesurons expérimentalement: plus le bruit est fort plus il faut imposer un champ magnétique élevé pour voir apparaître l'instabilité de Rosensweig.

Nous comparons quantitativement cet effet avec la prédiction théorique. A champ magnétique fixé, l'écart au seuil vaut $-\omega_0^2(B,k)$ et un mode k est stabilisé si l'amplitude du bruit vérifie

$$S = \int_0^\infty \frac{D(\omega)}{d_k^2 + \omega^2}\, d\omega \geq -\pi \frac{\omega_0^2(B,k)}{k^2} \,. \tag{25}$$

En supposant que la surface plane est stabilisée si tous les modes sont stabilisés, la courbe théorique prédisant le seuil de restabilisation de l'instabilité de Rosensweig en fonction du bruit est donnée par $S_t = -\pi \frac{\omega_0^2(B,k_{min})}{k_{min}^2}$. Le vecteur d'onde k_{min} correspond au minimum de $\omega_0^2(B,k)/k^2$. k_{min} et $\omega_0^2(B,k_{min})$ sont donc des fonctions de B qui donnent la valeur théorique du seuil S_t avec vibration aléatoire en fonction de B.

S est une fonction de $D(\omega)$ la densité spectrale du bruit $\zeta(t)$. L'analyseur ne donne pas $D(\omega) = \int K(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau$ mais $\mathcal{D}(f) = \int K(\tau)\, e^{2i\pi f\tau}\, d\tau$. Nous vérifions facilement que $D(\omega) = \mathcal{D}(f = \omega/2/\pi)$ ce qui est particulier à la façon dont nous avons défini les densités spectrales. Nous en déduisons que

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{D(f)}{f_0^2 + f^2}\, df \,, \tag{26}$$

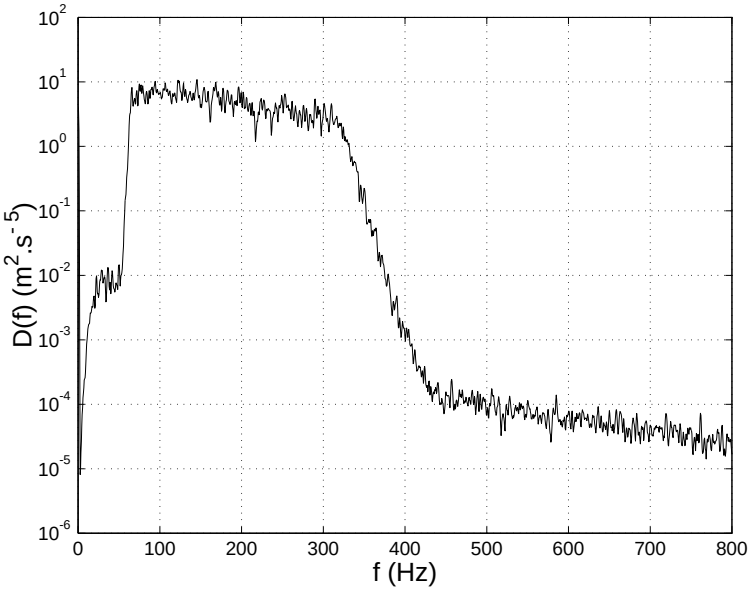

FIG. 5 – *Densité spectrale de l'accélération de la cuve. Le vibreur est alimenté par un bruit de spectre plat entre* 70 *et* 300 *Hz.*

où $f_0 = 2\nu k^2/\pi$. Un spectre typique de l'accélération de la cuve est représenté en figure 5. Le spectre est assez plat entre les fréquences de coupure du filtre. Notons que la valeur de k intervient aussi dans f_0 et donc dans le calcul de S déduit des mesures. Néanmoins, la valeur de k_{min} est, pour les champs considérés, toujours aux alentours de $600\,m^{-1}$. Nous avons utilisé cette valeur pour traiter les mesures expérimentales.

Plusieurs paramètres du ferrofluide entrent en jeu dans la définition de ω_0^2 et le calcul de S_t. Ils sont donnés par le constructeur. Des mesures indépendantes nous ont donné $\rho = 1.22\ 10^3\,kg.m^{-3}$ et $\gamma = 42\ 10^{-3}\,Nm^{-1}$ notablement différents de ceux annoncés par le constructeur ($\rho = 1.26\ 10^3\,kg.m^{-3}$ et $\gamma = 35\ 10^{-3}\,Nm^{-1}$). Dans la figure 6, nous traçons la courbe théorique S_t donnant le domaine de stabilité pour l'instabilité de Rosensweig en fonction du champ magnétique. Nous y ajoutons les mesures expérimentales réalisées pour des bruits de différentes largeurs spectrales.

