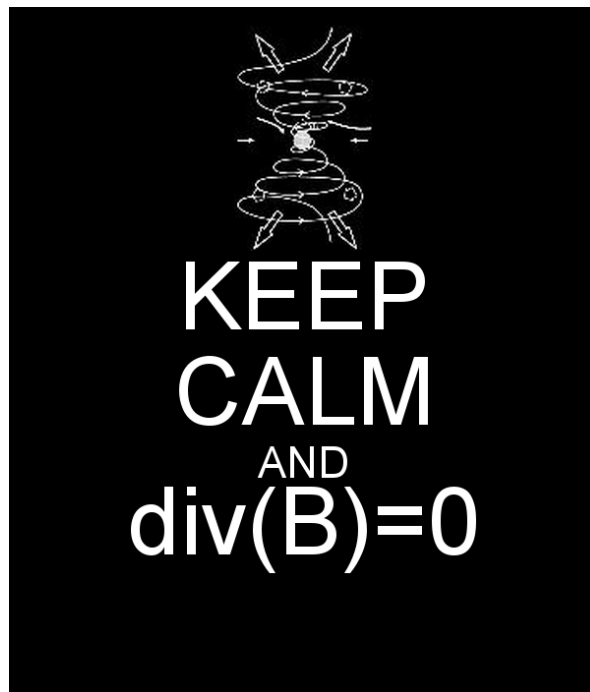


# Introduction à la Magnétohydrodynamique



Jean Boisson

2020

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Contexte et applications</b>	<b>4</b>
1.1	Manifestations de la magnétohydrodynamique . . . . .	5
1.1.1	Naturelles . . . . .	5
1.1.2	Dans l'industrie . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Rappel d'électromagnétisme</b>	<b>9</b>
2.1	Généralités . . . . .	9
2.1.1	Le champ magnétique . . . . .	9
2.1.2	Propriétés générales des champs électromagnétiques . . . . .	11
2.2	Rappel d'électrostatique . . . . .	11
2.2.1	Loi de Coulomb . . . . .	12
2.2.2	Du théorème de Gauss... . . . .	13
2.2.3	... à Maxwell-Gauss . . . . .	14
2.2.4	Et l'autre équation de Maxwell dont je ne me souviens pas le nom ?	15
2.3	Rappel de Magnétostatique . . . . .	15
2.3.1	Courant électrique et champ magnétique . . . . .	15
2.3.2	Expérience de Oersted . . . . .	15
2.3.3	La loi de Biot et Savart . . . . .	16
2.3.4	Équation de Maxwell-Thompson/flux . . . . .	17
2.3.5	Équation de Maxwell-Ampère . . . . .	18
2.3.6	Premières conclusions . . . . .	19
2.4	Rappels d'électrodynamique . . . . .	19
2.4.1	Loi de Faraday . . . . .	19
2.4.2	Maxwell Faraday 2.0 . . . . .	22
2.5	Effet Meissner . . . . .	22
2.6	La loi d'Ohm . . . . .	22
2.7	Aparté : Laplace, Lorentz et effet Hall . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Les équations de la Magnétohydrodynamique</b>	<b>27</b>
3.1	L'équation d'induction . . . . .	27
3.2	L'équation de Navier-Stokes . . . . .	28
3.3	Aspects énergétiques . . . . .	30
3.4	L'adimensionnement . . . . .	30

3.5	<i>MHD</i> idéale/ <i>MHD</i> résistive . . . . .	32
3.5.1	<i>MHD</i> idéale . . . . .	32
3.5.2	<i>MHD</i> résistive . . . . .	33
3.6	Analogie avec la thermique : le Prandtl . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Du plasma et de l'approximation fluide</b>	<b>36</b>
4.1	Le plasma : des particules au fluide . . . . .	37
4.1.1	Degré d'ionisation . . . . .	37
4.1.2	Stabilité et équilibre thermodynamique . . . . .	37
4.1.3	Plasma collisionnel . . . . .	37
4.1.4	Pulsation Plasma . . . . .	38
4.1.5	Longueur de Debye . . . . .	38
4.1.6	Effet cyclotronique . . . . .	39
4.1.7	L'approximation fluide . . . . .	39
<b>5</b>	<b>La <i>MHD</i> idéale</b>	<b>41</b>
5.1	Le théorème d'Alfvén . . . . .	41
5.1.1	Démonstration . . . . .	41
5.1.2	Lien avec le rayon de Larmor . . . . .	44
5.1.3	Qui entraîne qui ? . . . . .	44
5.2	Les ondes d'Alfvén . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Application et limites de la <i>MHD</i> idéale : le confinement et la reconnexion magnétique</b>	<b>47</b>
6.1	Préliminaire : Principe des réacteurs à fusion . . . . .	47
6.1.1	La fusion . . . . .	47
6.1.2	Dans ITER . . . . .	48
6.2	Le confinement magnétique . . . . .	49
6.2.1	L'effet miroir magnétique . . . . .	50
6.2.2	L'état d'équilibre de confinement . . . . .	52
6.2.3	Le confinement $\theta$ -pinch . . . . .	53
6.2.4	Le confinement z-pinch . . . . .	54
6.2.5	$z + \theta =$ Tokamak . . . . .	55
6.3	La reconnexion magnétique . . . . .	56
6.3.1	Description . . . . .	56
6.3.2	Modèle de nappe de courant en <i>MHD</i> idéale . . . . .	57
6.3.3	Modèle de Sweet-Parker. . . . .	58
<b>7</b>	<b>Les instabilités <i>MHD</i></b>	<b>60</b>
7.1	Définition . . . . .	60
7.2	Analyse de stabilité linéaire . . . . .	61
7.2.1	Cas unidimensionnel . . . . .	62
7.2.2	Cas bidimensionnel . . . . .	63

7.3	Application à la <i>MHD</i> . . . . .	64
7.3.1	Navier-Stokes . . . . .	64
7.3.2	Modes normaux . . . . .	66
7.3.3	Application aux ondes d'Alfvén . . . . .	68
7.3.4	Approche expérimentale . . . . .	69
7.3.5	Stabilité du z-pinch . . . . .	72
7.3.6	Un mot sur la l'instabilité magnétorotationnelle . . . . .	72

# Chapitre 1

## Contexte et applications

La magnétohydrodynamique ou *MHD* est une discipline très particulière de la mécanique des fluides qui concerne les écoulements de fluides conducteurs électriques en présence ou non d'un champ magnétique. Si ce domaine semble être très restreint il concerne en réalité 99.9% de la matière universelle. En effet, les étoiles, le vent stellaire par exemple sont composés de matière ionisée (atomes qui ont perdu partiellement ou totalement leurs électrons) appelé *plasma* souvent considéré comme étant le 4ème état de la matière. En géophysique, les équations de la *MHD* pilotent les mouvements du manteau terrestre et notamment le mécanisme de création du champ magnétique. Dans l'industrie, celle-ci régit entre autre le comportement des écoulements de métaux liquides - nombreux en sidérurgie et dans la fabrication du verre [1]. Historiquement la magnétohydrodynamique est une discipline récente, il a fallu attendre 1937 pour que Hartmann procède aux premières expériences et constatations sur les propriétés particulières des écoulements de fluides conducteurs [2]. Ce n'est qu'en 1942 que Hannes Alfvén démontre l'existence d'ondes magnétohydrodynamique et établit le lien entre l'électromagnétisme et l'hydrodynamique pour écrire les équations actuelles de la magnétohydrodynamique [3]. Cela lui vaudra le prix Nobel en 1970.

Il est important de noter que la force centrale à la compréhension des phénomènes *MHD* est la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{F}$  est la force subie par une particule de charge  $q$  en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}$  dans le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

C'est la combinaison de cette force - à partir de laquelle on définit le champ magnétique - et de l'équation de Navier-Stokes que l'on décrit les équations de la magnétohydrodynamique.

Ce cours s'est très largement inspiré des livres de S. Galtier [4] et de P.A. Davidson [5] pour la *MHD*, D.A. Jackson [6] pour l'électromagnétisme, du site [ampere.cnrs.fr](http://ampere.cnrs.fr) pour les aspects historiques et de Wikipedia pour le reste. Je les remercie.

Dans ce cours les vecteurs seront noté en **gras**.

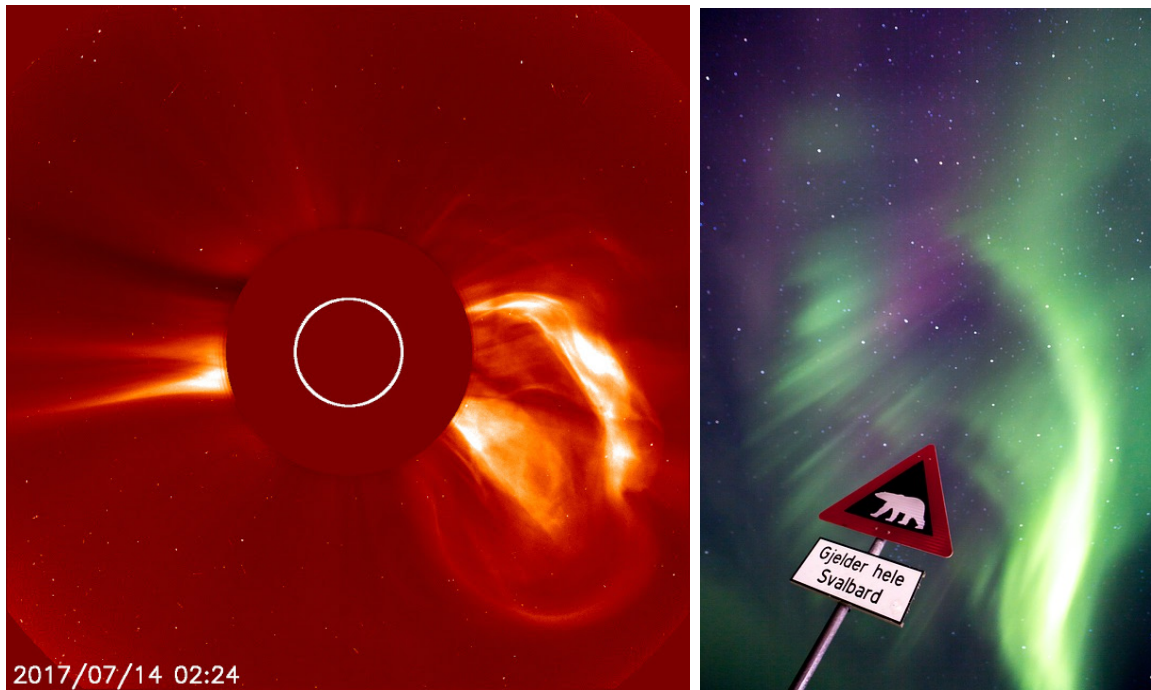


FIGURE 1.1: A gauche : une éjection de masse coronale solaire, à droite photo d'une aurore Boréale