Le seuil sans vibration correspond à $B_c = 158 \pm 1\,G$. Il est différent de celui présenté dans l'article mesuré pour un autre échantillon de ferrofluide de la même marque mais plus ancien et aux propriétés physiques légèrement différentes (notamment la tension de surface). Plus la vibration aléatoire est importante (S élevé), plus le seuil de l'instabilité de Rosensweig est élevé: nous appelons cet effet la stabilisation paramétrique stochastique. L'accord entre les mesures expérimentales et le calcul théorique est bon. Il est donc possible de décrire qualitativement ce phénomène en supposant que c'est le mode le plus instable qui régit la dynamique de la surface et en utilisant la prédiction de Lücke et al. concernant le déplacement du seuil d'une instabilité stationnaire.

A champ magnétique plus élevé, les phénomènes sont différents. Si le bruit est faible,

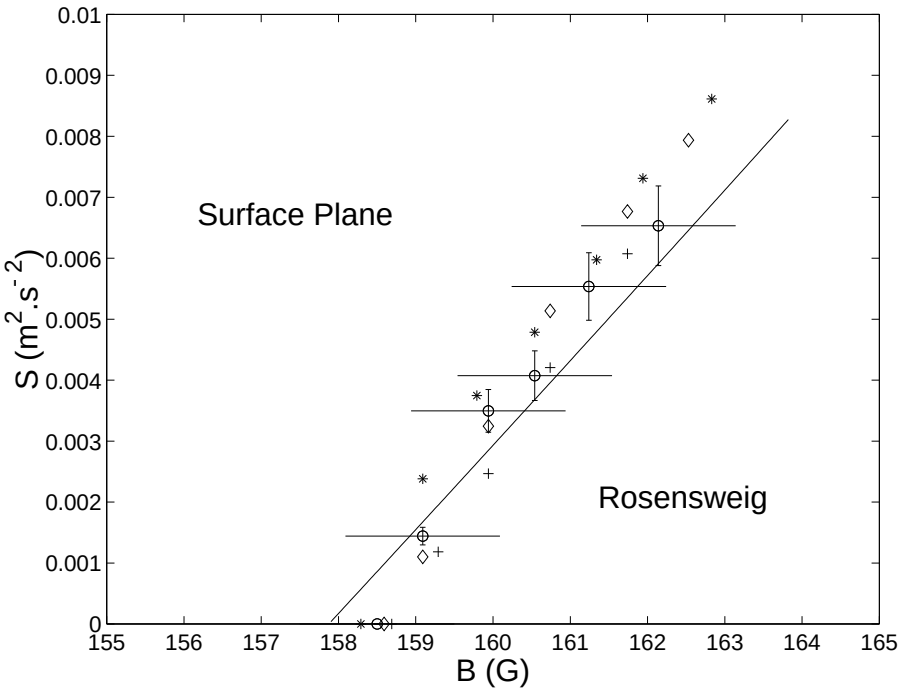

FIG. 6 – *Diagramme de stabilité pour l'instabilité de Rosensweig vibrée aléatoirement dans le plan champ magnétique B-amplitude de la vibration S. S est défini par l'équation 25. Le trait continu est la prédiction théorique. La largeur spectrale du bruit correspond à* $(*)$ $10-100$ *Hz,* (o) $70-100$ *Hz,* $(\diamond)$ $40-300$ *Hz,* $(+)$ $70-300$ *Hz. Sous la courbe et les points de mesure, l'instabilité de Rosensweig est présente; au dessus, la surface est plane.*

nous retrouvons l'instabilité de Rosensweig. Si nous augmentons l'amplitude du bruit, nous traversons un nouveau domaine où la surface évolue au cours du temps aléatoirement entre être plane et présenter des pics similaires à ceux développés par l'instabilité de Rosensweig. Plus le bruit est fort, plus les temps passés dans l'état de surface plane sont longs. Des mesures complémentaires sont en cours pour caractériser les distributions de probabilité de ces temps. Nous nommons cet état intermittent en ce sens que l'état de la surface bascule aléatoirement entre deux états. Si le bruit est très fort, la surface plane est stabilisée à nouveau.

Effet d'un bruit de phase sur un oscillateur forcé paramétriquement

Nous étudions un oscillateur forcé paramétriquement par un terme oscillant dont la phase contient un terme bruité. L'équation régissant l'évolution de l'amplitude de l'oscillateur est

$$\ddot{x} + \nu\,\dot{x} + \omega_0^2\,(1 + h\,\cos(\Omega\,t + \zeta(t)))\,(x - x^3) = 0\,. \tag{27}$$

Là encore les systèmes décrits par cette équation sont très nombreux. Citons par exemple les ondes à la surface d'une couche de liquide vibrée avec un terme de phase aléatoire. Nous allons nous placer près de la condition $\Omega = 2\,\omega_0$. Dans le cas non bruité, la solution $x = 0$ est instable pour une certaine valeur de h qui dépend de la dissipation ν et de l'écart à la résonance δ défini par $\Omega = 2\,\omega_0 + \delta$. Si δ est positif la bifurcation est supercritique et elle est sous-critique si δ est négatif. Nous allons retrouver les mêmes résultats dans le cas bruité en faisant apparaître une amplitude de forçage modifiée h_b qui tient compte du bruit. Le diagramme de bifurcation du cas bruité se déduit du cas non bruité en changeant h en h_b.

Développement perturbatif

Nous nous plaçons près de la résonance pour un système peu visqueux et notons

$$\begin{aligned} \delta &= \epsilon\,\Delta\,, \\ \nu &= \epsilon\,\Gamma\,, \\ h &= \epsilon\,H\,, \end{aligned}$$

ϵ est le petit paramètre du développement et Γ et H sont d'ordre 1. La croissance du mode instable se fait sur un temps caractéristique qui diverge quand ϵ tend vers zéro et nous introduisons le temps de croissance lent $T = \epsilon\,t$. Nous développons l'amplitude suivant $x = \sqrt{\epsilon}\,(x_0 + \epsilon x_1 + ...)$. L'équation 27 donne au premier ordre en ϵ

$$\mathcal{L}\,x_0 = \ddot{x}_0 + \omega_0^2\,x_0 = 0\,, \tag{29}$$

dont la solution est $x_0 = A(T)\, e^{i\,\omega_0\, t} + cc$, où cc est le complexe conjugué du terme précédent. A l'ordre suivant en ϵ, nous obtenons

$$\mathcal{L}\, x_1 = \Big(- \frac{dA}{dT}\, i\, \omega_0 - \Gamma\, i\, \omega_0\, A + \omega_0^2 \big(- H\, \cos\left(\Omega\, t + \zeta(t)\right) A + 3\, |A|^2\, A + A^3\, e^{2\, i\omega_0\, t} + 3\, |A|^2\, A^* e^{-2\, i\omega_0\, t} + A^{*3}\, e^{-4\, i\, \omega_0\, t} \big) \Big)\, e^{i\omega_0\, t} + cc\,. \tag{30}$$

Dans le cas non bruité, nous introduisons le produit scalaire $\langle f|g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f^*(t)\, g(t)\, dt$ pour lequel $\mathcal{L}$ est auto-adjoint. La condition de solvabilité revient alors à annuler les termes résonant, c'est-à-dire dont la dépendance temporelle est en $e^{i\,\omega_0\, t}$. Il faut faire attention aux termes de la partie cc qui contiennent le terme résonant $\cos\left(\Omega\, t\right) A^*\, e^{-i\,\omega_0\, t} = \frac{1}{2}\, A^*\, e^{i\,\Delta\, T}\, e^{i\,\omega_0\, t}$ + termes non résonant. Les autres termes apparaissent de façon triviale dans l'équation 30.