## 1.1 Manifestations de la magnétohydrodynamique

### 1.1.1 Naturelles

#### Du plasma en astrophysique

Le plasma est omniprésent dans le milieu stellaire (l'hydrogène et l'hélium sont entièrement ionisés dans les étoiles et baignent dans un océan d'électrons), dans le milieu interstellaire (vents) et dans les coeurs des planètes. Dès lors la *MHD* pilote donc de nombreux phénomènes en astrophysique. L'exemple classique est l'éjection de masse coronale du soleil. La couronne solaire correspond à la partie la plus externe du soleil, elle est très peu dense ( $10^{-12}$  fois moins dense que la photosphère) et extrêmement chaude ( $T_c = 2.10^6 K$  contre  $T = 7000 K$  à la surface du soleil). Parfois, lors d'une éruption solaire, une bulle de plasma de très grande dimension (plusieurs rayons solaires) peut se former, se reconnecter et modifier le vent solaire dont la variation atteint la terre dans un temps typique de 3 jours. Les particules chargées arrivent alors sur terre au niveau des pôles guidées par le champ magnétique terrestre et provoque alors des aurores boréales. Le champ magnétique lié à ces objets est très intense et peut provoquer des orages magnétiques et provoquer des troubles pour les équipements électroniques [7] tels que les satellites, les téléphones cellulaires, etc...

Un autre phénomène MHD important concerne le transport du moment cinétique dans les disques d'accrétion - gaz, poussière en rotation autour d'un astre central, trou

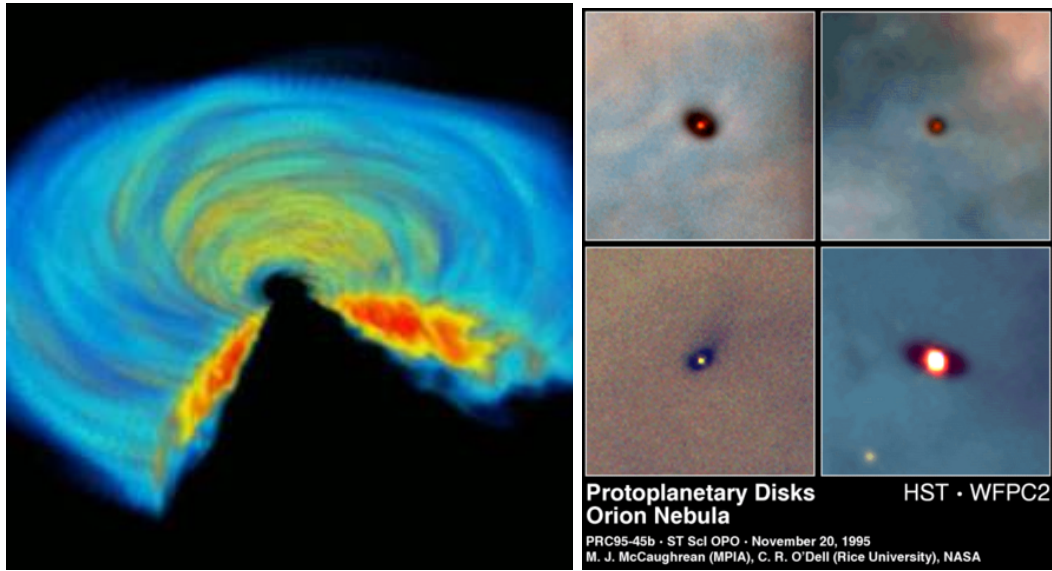


FIGURE 1.2: A gauche, dessin d'un disque d'accrétion proto-planétaire, à droite image d'un vrai disque d'accrétion dans la nébuleuse d'Orion.

noir ou étoile en formation. A cause du forçage gravitationnel la matière qui compose ces disques a un mouvement laminaire, cela entraîne le fait que le temps caractéristique pour "éjecter", le moment cinétique et permettre l'accrétion de la matière dans l'objet central serait des ordres de grandeurs trop longs pour qu'on puisse observer les étoiles. Un autre mécanisme de transport est donc nécessaire et le principal candidat est l'instabilité Magnétorotationnelle qui suggère que la présence d'un champ magnétique même faible déstabiliserait fortement le disque et permettrait le transport du moment cinétique. Dès lors les temps caractéristiques d'accrétion deviennent plus cohérents avec les observations [8].

### Des métaux liquides en géophysique

Les mouvements des métaux liquides (fer, nickel) composant le noyau externe de la terre seraient à l'origine de la génération du champ magnétique terrestre. On appelle ce phénomène l'effet dynamo. Si cet effet a été reproduit plusieurs fois expérimentalement, analytiquement et par simulation numérique le mécanisme réel de génération du champ magnétique terrestre n'est pas encore bien modélisé. Notamment, ni les renversements réguliers du champ magnétique, ni les variations temporelles et topologiques ne sont pas bien compris [9].

La dynamo est un mécanisme instable dûe à la topologie de l'écoulement qui amplifie une perturbation du champ magnétique ("graine"). En pratique le mouvement des charges liées au fluide conducteur dans un champ magnétique crée un courant électrique qui génère un champ magnétique qui vient renforcer le champ initial jusqu'à saturation.

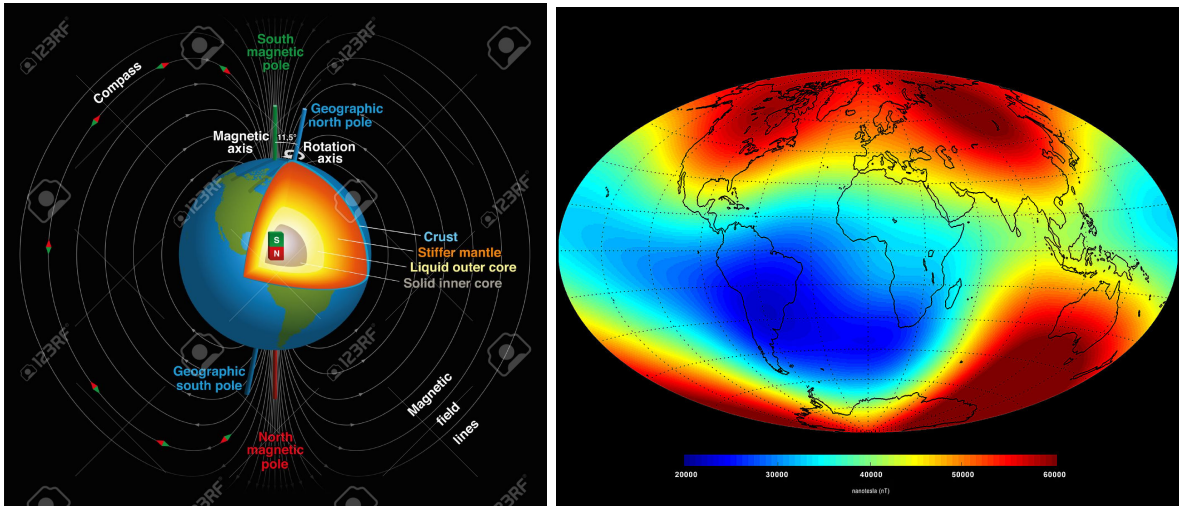


FIGURE 1.3: Champ magnétique terrestre mesuré en juin 2014 par la sonde Swarm (ESA/DTU Space).

## 1.1.2 Dans l'industrie

### Du plasma dans l'industrie

L'exemple le plus classique de l'utilisation d'un plasma dans l'industrie est celui du réacteur à fusion ITER qui se trouve à Cadarache. Nous reviendrons en détail sur le fonctionnement par la suite, mais le principe général consiste au forçage contrôlé d'une réaction de fusion entre atomes légers. Pour déclencher cette réaction les conditions de température et de densité sont extrêmes ce qui entraîne que les atomes sont sous forme de plasma complètement ionisés. Le confinement se fait par de puissants champs magnétiques et l'écoulement du plasma est sujet à de violentes instabilités MHD qui sont les principales difficultés rencontrées par les chercheurs pour maintenir le confinement du plasma suffisamment longtemps pour avoir une réaction de fusion efficace.

### Des métaux liquides dans l'industrie

L'aluminium est un des métaux les plus important dans notre industrie, sa production est un procédé - dit de Hall-Héroult - qui date du 19ème siècle et consiste en la fusion de l'oxyde d'aluminium (alumine) à température autour de  $1000^{\circ}C$ , puis sa réduction en Aluminium métal. Pour cela on utilise des cellules d'électrolyse qui ont une intensité de 350000 A pour un voltage de 4.2 V alors que seul 1.18 V devrait être nécessaire. Cette différence provient de la résistance des différents éléments du forçage (anode, cathode,...) notamment du bain électrolytique. Cette résistance pourrait être réduite si l'épaisseur de solution électrolytique pouvait être réduite mais c'est impossible à cause d'instabilités *MHD* qui déforment la surface libre de l'aluminium en fusion ce qui menace l'intégrité des cellules. La compréhension, puis le contrôle de cette instabilité permettrait une économie d'électricité de l'ordre de 1% de la production électrique