Dans le cas bruité, nous utilisons la forme bilinéaire $\langle F|G\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \left\langle f_\zeta^*(t)\, g_\zeta(t)\right\rangle_s dt$ où F et G sont deux processus stochastiques de réalisations f_ζ et g_ζ et la moyenne $\left\langle . \right\rangle_s$ est faite sur les réalisations du bruit. Là encore, $\mathcal{L}$ est auto-adjoint. La condition de solvabilité permet de déterminer la nouvelle équation d'amplitude. Le calcul est très similaire au cas non bruité. Nous nous plaçons dans la limite de faible bruit, ce que nous n'avions pas précisé jusqu'à maintenant. En conséquence, nous supposons que A est déterministe, c'est-à-dire ne dépend pas de la réalisation du bruit et nous notons $\langle A\rangle_s = A$. Ainsi le terme non linéaire s'écrit simplement $\langle |A|^2\, A\rangle_s = |A|^2\, A$. La seule différence vient du terme résonant proportionnel à A^* et s'écrit $\frac{1}{2\,T}\int_0^T e^{-i\,\omega_0\, t} \left\langle A^* e^{i\,(\Delta\, T + \omega_0\, t + \zeta(t))}\right\rangle_s dt$. La moyenne statistique ne porte en fait que sur le terme $e^{i\,\zeta(t)}$. La nouvelle équation d'amplitude s'écrit donc

$$\frac{dA}{dT} = -\Gamma\, A + \frac{i\,\omega_0 H \left\langle e^{i\,\zeta(t)}\right\rangle_s}{2}\, A^*\, e^{i\,\Delta T} - 3\, i\, \omega_0\, |A|^2\, A\,. \tag{31}$$

Si nous notons $h_b = h\, \left\langle e^{i\,\zeta(t)}\right\rangle_s$, l'équation d'amplitude pour le système bruité se déduit de celle non bruitée en remplaçant h par h_b. Si nous traçons le diagramme de bifurcation dans le plan (δ, h_b) ou étudions l'amplitude à saturation en fonction de h_b, nous retrouvons les mêmes résultats quelle que soit la forme du bruit!

De façon très générale, si le bruit est gaussien, nous avons la relation $\left\langle e^{i\zeta(t)}\right\rangle_s = e^{-\left\langle \zeta^2(t)\right\rangle_s/2}$ [40]. Le paramètre de contrôle effectif prend alors la forme plus simple $h_b = h\, e^{-\left\langle \zeta^2(t)\right\rangle_s/2}$ et se calcule facilement à partir du moment d'ordre 2 du bruit.

Déterminons le diagramme de stabilité associé à cette équation d'amplitude et représenté en figure 7. Le calcul est classique et ne présente pas de difficultés. Nous posons $A = B\, e^{(-\Gamma + i\,\Delta/2)\, T}$. L'équation pour B s'écrit

$$\frac{dB}{dT} = -i\frac{\Delta}{2}\, B + i\, \frac{\omega_0\, H_b}{2}\, B^* - 3\, i\, \omega_0\, |A|^2\, B\,. \tag{32}$$

Nous décomposons B en partie réelle et partie imaginaire suivant $B = X + i\, Y$. X et Y

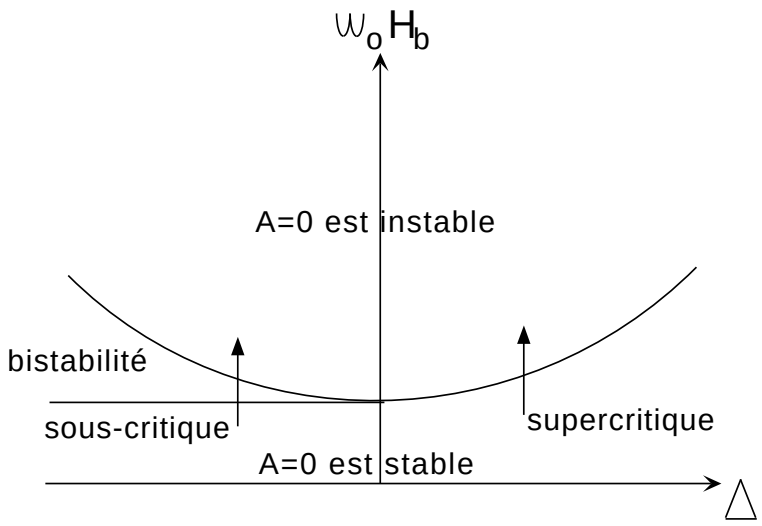

FIG. 7 – *Diagramme de bifurcation de l'oscillateur paramètrique avec un bruit de phase dans la limite de faible viscosité et proche de la première fréquence de résonance dans le plan écart à la résonance Δ-amplitude du forçage bruité H_b.*

vérifient

$$\frac{d}{dT}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega_0 H_b}{2} + \frac{\Delta}{2} + 3\,\omega_0\,|A|^2 \\ \frac{\omega_0 H_b}{2} - \frac{\Delta}{2} - 3\,\omega_0\,|A|^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} . \tag{33}$$

La stabilité linéaire s'étudie en cherchant les valeurs propres de M dans la limite $A = 0$. Celles-ci valent $\pm\sqrt{(\frac{\omega_0 H_b}{2})^2 - (\frac{\Delta}{2})^2}$ et la solution $A = 0$ est linéairement stable si une des valeurs propres est plus grande que Γ soit

$$(\omega_0\,H_b)^2 \geq \Delta^2 + 4\,\Gamma^2 . \tag{34}$$

Dans le cas non-linéaire, le critère d'instabilité se calcule de la même manière sans prendre $|A| = 0$ et correspond à

$$(\omega_0\,H_b)^2 \geq (\Delta + 6\,\omega_0\,|A|^2)^2 + 4\,\Gamma^2 . \tag{35}$$

Si Δ est strictement positif, $\Delta + 6\,\omega_0\,|A|^2 \geq \Delta$. Le critère tenant compte des non linéarité est plus stricte que sans non-linéarité. La bifurcation est alors supercritique et, près du seuil défini par $\omega_0\,h_{bc} = \sqrt{\Delta^2 + 4\,\Gamma^2}$, l'amplitude à saturation vaut

$$|A|^2 = \frac{1}{6}\sqrt{1 + 4(\frac{\Gamma}{\Delta})^2}\,(h_b - h_{bc}) . \tag{36}$$

Si Δ est strictement négatif, une perturbation d'amplitude finie peut croître dès que $(\omega_0 H_b)^2 \geq 4\,\Gamma^2$. L'instabilité est sous-critique.

Le cas $\Delta = 0$ correspond à une instabilité tricritique.

De récentes simulations numériques semblent en bon accord avec ces prédictions sur l'effet du bruit sur le seuil d'instabilité et sur la saturation non-linéaire.

Conclusions et Perspectives

Dans la première partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés au seuil d'instabilité de la dynamo laminaire dite de Ponomarenko. Nous avons introduit un formalisme d'opérateurs dont certaines propriétés sont reliées au seuil de l'effet dynamo. L'étude de ces opérateurs permet de comprendre les mécanismes d'instabilité et d'évaluer la dépendance du seuil en fonction des paramètres de l'écoulement. Ce formalisme peut être appliqué à d'autres exemples de dynamos.

De récents résultats expérimentaux ont montré que le seuil d'instabilité des dynamos actuellement réalisées en laboratoire est très peu sensible à la partie turbulente du champ de vitesse. Nous montrons de façon générale que le déplacement du seuil induit par la turbulence est au moins quadratique en l'amplitude des fluctuations. Sur un cas particulier similaire à l'expérience de Karlsruhe, nous calculons explicitement le déplacement du seuil au premier ordre non nul. Il dépend de l'hélicité de la turbulence et est très faible si celle-ci est peu importante. Nous vérifions ainsi que le seuil d'une telle dynamo (dont l'écoulement est très contraint donc pas complétement turbulent) est effectivement peu sensible à la turbulence. Cet effet pourrait être calculé sur d'autres exemples d'écoulements, éventuellement au prix d'une résolution numérique. De façon plus générale, l'influence de la turbulence sur le seuil d'une instabilité peut être évaluée de cette manière. Un exemple possible est d'étudier l'effet de la turbulence sur la formation des rides granulaires à la surface d'une couche de sable située sous un liquide en mouvement.