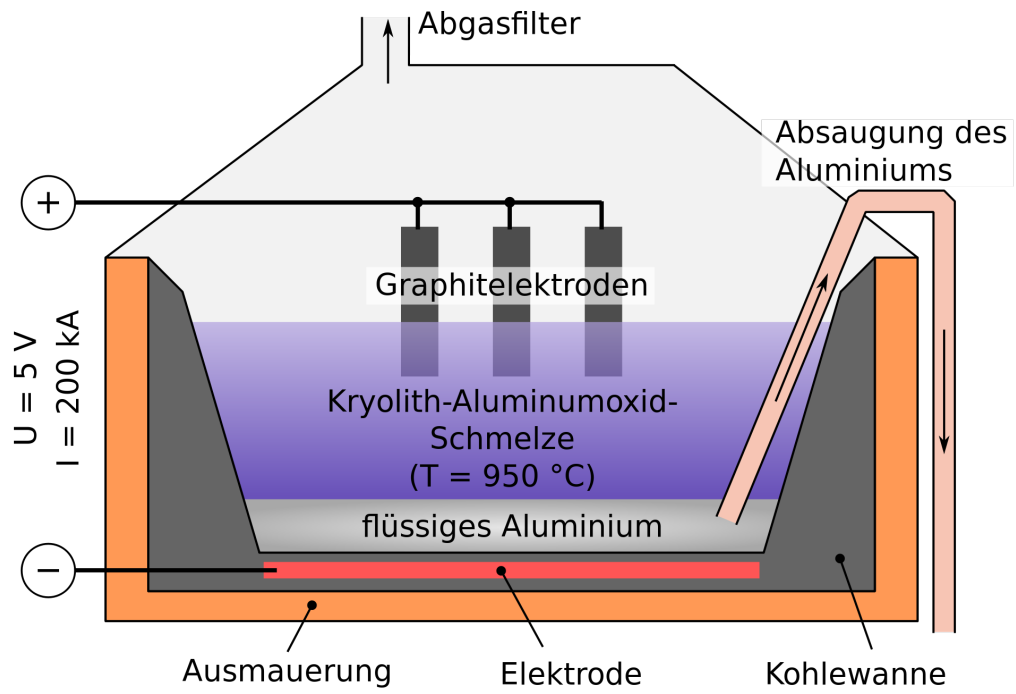


FIGURE 1.4: Schéma d'une cellule de Hall-Héroult.

mondiale annuelle [5].

# Chapitre 2

## Rappel d'électromagnétisme

### 2.1 Généralités

Dans ce chapitre nous rappelons/introduisons des notions de base d'électromagnétisme. Nous ne souhaitons pas être exhaustifs, mais nous nous concentrerons sur les notions utiles à la compréhension de la magnétohydrodynamique.

#### 2.1.1 Le champ magnétique

##### Définition

Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  tout comme le champ électrique est défini à partir de la force de Lorentz qu'ils exercent sur une particule chargée  $q$  situé en  $\mathbf{r}$ , à  $t$  :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)). \quad (2.1)$$

Il faut noter que le champ  $\mathbf{E}$  exerce une force sur **toutes** les charges alors que le champ magnétique ne s'applique que sur les charges **mobiles**. La force de Lorentz est une force microscopique contrairement à la force de Laplace, de plus seule la partie électrique fournit un travail.

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.2)$$

$$= q\mathbf{E}\mathbf{v}dt + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{v}dt \quad (2.3)$$

$$= q\mathbf{E}\mathbf{v}dt \quad (2.4)$$

La partie magnétique est une correction en  $(v/c)^2$  de la partie électrique. Enfin cette force viole le principe d'action-réaction.

##### Correction de la loi de coulomb

On se place dans un référentiel fixe,  $q_1$  et  $q_2$  sont animées d'une vitesse  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . Pour évaluer la force qu'exerce  $q_1$  sur  $q_2$  on fait le raisonnement suivant :

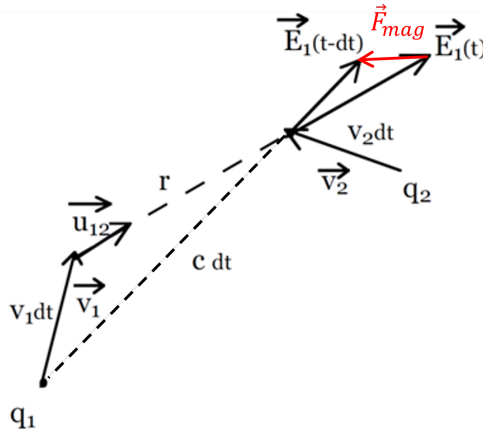


FIGURE 2.1: Schéma de 2 particules animées de vitesses différentes en interaction électrique. Due au temps de transport non nul de l'information, à  $t + dt$  le champ électrique perçu par les particules est  $\mathbf{E}(t - dt)$  - différent de  $\mathbf{E}(t)$  qui intervient dans la loi de Coulomb. Le terme magnétique  $\mathbf{F}_{mag} = q(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$  corrige cet effet de "retard" dans la loi de Coulomb.

- $dt$  est le temps pour que l'information (champ électrique  $\mathbf{E}(t)$  généré par  $q_1$  à  $t$ ) arrive en  $q_2$ . Donc  $r = cdt$ .
- Durant  $dt$ ,  $q_1$  parcourt  $\mathbf{v}_1 dt$  et  $q_2$  parcourt  $\mathbf{v}_2 dt$
- à  $t$  la distance entre  $q_1$  et  $q_2$  est  $r$ , à  $t - dt$  la distance entre  $q_1$  et  $q_2$  est  $cdt$  qui est différent de  $r$ .
- donc à  $t$  la particule  $q_2$  subit le champ électrique  $\mathbf{E}(t - dt)$  qui est - si au moins une des particules est en mouvement - différent dans l'orientation et dans l'intensité de  $\mathbf{E}(t)$ .

Cette notion de "retard" n'est pas pris en compte dans la loi de coulomb  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  qui suppose que l'information se propage à une vitesse infinie. Le terme qui définit le champ magnétique  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{F}_{mag} = q(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$  corrige donc la loi de coulomb électrique (voir figure 2.1).

### Effet relativiste

Si on se place dans le cadre de la relativité restreinte, on peut écrire que selon la vitesse des référentiels, on observe une contraction des longueurs par le paramètre  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  et une dilatation des temps. Cette variation de l'espace entraîne la déformation du champ électrique émis par une particule.

Dans la figure 2.2 on voit le champ isotrope émis par une particule et le champ déformé par la contraction des longueurs de cette même particule en mouvement. Cette déformation est à l'origine du champ magnétique qui est donc d'origine relativiste. Il faut noter que si les deux approches précédentes pour comprendre l'origine du champ magnétique sont différentes, l'origine intrinsèque du champ magnétique est la même i.e.

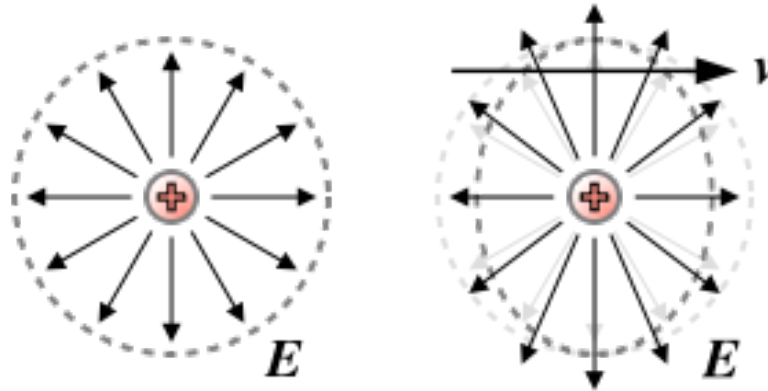


FIGURE 2.2: Gauche : schéma du champ électrique émis par une particule chargée positivement au repos. Droite : schéma du champ électrique émis par une particule chargée positivement en mouvement. (source Wikipédia)

une vitesse de propagation de l'information électrique non infinie et égale à la vitesse de la lumière.

## 2.1.2 Propriétés générales des champs électromagnétiques

### Symétrie

Les champs électromagnétiques respectent le principe de Curie qui énonce que l'ensemble des effets est au moins aussi invariant que les causes. *Le champ engendré par les sources possède les mêmes symétries que celles-ci.*

### Superposition

Si une distribution de charges est la possible réunion de deux ou plusieurs distributions (noté  $1, 2, \dots, i, n$ ), alors le champ électromagnétique au point  $M$  est la superposition du champ électromagnétique créé par  $i$  comme si les autres n'existaient pas. On a donc :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

## 2.2 Rappel d'électrostatique

Ici nous reprendrons quelques éléments de base de l'électrostatique afin d'introduire l'équation de Maxwell-Gauss source du champ électrique.

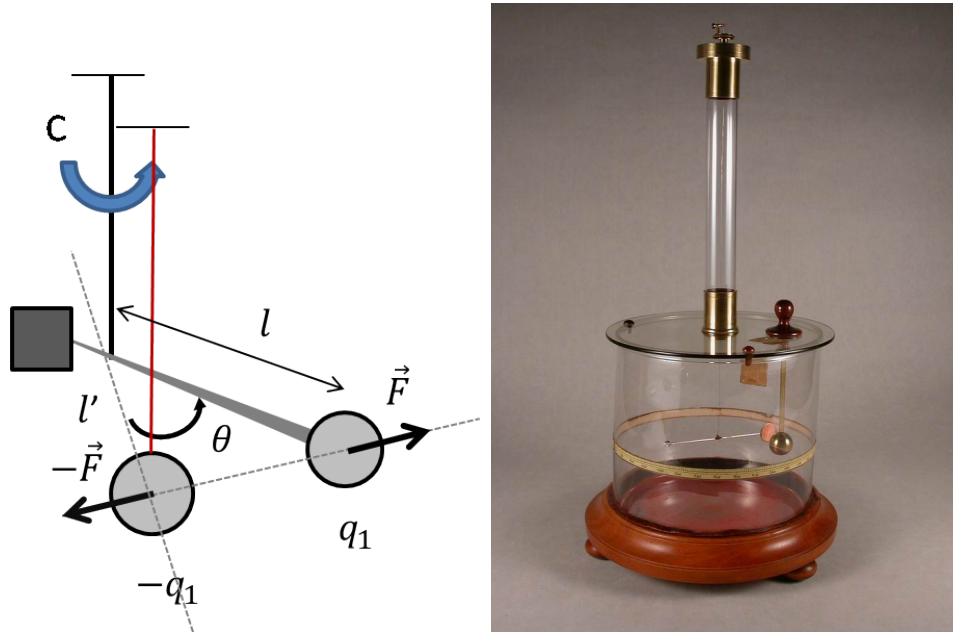


FIGURE 2.3: Gauche : schéma de principe d'une balance de Coulomb. avec  $q_2 = -q_1$ . Droite : Photographie

### 2.2.1 Loi de Coulomb

En 1795, Coulomb a pu établir la force entre deux charges de même signe grâce à une balance de torsion dite balance de Coulomb.