Pour comprendre les mécanismes de saturation du champ magnétique, nous avons calculé perturbativement la modification du champ de vitesse induite par la force de Laplace dans le cas d'une dynamo de Ponomarenko dont le cylindre en mouvement est un fluide conducteur. Le mécanisme de saturation est un freinage du fluide qui diminue l'induction. En déterminant une équation pour l'amplitude du mode instable, nous avons prouvé que cette instabilité est supercritique. Il serait intéressant de voir si cela est le cas pour toutes les instabilités dynamos engendrées par un écoulement laminaire ou s'il est possible d'avoir une dynamo laminaire sous-critique. Le champ magnétique à saturation prédit est alors très faible comparé à ceux mesurés dans les expériences. Alors que la nature turbulente du champ de vitesse joue peu sur le seuil des dynamos expérimentales, nous avons montré qu'il faut absolument en tenir compte pour calculer l'amplitude du champ magnétique à saturation. En effet, tous les calculs existants faisaient intervenir le terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes et, comme pour notre calcul sur la dynamo de Ponomarenko, donnaient des champs magnétiques très faibles. Par analyse dimensionnelle, nous prédisons diverses lois d'échelle pour l'énergie magnétique. Expérimentalement il

serait possible de vérifier qu'entre en jeu la loi dite turbulente, par exemple en variant la température du sodium liquide donc sa conductivité. Il serait aussi intéressant de vérifier les lois d'échelle prédites pour des corps en rotation rapide.

En étudiant un écoulement tourbillonnaire de sodium liquide, nous avons mis en evidence plusieurs effets d'amplification d'un champ appliqué. Ces effets sont la trace d'un mécanisme d'instabilité et nous espérons que la conception d'une expérience plus grande et de légères modifications de l'écoulement permettront de franchir le seuil d'instabilité.

Enfin, nous avons mis au point un formalisme qui permet de calculer perturbativement l'effet du bruit sur une instabilité. Nous l'avons appliqué à quelques exemples: l'instabilité dynamo, une instabilité stationnaire dont le paramètre de contrôle est bruité et un oscillateur paramétrique avec un bruit de phase. Il semble que les résultats prédits soient en bon accord avec les diverses mesures expérimentales. Cette technique pourrait être appliquée à d'autres situations, par exemple pour étudier l'effet d'un bruit sur le paramètre de contrôle d'une bifurcation de Hopf ou pour évaluer l'effet d'un désordre spatial sur une instabilité bidimensionnelle à la surface d'un liquide (modification aléatoire de la profondeur, de la tension de surface pour une instabilité de Faraday, fluctuation du champ magnétique pour l'instabilité de Rosensweig). Il doit être aussi possible de généraliser cette approche au domaine des transitions de phase. Par exemple, nous pourrions étudier dans le cadre du modèle d'Ising l'effet d'un désordre spatial des moments magnétiques sur la température critique d'une transition ferromagnétique-paramagnétique.

Bibliographie

[1] Y. Rocard, *Electricité*, Masson et Cie, Paris, 1956.

[2] Sir J. Larmor, *How could a Rotating Body such as the Sun become a Magnet?*, Rep. 87th Meeting Brit. Assoc. Adv. Sci. Bournemgouth, John Murray London, pp 159-160, 1919.

[3] C. Carrigan et D. Gubbins, *L'origine du champ magnétique terrestre*, Pour la science, pp 82-93, avril 1979.

[4] Ya.B. Zeldovich, A.A. Ruzmaikin et D.D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*, The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics, **3**, Gordon and Breach Science Publishers, 1983.

[5] P.H. Roberts et G.A. Glatzmaier, *Geodynamo theory and simulations*, Rev. of Modern Physics, **72**, p 1082, 2000.

[6] Y. Guyodot et J.P. Valet, *Global changes in geomagnetic intensity during the past 800 thousand years*, Nature, **399**, pp 249-252, 1999.

[7] J.P. Valet, *La Terre perd-elle son magnétisme?*, La Recherche, **351**, pp 36-39, 2002.

[8] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer et B. Roulet, *Physique Statistique*, Hermann, 1997.

[9] L. Landau et E. Lipshitz, *Electrodynamics of Continuous Media, Course of Theoretical Physics Tome 8* , Pergamon Press, 1960.

[10] E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, Editions du CNRS 1994.

[11] D.J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 1990.

[12] P.H. Roberts, *Fundamentals of Dynamo Theory*, Lectures on solar and planetary dynamos, chap. 1, pp 1-57, Editeurs M.R.E. Proctor et A.D. Gilbert, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[13] G.O. Roberts, *Spatially periodic dynamos*, Philos. Trans. R. Soc. Lond., **A266**, pp 535-558, 1970.

[14] G.O. Roberts, *Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity*, Philos. Trans. R. Soc. Lond., **A271**, pp 441-454, 1972.

[15] A.M. Soward, *A unified approach to a class of slow dynamos*, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, **53**, pp 81-107, 1989.