Ce dispositif se compose d'un large cylindre de verre avec des graduations angulaires. Au sommet du cylindre, on relie un fil avec une raideur de torsion  $C$  connue à une tige horizontale isolante au bout de laquelle se trouve une sphère conductrice. On charge cette sphère puis on rapproche une autre sphère elle aussi chargée. On ajuste alors la raideur de torsion afin qu'elle compense le couple électrostatique créé par la répulsion électrostatique.

Il remarqua alors que la force d'interaction dépend du produit des charges impliquées, et de l'inverse de la distance au carrée entre elle.

$$C\theta\mathbf{e}_z = \mathbf{l}' \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{l} \times (\mathbf{F}) \quad (2.7)$$

Ex : Écrire la force  $\mathbf{F}$  uniquement à partir de  $\theta$  et  $C$ .

A partir de ces mesures Coulomb démontra la loi de Coulomb qui désigne la force appliquée à  $q_2$  par  $q_1$  :

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = k_c \frac{q_1 q_2}{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (2.8)$$

où  $k_c = 1/(4\pi\epsilon_0)$  la constante de Coulomb dans laquelle  $\epsilon_0 = 8.854187 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  est la permittivité du vide. La force appliquée à  $q_1$  par  $q_2$  est l'opposé de (2.8).

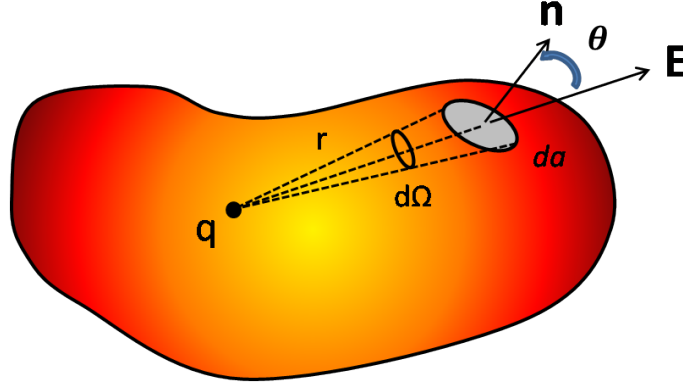


FIGURE 2.4: Théorème de Gauss, on intègre le flux électrique à travers une surface  $S$  fermée. Si la charge est à l'intérieur de  $S$ , l'intégration de l'angle solide de  $S$  qu'elle voit est  $4\pi$ , et 0 si elle est à l'extérieur.

Cela permet de définir le champ électrique d'une charge ponctuelle  $q_2$  en tout point de l'espace :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \quad (2.9)$$

Grâce au principe de superposition on peut rapidement écrire que le champ électrique créé par un ensemble de charges ponctuelles  $n$  est :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^n q_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^3}. \quad (2.10)$$

Si on définit une densité volumique de charges  $\rho(\mathbf{r}') = dq/(dx'dy'dz')$  où  $q$  est la charge élémentaire contenue dans le volume élémentaire  $d^3r' = dx'dy'dz'$  situé au point  $\mathbf{r}'$ , alors le champ électrique généré par cette distribution continue de charge est :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^3} d^3r'. \quad (2.11)$$

## 2.2.2 Du théorème de Gauss...

Une alternative pour le calcul d'un champ électrique est le théorème de Gauss. Cette forme intégrale met en oeuvre des notions de flux de champ électrique et permet ensuite de retrouver une des équations de Maxwell.

- Soit  $q$  une charge ponctuelle
- Soit  $S$  une surface fermée et  $da$  un élément de surface infinitésimal défini par sa normale sortante  $\mathbf{n}$ .
- $\mathbf{E}$  le champ électrique généré par la charge  $q$ .
- $r$  la distance de la charge à  $da$  portée par le vecteur  $\mathbf{e}_r$  tel que  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$

- la charge voit l'élément de surface  $da$  avec un angle solide  $d\Omega$

En utilisant la loi de Coulomb on peut écrire le flux de champ électrique à travers  $da$  :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}. \quad (2.12)$$

Or  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} = \cos\theta$  où  $\theta$  est aussi l'angle entre la surface élémentaire  $da$  et l'angle solide  $d\Omega$ . Donc  $\cos\theta da = r^2 d\Omega$ , si bien que si on intègre le flux de champ électrique à travers la surface fermée  $S$  on a

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega. \quad (2.13)$$

L'intégrale sur une surface fermée de l'angle solide est nul si  $q$  est à l'extérieur et égale à  $4\pi$  si  $q$  est à l'intérieur.

On peut donc écrire le théorème de Gauss pour une charge ponctuelle :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.14)$$

pour les charges  $q$  entourées par  $S$ . Ce théorème se généralise au densité de charges continues :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} d^3r \quad (2.15)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}. \quad (2.16)$$

Où  $q_{int}$  sont les charges à l'intérieur de la surface fermée  $S$ .

### 2.2.3 ... à Maxwell-Gauss

Partant du théorème de Gauss on peut démontrer deux équations de Maxwell. Si on applique le théorème de Green-Ostrogradski au champ électrique  $\mathbf{E}$ .

$$\int_V \text{div} \mathbf{E} d^3r = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.17)$$

Si on injecte l'équation précédente dans le théorème de Gauss on obtient immédiatement :

$$\int_V \text{div} \mathbf{E} - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} d^3r = 0 \quad (2.18)$$

ce qui est vrai quel que soit le volume  $V$  considéré. On retrouve donc bien l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.19)$$

qui est la version locale du théorème de Gauss.

## 2.2.4 Et l'autre équation de Maxwell dont je ne me souviens pas le nom ?

De la même manière en partant de la loi de Coulomb, si on remarque que la fonction de  $\mathbf{r}$  dans l'intégrant peut s'écrire :

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^3} = -\mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.20)$$

On peut donc écrire la loi de coulomb sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{grad} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (2.21)$$

car l'intégrale et la densité de charge porte sur la variable  $\mathbf{r}'$  indépendante de  $\mathbf{r}$ .

Comme le rotationnel d'une fonction qui s'écrit sous la forme d'un gradient est nul (si celle-ci est régulière) on a donc directement l'équation de Maxwell-Faraday en statique :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.22)$$

Dans ces conditions (statique ou régime permanent) on peut conclure que le champ électrique peut s'écrire sous la forme d'un potentiel :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad}V. \quad (2.23)$$

Ce potentiel correspond à la tension dans les circuits électriques et s'écrit :

$$V = \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad (2.24)$$

## 2.3 Rappel de Magnétostatique

### 2.3.1 Courant électrique et champ magnétique

Dans ce chapitre nous reprendrons un peu le déroulement historique de la découverte du champ magnétique. L'un des objectifs est de mettre en lumière la grande ingéniosité des physiciens de cette époque pour la conception et construction d'expériences sur lesquelles des lois toujours valables ont été démontrées.

### 2.3.2 Expérience de Oersted

Longtemps, différents récits pointaient le lien entre orage et magnétisme. Par exemple des marins observèrent le changement de polarité de la boussole après que la foudre ait frappé, ou certaines histoires de croix de fer de clochers qui deviennent aimantées sous les impacts des éclairs.



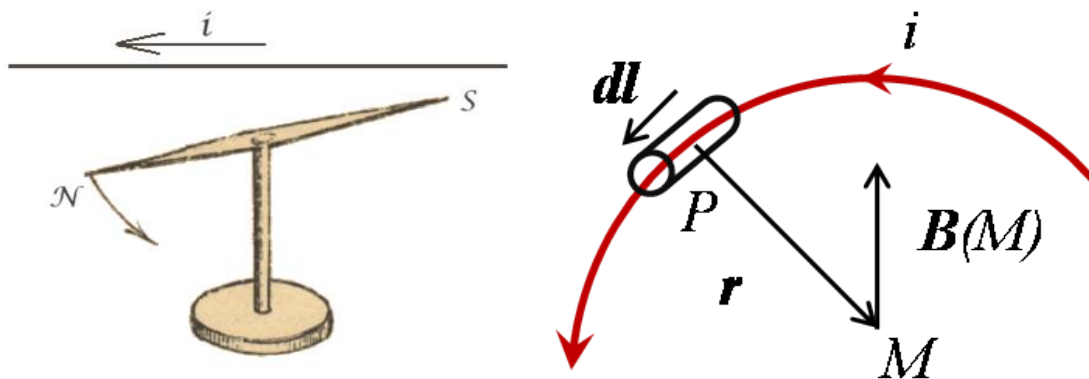


FIGURE 2.5: Gauche :Schéma de principe de l'expérience de Oersted. un fil conducteur est parcouru par un courant électrique. L'orientation de la boussole placée à proximité change. Le courant électrique crée un champ magnétique qui dévie l'aiguille. Droite : Schéma relatif à la loi de Biot et Savart.

De plus la capacité d'attraction entre les pôles des aimants rappelait celle entre charges de polarité différentes. Dès lors si lien entre électricité et magnétisme était fait, fallait-il encore le démontrer.

Au 19ème siècle, plusieurs expériences ont été tentées, dont certaines farfelues, on peut citer celle de Ritter qui fit flotter une pile à la surface de l'eau en espérant que celle-ci s'oriente selon le champ magnétique terrestre. C'est Oersted en 1820 qui démontra finalement le lien tant recherché. [10]

Lors d'un enseignement il remarque que le courant électrique fait dévier l'aiguille d'une boussole située à proximité. Il démontre alors le lien entre courant électrique et champ magnétique En reprenant ses expériences il ajoute quelques constatations :

- Si on inverse le courant, la déviation de l'aiguille change de sens.
- La force qui dévie l'aiguille n'est pas radiale (la boussole ne s'oriente pas vers le fil).

L'interprétation de Oersted suppose alors une action magnétique à distance de la forme d'une hélice.

### 2.3.3 La loi de Biot et Savart

A la fin de l'année 1820, Biot et Savart ajoutèrent la notion d'aimantation momentanée pour des tranches du fil conducteur à l'interprétation, puis reproduisirent très finement l'expérience de Oersted. Cette fois ils mesurèrent la période d'oscillation de l'aiguille - après l'avoir isolée du champ magnétique terrestre - en fonction de la distance avec le fil parcouru par le courant.