[16] F. Krause et K.H. Rädler, *Mean Field magnetohydrodynamics and dynamo theory*, Pergamon Press, New-York, 1980.

[17] H. K. Moffatt, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Cambridge University Press, Cambridge 1978.

[18] E. Lanotte et al., *Large-scale dynamo produced by negative magnetic eddy diffusivities*, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, **91**, pp 131-146, 1999.

[19] S.I. Braginskii, Sov. Phys. JETP, **20**, p 726, 1964.

[20] F.J. Lowes et I. Wilkinson, *Geomagnetic Dynamo: a laboratory model*, Nature, **198**, p 1158, 1963.

[21] F.J. Lowes et I. Wilkinson, *Geomagnetic Dynamo: an improved laboratory model*, Nature, **219**,p 717, 1968.

[22] I. Wilkinson, *The contribution of laboratory dynamo experiments to our understanding of the mechanism of generation of planetary magnetic fields*, Geophysical Surveys, **7**, pp 107-122, 1984.

[23] Yu.B. Ponomarenko, *Theory of the hydromagnetic generator*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **14**, p 775, 1973.

[24] M.L. Dudley et R.W. James, *Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows*, Proc. R. Soc. Lond. A, **425**, pp 407-429, 1989.

[25] L.P. Kadanoff, *Turbulent Heat Flow: Structures and Scaling*, Physics Today, pp 34-39, Aout 2001.

[26] D. Lortz, *Exact solutions of the hydromagnetic dynamo problem*, Plasma Phys., **10**, p 967, 1968.

[27] K.-H. Rädler, *Mean-field magnetohydrodynamics as a basis of solar dynamo theory*, Compte-rendus de la conférence Basic Mechanisms of Solar Activity, pp 323-344, Editeurs Bumba et Kleczek, 1976.

[28] K.-H. Rädler, *Investigations of spherical kinematic mean-field dynamo models*, Astrom. Nachr., **307**, 2, pp 89-113, 1986.

[29] A. Ruzmaikin, D. Sokoloff et A. Shukurov, *Hydromagnetic screw dynamo*, J. Fluid Mech., **197**, pp 39-56, 1988.

[30] A. Gilbert, *Fast dynamo action in the Ponomarenko dynamo*, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, **44**, pp 241-258, 1988.

[31] A.P. Bassom et A.D. Gilbert, *Nonlinear equilibration of a dynamo in a smooth helical flow*, J. Fluid Mech., **343**, p 375, 1997.

[32] G.B. Arfken et H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicist*, Quatrième Edition, Academic Press, 1995.

[33] P.H. Roberts, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **1**, pp 195-214, 1960.

[34] H. K. Moffatt, *Fluid Dynamics Dynamo Theory*, Cours de l'Ecole des Houches, Les Houches, 1973.

[35] J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 2*, Dunod, Paris, 1998.

[36] F. Pétrélis, E. Falcon et S. Fauve, *Parametric stabilization of the Rosensweig instability*, Eur. Phys. J. B, **15**, pp 3-6, 2000.

[37] M. Lücke et F. Schank, *Response to Parametric Modulation near an Instability*, Phys. Rev. Letters, **54**, pp 1465-1468, 1985.

[38] L. Fronzoni, R. Mannella et al., *Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise*, Phys. Rev. A, **36**, 2, pp 834-843, 1987.

[39] U. Behn, A. Lange et T. John, *Electrohydrodynamic convection in liquid cristal driven by multiplicative noise*, Phys. Rev. E, **58**, 2, pp 2047-2060, 1998.

[40] M. San Miguel et R. Toral, *Stochastic effects in physical systems*, Instabilities and Non equilibrium Structures VI, Editeurs E. Tirapegui, J Martinez et R. Tiemann, Kluwer Academic Publisher, 2000.

[41] S. Residori, R. Berthet, B. Roman et S. Fauve, *Noise Induced Bistability of Parametric Surface Waves*, Phys. Rev. Letters, **88**, 2, 024502, 2002.

[42] T. John, R. Stannarius et U. Behn, *On-Off Intermittency in Stochastically Driven Electrohydrodynamic Convection in Nematics*, Phys. Rev. Letters, **83**, 4, pp 749-752, 1999.

[43] M. Gofman et al., *Critical behavior of the random-field Ising model*, Phys. Rev. B, **53**, 10, pp 6362-6380, 1996.