Ils montrent alors que la force sur un pôle agit perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur. De plus, celle-ci décroît comme l'inverse du carré de la

distance (tiens, tiens... comme la loi de Coulomb). [11]

La loi de Biot et Savart pour le champ magnétique s'écrit donc :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{i d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.25)$$

avec  $\mathbf{r} = \mathbf{PM}$  (voir figure 2.5). Si on modélise l'aimant par un moment dipolaire, ce champ magnétique engendre un couple mécanique sur l'aimant qui est proportionnel à son intensité  $\mathbf{m}$ .

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (2.26)$$

De la même manière que pour le champ électrique, on peut généraliser la loi de Biot et Savart à une densité de courant volumique. On définit cette densité par :

$$\mathbf{j}_k(\mathbf{r}') = \sum_k n_k q_k \mathbf{v}_k(\mathbf{r}'). \quad (2.27)$$

Alors on peut réécrire la loi de Biot et Savart telle que :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{j}_k(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^3} dr' \quad (2.28)$$

### Violation du principe d'action-réaction de la force de Lorentz

Grâce à Biot et Savart, il est aisé de démontrer que la force de Lorentz viole le 3ème principe de Newton. Si on prend de nouveau deux particule chargées  $q_1, q_2$ , si 1 se dirige vers 2 à la vitesse  $\mathbf{v}_1$  et que 2 se dirige dans une direction quelconque à la vitesse  $\mathbf{v}_2$  alors le champ magnétique vu par la particule 2 s'écrit :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_{1 \rightarrow 2}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 v_1 \times \mathbf{r}_{1 \rightarrow 2}}{r_{1 \rightarrow 2}^3} = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Cela entraîne une partie magnétique de la force de Lorentz nulle  $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}^{mag} = \mathbf{0}$ . Or comme  $\mathbf{v}_2$  ne pointe pas vers 1, la force magnétique de Lorentz subie par la particule 1 est non nulle :  $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}^{mag} \neq \mathbf{0}$ . Il n'y a pas action-réaction.

### 2.3.4 Équation de Maxwell-Thompson/flux

En reprenant l'identité 2.20 déjà utilisée pour démontrer Maxwell-Faraday, on peut réécrire la loi de Biot et Savart :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}_k(\mathbf{r}') dr' \quad (2.30)$$

En utilisant l'identité du rotationnel d'un produit entre un scalaire et un vecteur  $\mathbf{rot}(\nu \mathbf{A}) = \nu \mathbf{rot} \mathbf{A} + \mathbf{grad} \nu \times \mathbf{A}$ , on obtient pour le champ magnétique :

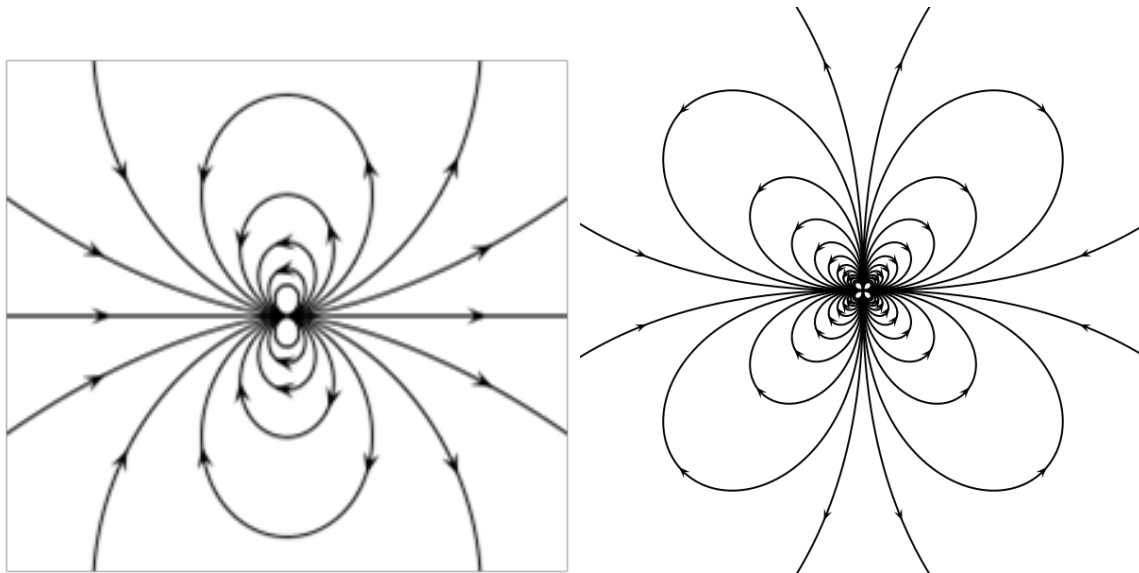


FIGURE 2.6: Gauche : Lignes de champ magnétique créée par un dipôle. Droite : Lignes de champ magnétique créée par un dipôle. Les lignes partent des pôle nord pour aller vers les pôles sud.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V (\mathbf{rot} \frac{\mathbf{j}_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{rot} \mathbf{j}_k(\mathbf{r}')) dr'. \quad (2.31)$$

Comme  $\mathbf{j}_k(\mathbf{r}')$  et l'intégration sont indépendants de  $\mathbf{r}$ , d'une part le deuxième de l'intégrand est nul et d'autre part on peut sortir le rotationnel de l'intégrale. Le champ magnétique s'écrit sous la forme d'un rotationnel,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{rot} \iiint_V (\frac{\mathbf{j}_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) dr' \quad (2.32)$$

ce qui implique immédiatement l'équation de Maxwell-Thompson :

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.33)$$

*Le flux de champ magnétique à travers une surface fermée est toujours nul, on a donc toujours conservation du flux de champ magnétique.* Les lignes de champ magnétique se referment toujours sur elles-mêmes ce qui fait que l'on n'a jamais de charge magnétique (pas de monopôle) mais au minimum des dipôles. On peut donc couper autant de fois un aimant en deux que l'on veut on aura toujours un pôle sud et un pôle nord.

### 2.3.5 Équation de Maxwell-Ampère

Enfin à partir de la loi de Biot et Savart mise sous la forme rotationnelle de l'équation 2.32 on peut démontrer l'équation de Maxwell-Ampère (vous trouverez la démonstration

à la page 190 de [6]) :

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}. \quad (2.34)$$

Cette équation est valable en magnétostatique mais aussi lorsque les processus sont lents devant la vitesse de la lumière (pas de courants de déplacement). Ceci est faux pour les ondes électromagnétiques, mais généralement vrai pour la *MHD*, on se placera donc dans ce cadre lors de la suite du cours.

En prenant la divergence de Maxwell-Ampère on démontre immédiatement que  $\text{div}\mathbf{j} = 0$  ce qui signifie que le flux de courant électrique est nul à travers une surface fermée (loi de Kirchhoff). Cette loi entraîne la loi des noeuds et la loi des mailles en électricité.

### 2.3.6 Premières conclusions

Dans les sections précédentes nous nous sommes focalisés sur les aspects statiques de l'électromagnétisme. Nous avons défini le champ magnétique à partir de la force de Lorentz et nous avons écrit les équations de Maxwell à partir des lois empiriques. Il est important de noter que les équations de Maxwell sont les équations sources des champs électromagnétiques, alors la force de Lorentz couple la dynamique entre les champs électromagnétiques et le champ hydrodynamique. Dans la suite nous allons nous focaliser sur les aspects temporels des champs, l'électrodynamique.

## 2.4 Rappels d'électrodynamique

Dans cette section nous nous intéressons aux processus dépendant du temps.

### 2.4.1 Loi de Faraday

Après l'expérience de Oersted et la loi de Biot et Savart, l'objectif de nombreux chercheurs était la production d'électricité à partir d'un champ magnétique. L'idée la plus simple était d'inverser l'expérience de Oersted pour créer du courant. Fresnel place donc un aimant dans une hélice de cuivre dont les extrémités sont plongées dans un bain électrolytique, s'il y a production de courant, il y aura électrolyse. Une faible réaction chimique apparaît mais n'est pas assez probante. Déçu, il se consola avec un plat de lentilles. Colladon en 1825 place un aimant dans une bobine elle-même reliée à un galvanomètre (instrument de mesure du courant issu de l'expérience d'Oersted). Rien ne se passe non plus.

Après plusieurs tentatives (dont Ampère qui avait produit des courants induits expérimentalement mais qui "n'aimait" pas ses résultats), en 1831 Faraday observe la création d'un courant induit par un autre courant. Pour cela, il utilise une pile reliée à un fil entourant un anneau de fer, un autre circuit isolé du premier entoure l'anneau et est branché sur un galvanomètre (figure 2.7). Après une série d'expériences Faraday constate :

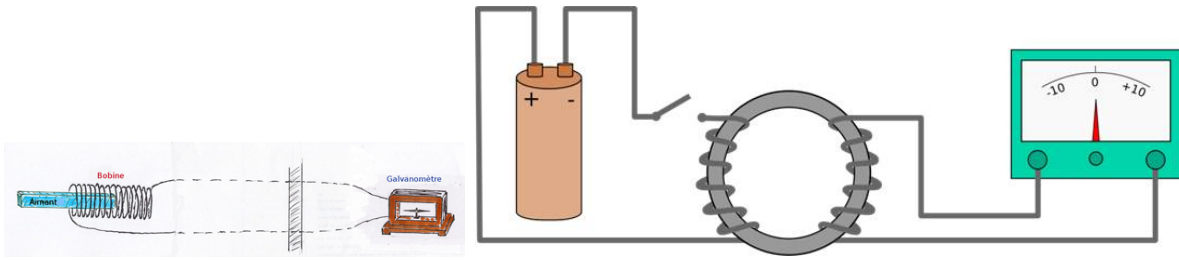


FIGURE 2.7: Gauche : Expérience de Colladon, un aimant est placé dans une bobine elle-même reliée à un galvanomètre, comme l'aimant est fixe il n'y pas de courant induit. Droite : expérience de Faraday, un pile est relié à un fil qui entoure en partie un anneau de fer. De l'autre coté on enroule aussi un circuit de cuivre qui est connecté à un galvanomètre. Lorsque on ouvre ou éteint l'interrupteur, le galvanomètre réagit.