[44] D. Sweet, E. Ott et al., *Blow-out bifurcations and the onset of magnetic activity in turbulent dynamos*, Phys. Rev. E, **63**, 066211, 2001.

[45] A. Becker et L. Kramer, *Linear stability analysis for bifurcations in spatially extended systems with fluctuating control parameter*, Physica D, **90**, pp 408-430, 1996.

[46] K.H. Rädler, E. Apstein, M. Rheinardt et M. Schüler, Studia Geophys. geod., **42**, p 224, 1998.

[47] Barrenblatt, *Scaling, Self-similarity and intermediate asymptotics*, Cambridge University Press, 1996.

[48] L. Landau et E. Lipshitz *Mécanique des Fluides, Physique Théorique Tome 6* , Editions Mir, Moscou, 1971.

[49] A. Ruzmaikin, D. Sokoloff et A. Shukurov, *Hydromagnetic screw dynamo*, J. Fluid Mech., **197**, p 39, 1988.

[50] Louis Marié, *Optimisation d'une expérience de dynamo fluide*, mémoire de DEA, 2000.

[51] R. Stieglietz et U. Müller, *Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo*, Phys. Fluids, **13**, p 561, 2001.

[52] Gailitis et al., *Detection of a Flow Induced Magnetic Field Eigenmode in the Riga Dynamo Facility*, Phys. Rev. Letters, **84**, pp 4365-4368, 2000.

[53] Gailitis et al., *Magnetic Field Saturation in the Riga Dynamo Experiment*, Phys. Rev. Letters, **86**, pp 3024-3027, 2001.

[54] F. Pétrélis et S. Fauve, *Saturation of the magnetic field above the dynamo threshold*, Eur. Phys. J. B, **22**, pp 273-276, 2001.

[55] H.K. Moffatt, *A Self-Consistent Treatment of Simple Dynamo Systems*, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics **14**, pp 147-166, 1979.

[56] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Dover Publications, New York, 1981.

[57] P.G. Drazin et W.H. Reid, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[58] P.J. Zadbergen, D. Dijkstra, Ann. Rev. Fluid Mech., **19**, p 465, 1987.

[59] P. Odier, J.-F. Pinton and S. Fauve, Eur. Phys. J. B, **16**, 373, 2000.

[60] J. Burguete, L. Marié, F. Daviaud et J. Léorat, *Homogeneous dynamo: numerical analysis of experimental von Kármán type flows*, soumis à Eur. Phys. J. B., 2002.

[61] L. Marié et al., *Bifurcation globale de l'écoulement de von Kármán*, compte-rendus des Rencontres du Non Linéaire, Non Linéaire Editions, 2002.

[62] *Cours de l'Ecole du Sodium*, Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache, Commisariat à l'Energie Atomique.

[63] R. Labbé, J.F. Pinton et S. Fauve, *Study of the von Kármán flow between coaxial corotating disks*, Phys. Fluids, **8**, (4), 1996.

[64] R. Kaiser et A. Tilgner, *Kinematic dynamos surronded by a stationary conductor*, Phys. Rev. E, **60**, p 2949, 1999.

[65] G.R. Sarson et D. Gubbins, *Three-dimensional kinematic dynamos dominated by strong differential rotation*, J. Fluid Mech., **306**, pp 223-265, 1996.

[66] J. Léorat, *Numerical Simulations of Cylindrical Dynamos: Scope and Method*, Proc. Pamir Conference, Aussois (France), 1998.

[67] N.O. Weiss, *The expulsion of magnetic flux by eddies*, Proc. R. Soc. Lond. A, **293**, pp 310-328, 1966.

[68] R.L. Parker, *Reconnexion of lines of force in rotating spheres and cylinders*, Proc. R. Soc. Lond. A, **291**, pp 60-72, 1966.

[69] K. Moffatt, *The amplification of a weak applied magnetic field by turbulence in fluids of moderate conductivity*, J. Fluid Mech., **11**, p 625, 1961.

[70] S. G. Mikhlin, *Mathematical Physics: an advanced course*, North-Holland Publishing Company, 1968.

[71] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique, Physique Théorique Tome 1*, Edition Mir, Moscou, 1988.

[72] J. Milner, J. Fluid Mech., **225**, p 81, 1991.