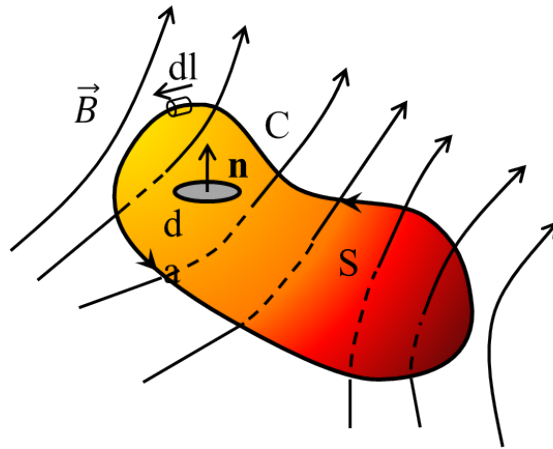


FIGURE 2.8: Schéma d'une surface fermée  $S$  traversée par un flux de champ magnétique  $\Phi$ .

- Lorsque le courant est établi dans la première bobine, l'aiguille dévie fortement puis revient à zéro après quelques oscillations.
- Lorsque le courant est coupé dans la première bobine, le galvanomètre dévie à nouveau - cette fois-ci en sens inverse - puis revient à nouveau à zéro.
- Lorsque le premier circuit, traversé par un courant, est en mouvement par rapport au second, il apparaît un courant.
- Lorsque l'on déplace un aimant à proximité du deuxième circuit, il apparaît un courant.

Il conclut que le courant transitoire est créé par une force électromotrice  $\mathcal{E}$  qui provient de la variation du flux du champ magnétique  $\Phi$  traversant le circuit conducteur. C'est l'aspect transitoire du phénomène d'induction qui était la source des échecs antérieurs [12].

On définit une surface fermée  $S$ , de normale  $\mathbf{n}$ , délimitée par le contour  $C$ , et tra-

versée par un champ magnétique  $\mathbf{B}$  (figure 2.8).

La loi de Lenz-Faraday s'écrit donc :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.35)$$

On doit à Lenz le signe "-", qui un beau matin de 1834, énonce sa loi de modération validée par l'expérience depuis : *le sens du courant induit est tel qu'il s'oppose par ses effets au changement qui lui donne naissance.*

- Dans le cas où le circuit est fixe et subit une variation de champ magnétique, la force électromotrice  $\mathcal{E}$  s'écrit comme la circulation du champ électrique exprimé dans le référentiel du laboratoire :

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.36)$$

Le flux de champ magnétique est défini par :

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (2.37)$$

Dans ce cas comme le circuit et la surface  $S$  sont immobiles, la dérivée totale est égale à la dérivée partielle temporelle :  $d/dt = \partial/\partial t$ .

La loi de Lenz-Faraday devient donc :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (2.38)$$

- Dans le cas où le circuit est animé d'une vitesse  $\mathbf{v}$ , il faut tout d'abord remarquer que la force électromotrice s'écrit comme la circulation du champ électrique ( $\mathbf{E}'$ ) exprimé dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  où  $d\mathbf{l}$  est fixe, i.e. dans le référentiel du circuit.

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.39)$$

Dans ce cas la dérivée temporelle du champ magnétique s'écrit grâce à la dérivée particulière :

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{B} \quad (2.40)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\mathbf{div}\mathbf{B}). \quad (2.41)$$

La loi de Lenz-Faraday devient donc :

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right) \cdot \mathbf{n} \, da \quad (2.42)$$

$$\oint_C (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, da \quad (2.43)$$

Quel que soit le référentiel dans lequel on exprime les lois de Lenz-Faraday (équations 2.38, 2.43), l'invariance Galiléenne (les lois physiques sont invariantes par la transformation de Galilée) impose que le champ électrique dans le laboratoire  $\mathbf{E}$  et celui exprimé dans le référentiel du circuit  $\mathbf{E}'$  sont liés tel que :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.44)$$

avec  $\mathbf{v}$  la vitesse du circuit et  $\mathbf{B}$  le champ magnétique dans le laboratoire. Ce changement de référentiel est appelé la transformation de Lorentz.

Il faut donc noter que les champs électromagnétiques ne suivent donc pas les règles de la mécanique classique (dépendance du référentiel, transformation de changements de repères non galiléen et violation du principe d'action-réaction). Ces différences notables prennent sens dans le cadre de la relativité restreinte, nous garderons néanmoins le formalisme de la mécanique classique ce qui devrait nous donner de bons résultats à partir du moment où les vitesses des phénomènes sont petites devant la vitesse de la lumière.

## 2.4.2 Maxwell Faraday 2.0

Enfin si on exprime le champ électrique et le champ magnétique dans le même référentiel, on peut réécrire l'équation 2.38 :

$$\iint_S (\mathbf{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}) \cdot \mathbf{n} da \quad (2.45)$$

qui est valable quel que soit  $S$ , ce qui donne l'équation de Maxwell-Faraday dynamique :

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.46)$$

## 2.5 Effet Meissner

Les supraconducteurs sont une famille de matériaux dont la résistance chute à 0 en deçà d'une certaine température. Leur découverte au 20ème siècle a entraîné moult recherches et ils sont utilisés régulièrement dans l'industrie par exemple pour la création de champs magnétiques intenses (on y revient!). La transition supraconductrice est souvent mesurée car au changement drastique du comportement magnétique avant et après la transition, c'est le comportement magnétique "supra" que je vous propose de déterminer dans la PC 1.

## 2.6 La loi d'Ohm

Dans toutes les sections précédentes nous avons établi les équations de l'électromagnétisme et les liens entre mouvement des charges, champs électriques et champs

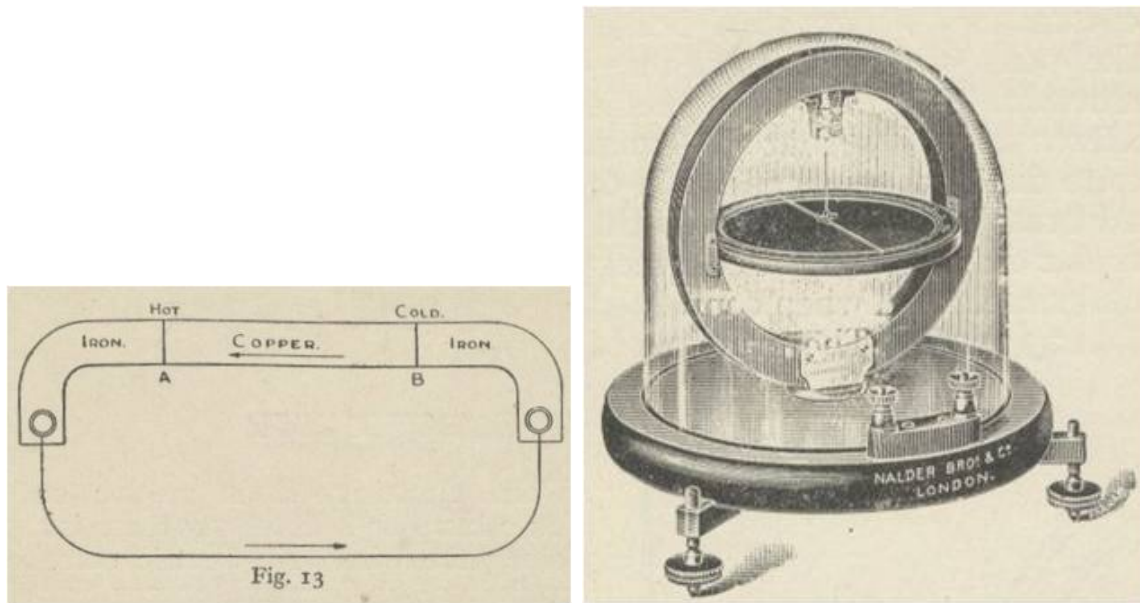


FIGURE 2.9: Gauche : Schéma de l'expérience d'Ohm, un thermocouple dont on pilote les températures des extrémités est relié à différents fils de sections, matériaux, longueurs différents. On mesure la "force magnétique" grâce à l'angle de déviation de l'aiguille aimanté d'un galvanomètre (droite).

magnétiques. Il manque néanmoins une loi qui puisse caractériser l'interaction entre l'électromagnétisme et la matière, *c'est l'objet de la loi d'Ohm*.

Il faut noter que la loi d'Ohm ne s'intéresse qu'à la réponse de la matière à un champ électrique. La réponse de la matière à un champ magnétique s'interprète grâce à la susceptibilité magnétique d'un matériau ce qui vous a été décrit lors de la PC1.

Après Oersted, Ampère montre que la déviation d'une aiguille aimantée au voisinage d'un circuit est identique en tous points du circuit. Il conclut que dans un conducteur, le courant électrique existe partout avec la même intensité.

En 1827 Ohm se propose d'étudier le pouvoir conducteur des matériaux, mais se confronte à la difficulté d'évaluer la tension de sortie d'une pile, et le lien entre intensité et déviation de l'aiguille du galvanomètre n'est pas encore établi.

Il construit donc une expérience où la source de tension est un thermocouple pour lequel la tension est stable et dépend de la différence de température, de fils conducteurs dont il fait varier les longueurs, les sections et le matériau, et du galvanomètre de sa fabrication où l'aiguille aimantée est reliée à un fil de torsion parfaitement calibré. [13]

Les mesures qu'il obtient suivent la loi :

$$X = \frac{a}{b + l} \quad (2.47)$$

où  $X$  est la "force magnétique" mesurée grâce à l'angle de déviation du galvanomètre,  $a$  dépend de la température et des matériaux qui composent le thermocouple,  $b$  est une constante issue du système de l'expérience et  $l$  dépend de la longueur du fil.



Si on s'affranchit de la résistance interne  $b$  due à la source de tension, cette loi d'Ohm correspond à celle idéalisée que l'on connaît tous :

$$\Delta V = RI \quad (2.48)$$

On définit la densité de courant électrique telle que  $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}_q$ , avec  $n$  le nombre de porteurs de charges et  $\mathbf{v}_q$  leurs vitesses. Le modèle de Drüde (1900) introduit une mobilité des charges  $\eta$  telle que  $\mathbf{v}_q = \eta\mathbf{E}'$  avec  $\mathbf{E}'$  le champ électrique dans le référentiel du circuit. On en tire directement la loi d'Ohm locale :

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}' \quad (2.49)$$

avec  $\sigma = nq\eta$  la conductivité électrique du matériau.

Enfin on peut écrire la loi d'Ohm généralisée grâce à l'expression du champ électrique dans le laboratoire  $\mathbf{E}$  en fonction du champ lié au circuit  $\mathbf{E}'$  (eq 2.44)

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.50)$$

avec  $\mathbf{v}$  la vitesse du circuit dans le laboratoire.

Le premier terme de droite correspond au forçage, le deuxième terme de droite correspond au champ électrique induit. Il faut noter que cette loi est valide pour des vitesses faibles devant la vitesse de la lumière  $v \ll c$ , ce qui est le cas très majoritairement dans les phénomènes *MHD*. De plus on suppose que les porteurs de charges (ions et électrons) se déplacent sans inertie. Il n'y a donc pas de différence de comportement entre les porteurs de charges, i.e. le matériau n'est pas sujet à l'effet Hall (pas de terme de Hall dans la loi d'Ohm).

## 2.7 Aparté : Laplace, Lorentz et effet Hall

Actuellement, la mesure du champ magnétique se fait grâce à des sondes à effets Hall. L'effet Hall provient d'un phénomène que nous avons négligé dans la section précédente l'inertie des porteurs de charges.

Considérons une portion de matériau conducteur de section  $S$  et de longueur  $d\mathbf{l}$  parcouru par un courant électrique  $i$ . Les porteurs de charges sont les électrons qui se déplacent alors que les ions sont fixés dans la maille cristalline du matériau.

Si on applique un champ magnétique perpendiculairement au sens de déplacement des électrons, ils ont soumis à la partie magnétique de la force de Lorentz :

$$\mathbf{F}_{e^-} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.51)$$

De ce fait, les électrons sont déviés orthogonalement à  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{v}$  alors que les ions contraints par le réseau cristallin restent fixes. Le barycentre des charges négatives se déplace tandis que celui des charges positives est immobile, le matériau se polarise, il se crée donc un champ électrique : le champ de Hall  $\mathbf{E}_{Hall}$  (voir figure 2.10).

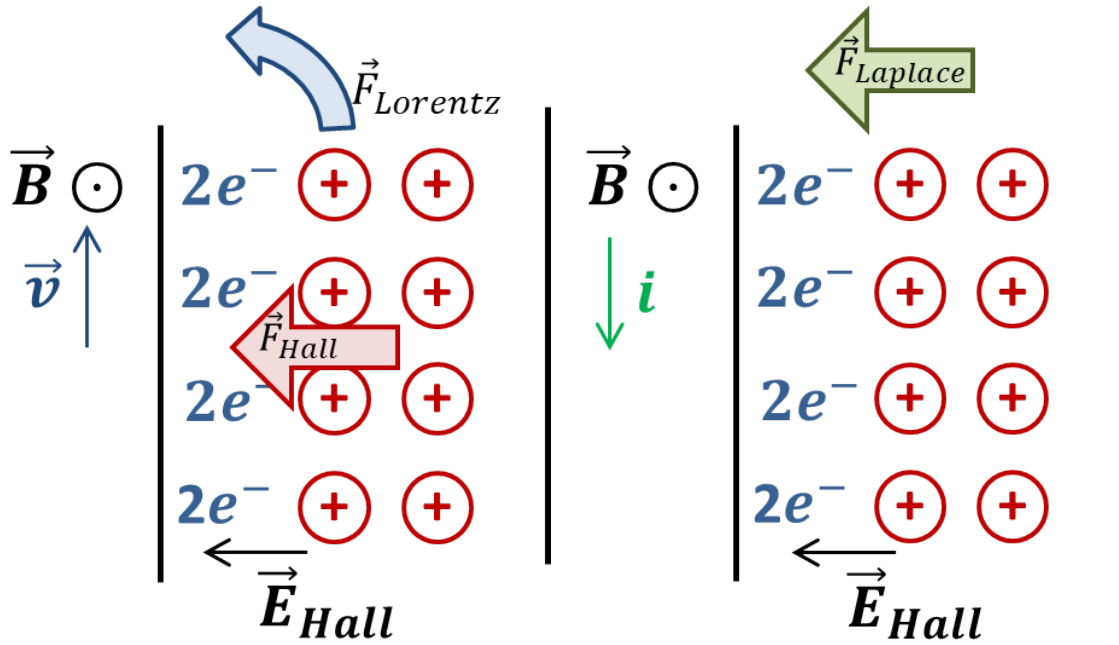


FIGURE 2.10: Gauche : Schéma de l'action de Lorentz sur les électron et création du champ électrique de Hall. Droite : Equivalent de la force de Laplace sur un élément de conducteur.

A l'équilibre sans force, la partie électrique de la force Lorentz compense exactement sa partie magnétique, donc :

$$\mathbf{E}_{Hall} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.52)$$

Ce premier résultat est la base de la méthode de mesure des champs magnétiques. En effet si l'on mesure la tension issue du champ de Hall de part et d'autre du conducteur comme celle-ci varie linéairement avec  $\mathbf{B}$ , on a une mesure directe du champ magnétique (principe du Gaussmètre). Ce champ de Hall, qui différencie le comportement des ions et des électrons, peut intervenir dans la loi d'Ohm locale en ajoutant un terme de Hall ( $-1/ne\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ). C'est ce terme que nous négligeons lorsque l'on néglige l'inertie des porteurs de charge en *MHD*.

Localement les ions subissent la force provenant du champ de Hall :  $\mathbf{F}_{Hall} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Maintenant si on injecte la densité de courant  $\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$  ( $n$  est la densité volumique d'ions) et qu'on intègre cette force sur la section  $S$ . On obtient la force de Laplace :

$$\mathbf{F} = \mathbf{j}S \times \mathbf{B} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{F}_{Laplace} = i\mathbf{dl} \times \mathbf{B} \quad (2.54)$$

Ce raisonnement explique les différences entre la Force magnétique de Lorentz et la force de Laplace :

- En effet, la force de Lorentz est une force locale qui s'applique sur les charges mobiles et qui ne travaille pas.

- La force de Laplace est une force intégrale (s'applique sur un élément de longueur infinitésimale du conducteur) dont l'origine est la force de Coulomb issue du champ électrique de Hall. Comme ce champ est dû à l'équilibre avec la partie magnétique de la force de Lorentz et s'applique sur les charges fixes, la force de Laplace a un travail non nul. C'est aussi pour cela que la force de Lorentz et de Laplace ont la même intensité. La force de Laplace agit donc par l'intermédiaire de l'effet Hall.

Force Mag. Lorentz	Force Laplace
$q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$	$i\mathbf{dl} \times \mathbf{B}$
locale	intégrale
travail nul : $F \cdot \mathbf{v} = 0$	travail non nul : $F \cdot \mathbf{v} \neq 0$
Dévie les charges mobiles	Accélère les charges fixes

TABLE 2.1: Comparaison Force de Lorentz et Force de Laplace

# Chapitre 3

## Les équations de la Magnétohydrodynamique

La *MHD* concerne la dynamique des fluides conducteurs électriques comme les métaux liquides et les plasmas. L'hypothèse initiale de la *MHD* est que les courants à l'origine des champs électriques et magnétiques sont portés par la matière et qu'il y a donc une interaction entre la dynamique des champs électromagnétique et l'hydrodynamique.

Avec les mains le mécanisme des phénomènes *MHD* est assez simple.

- Un fluide conducteur est en mouvement dans un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ , il crée alors par l'intermédiaire de la loi d'Ohm un courant électrique :  $\mathbf{j}_{induit} = \sigma \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$ . Ces courants induits génèrent à leur tour un champ induit  $\mathbf{rot} \mathbf{B}_{induit} = \mu_0 \mathbf{j}_{induit}$  qui modifie le champ magnétique total  $\mathbf{B}_{total} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{induit}$ . On voit ici comment l'hydrodynamique va modifier le champ électromagnétique.
- Par ailleurs la force de Laplace :  $\mathbf{dF} = \mathbf{j}_{induit} \times \mathbf{B}_0$  va agir sur le fluide pour s'opposer au mouvement initial. On voit ici comment les champs électromagnétiques vont modifier l'hydrodynamique.

Par la suite nous allons écrire les équation de la magnétohydrodynamique à partir des équations du fluide et de Maxwell. Puis nous allons les adimensionner afin de délimiter les domaines d'application des approximations de la *MHD* idéale et de la *MHD* résistive.

### 3.1 L'équation d'induction

La magnétohydrodynamique est l'évolution couplée du champ magnétique et du champ de vitesse, il faut donc deux équations (une par champ) chacune possédant un terme de couplage avec l'autre champ.

L'équation d'induction régit l'évolution dynamique du champ magnétique. On utilise la loi d'Ohm, et les équations de maxwell pour l'obtenir :

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{rot}\mathbf{B}\right) = \sigma\mathbf{rot}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{grad}(\mathbf{div}\mathbf{B}) - \Delta\mathbf{B}) = \sigma\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0\sigma}\Delta\mathbf{B}. \quad (3.4)$$

Cette dernière équation est l'équation d'induction compressible. Elle détermine le transport du champ magnétique par l'écoulement.

Si on se place dans la limite où l'écoulement est incompressible ( $\mathbf{div}\mathbf{v} = 0$ ) et en utilisant l'identité  $\mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B}.\mathbf{grad})\mathbf{v} - (\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{B} + \mathbf{v}(\mathbf{div}\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{div}\mathbf{v})$  on obtient alors :

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{B} = (\mathbf{B}.\mathbf{grad})\mathbf{v} + \eta\Delta\mathbf{B}. \quad (3.5)$$

Dans cette équation le terme  $(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{B}$  correspond au transport par convection du champ magnétique, le terme  $(\mathbf{B}.\mathbf{grad})\mathbf{v}$  à l'étirement du champ de vitesse par le champ  $\mathbf{B}$  et  $\eta\Delta\mathbf{B}$  au terme de transport par diffusion du champ magnétique où  $\eta = 1/(\mu_0\sigma)$  est la diffusibilité magnétique.

Pour comprendre le transport d'un champ par l'autre, on peut prendre l'exemple d'un vecteur passif  $d\mathbf{l}$  dans un écoulement  $\mathbf{u}$ . La dérivée temporelle de ce vecteur s'écrit alors :

$$\frac{d\mathbf{dl}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} + d\mathbf{l})}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.6)$$

$$\frac{d\mathbf{dl}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (3.7)$$

$$\frac{d\mathbf{dl}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (d\mathbf{l}.\mathbf{grad})\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

$$\frac{d\mathbf{dl}}{dt} = (d\mathbf{l}.\mathbf{grad})\mathbf{u}. \quad (3.9)$$

Ce qui correspond bien à la forme des termes d'advection dans l'équation d'induction.

Il faut noter que l'approximation d'incompressibilité (nombre de Mach petit,  $Ma = v/c_{son} \ll 1$ ) de l'écoulement est assez rigoureuse. En effet dans les métaux liquides les vitesses sont très petites devant les vitesses typiques du son (pour le sodium liquide  $c_{son} = 2500\text{m.s}^{-1}$  [14]) et les fluctuations de densité dans le vent solaire sont estimées à 5% ce qui confirme que l'approximation est assez bonne pour ces objets-là.

## 3.2 L'équation de Navier-Stokes

Maintenant nous avons à déterminer l'évolution du champ de vitesse. Nous reprenons l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}\right) = -\mathbf{grad}p + \tilde{\nu}\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}_{vol} \quad (3.10)$$

dans laquelle  $\rho$  est la masse volumique,  $p$  le champ de pression,  $\tilde{\nu}$  la viscosité dynamique (à ne pas confondre avec la viscosité cinématique  $\nu = \tilde{\nu}/\rho$ ) et  $\mathbf{f}_{vol}$  une force volumique extérieure. Classiquement cette force volumique peut être la gravité, la force de Coriolis,...

Bien entendu en *MHD* la force volumique est la force de Lorentz telle que :

$$\mathbf{f}_{vol} = \rho_{en}\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.11)$$

où  $\rho_{en}$  correspond à la densité des charges qui diffèrent de l'électro-neutralité. En utilisant Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère et en évaluant le champ électrique grâce à la loi d'Ohm idéale ( $E \sim vB$ , valable quand la conductivité électrique  $\sigma$  est très grande), on peut évaluer le rapport entre les deux termes de la force.

$$\frac{\rho_{en}E}{jB} \sim \frac{v^2}{c^2} \quad (3.12)$$

La force de Coulomb est donc négligeable pour des vitesses négligeables devant la vitesse de la lumière. Dans le cadre de la *MHD* non relativiste la force de Lorentz n'interagit avec l'écoulement qu'à travers sa partie magnétique.

L'équation de Navier-Stokes prend donc la forme :

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}\right) = -\mathbf{grad}p + \tilde{\nu}\Delta\mathbf{v} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3.13)$$

On reprend la force de Lorentz :

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{grad}B^2 + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{B}, \quad (3.15)$$

qu'on injecte alors dans l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}\right) = -\mathbf{grad}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{B} + \tilde{\nu}\Delta\mathbf{v}. \quad (3.16)$$

Les termes magnétiques composent le tenseur des contraintes Maxwell et interviennent sous deux formes différentes. Un terme de pression magnétique  $-\mathbf{grad}B^2/\mu_0$  qui s'ajoute à la pression hydrodynamique et un terme qui s'interprète comme une tension magnétique  $1/\mu_0(\mathbf{B}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{B}$  comme nous le verrons dans le cadre des ondes d'Alfvén.

### 3.3 Aspects énergétiques

La puissance électromagnétique fournie aux charges contenu dans un volume  $dV$  de densité de charge volumique  $\rho_e$  par la force de Lorentz s'écrit :

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F}_{Lorentz} \cdot \mathbf{v} \quad (3.17)$$

$$= \rho_e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (3.18)$$

$$= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \quad (3.20)$$

$$(3.21)$$

En utilisant que :  $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{B}$ , on peut écrire que :

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \text{rot} \mathbf{E} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{\mu_0} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (3.23)$$

Enfin en utilisant la loi d'Ohm 2.50 et une identité vectorielle on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{\mu_0} = -\frac{j^2}{\sigma} - (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (3.24)$$

où le terme de gauche correspond à l'énergie magnétique convertie ou transporté par les termes de droites. Le premier terme correspond à la conversion en chaleur (effet Joules), le second à la conversion en énergie mécanique, le dernier correspond au rayonnement électromagnétique et se nomme le vecteur de Poynting.

A partir des résultats de l'hydrodynamique on peut écrire alors l'énergie du système comme la somme des énergies magnétiques et cinétiques tel que :

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\mathbf{v}^2}{2}. \quad (3.25)$$

Nous verrons par la suite que des échanges d'énergie entre le magnétique et l'hydrodynamique entraîne la manifestation d'évènements extrêmement violents dans la couronne solaire (éjection coronale).

### 3.4 L'adimensionnement

Nous avons défini les équations pertinentes de la *MHD* dans les sections précédentes, cependant dans leur état actuel ces équations sont très difficiles à résoudre analytiquement.

Afin de pouvoir les utiliser dans les problèmes particuliers que nous allons rencontrer par la suite, la première étape est de les adimensionner.

L'adimensionnement consiste à réécrire l'équation sans unité et uniquement grâce à des paramètres adimensionnés. On peut écrire alors les équations dans ce jeu de paramètres afin de les simplifier pour les résoudre. La détermination des nombres sans dimension permet alors :

- de simplifier les équations en négligeant les termes infinitésimaux
- d'écrire les solutions valables quelles que soient les données du problème.

## Méthode

Le plus simple pour adimensionner est d'écrire directement les variables et les opérateurs adimensionnés en fonction des grandeurs caractéristiques du système, puis de les introduire dans l'équation et de faire apparaître des nombres sans dimension.

Déroulons un exemple sur l'équation de Navier-Stokes.

1. Écrire les variables adimensionnées :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\equiv \mathbf{v}'V_0, \\ t &\equiv L/V_0t', \\ \mathbf{B} &= B_0\mathbf{B}', \\ p &\equiv p_0p' \equiv \rho_0V_0^2p', \\ \mathbf{j} &\equiv \sigma V_0B_0\mathbf{j}' \\ \mathbf{grad} &\equiv 1/L\mathbf{grad}', \end{aligned}$$

2. On injecte dans l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{grad}')\mathbf{v}' = -\mathbf{grad}'p' + N(\mathbf{j}' \times \mathbf{B}') + \frac{1}{Re}\Delta'\mathbf{v}'. \quad (3.26)$$

3. On fait donc apparaître 2 nombres sans dimensions, le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho LV_0}{\tilde{\nu}} \equiv \frac{\text{qtité de mvt}}{\text{diff. visqueuse}}, \quad (3.27)$$

le nombre de Stuart :

$$N = \frac{\sigma LB_0}{\rho V_0^2} \equiv \frac{\text{force Lorentz}}{\text{qtité de mvt}}, \quad (3.28)$$

qui comparent les termes de l'équation entre eux.

En suivant le même raisonnement on peut écrire l'équation d'induction adimensionnée :

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{grad}')\mathbf{B}' = (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{grad}')\mathbf{v}' + \frac{1}{Rm}\Delta\mathbf{B}. \quad (3.29)$$



pour lequel on définit le nombre de Reynolds magnétique tel que :

$$Rm = \frac{LV_0}{\eta} \equiv \frac{\text{qtité de mvt}}{\text{diff. magnétique}}. \quad (3.30)$$

Selon le poids de chacun des nombres sans dimension, on conclura sur les approximations/négligences que l'on pourra réaliser. On notera que le théorème de Vaschy-Buckingham confirme l'existence de trois nombre sans dimension pour décrire le système.

### 3.5 *MHD* idéale/ *MHD* résistive

Le nombre de Reynolds magnétique est le nombre clef de la *MHD* car il sépare deux grands domaines de celle-ci la *MHD* idéale ( $Rm \gg 1$ ) et la *MHD* résistive ( $Rm < \sim 1$ ).

Si on retourne à l'équation d'induction, si la conductivité est infinie alors on a l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

qui est une équation de transport du champ magnétique par l'écoulement dont le temps caractéristique est :  $\tau = L/v$ .

En revanche si le milieu est sensiblement au repos ( $\mathbf{v} \approx 0$ ) alors on a l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{B}$$

qui est une équation de diffusion du champ magnétique avec comme temps caractéristique  $\tau_d = L^2/\eta$ .

Le nombre de Reynolds magnétique est donc le rapport entre ces deux temps caractéristiques :

$$Rm = \frac{\tau_d}{\tau}. \quad (3.31)$$

#### 3.5.1 *MHD* idéale

L'approximation de la *MHD* idéale est très souvent utilisée pour le domaine de l'astrophysique non pas parce que la conductivité du plasma est grande mais parce que les longueurs et les vitesses caractéristiques sont gigantesques ( $L, v \gg 1$ ). Par exemple dans la couche externe du soleil on a [4] :

$$L \approx 10^6 \text{ m} \quad (3.32)$$

$$v \approx 10^3 \text{ ms}^{-1} \quad (3.33)$$

$$\sigma \approx 10^3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (3.34)$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \quad (3.35)$$

Cela donne une diffusibilité magnétique assez grande :

$$\eta = \frac{1}{\sigma\mu_0} \approx 10^3 \quad (3.36)$$

néanmoins le Reynolds magnétique est :

$$Rm \approx 10^6 \gg 1. \quad (3.37)$$

La *MHD* idéale s'applique donc bien malgré la faible conductivité électrique des plasmas astrophysiques (pour fixer les idées en comparaison la conductivité électrique d'un métal liquide est  $\sigma \approx 10^6 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ ).

En prenant l'approche par temps caractéristiques, on en conclut que le temps de diffusion du champ magnétique est toujours très long devant le temps de convection en *MHD* idéale. Dès lors en astrophysique, le champ magnétique est uniquement transporté par l'écoulement : on dit que les lignes de champ magnétique sont *gelées* (voir dans la suite le théorème d'Alfvén). La diffusion ne devient pertinente que sur des échelles de l'ordre du mètre sur lesquelles se produit le phénomène de reconnexion magnétique que nous verrons plus tard.

### 3.5.2 *MHD* résistive

En laboratoire ou dans l'industrie les valeurs du Reynolds magnétique atteignables sont généralement beaucoup plus faibles qu'en astrophysique notamment parce les échelles de vitesse et de longueur sont petites. Par exemple dans le circuit primaire d'un réacteur nucléaire de 4ème génération :

$$L \approx 10 \text{m} \quad (3.38)$$

$$v \approx 10 \text{ms}^{-1} \quad (3.39)$$

$$\sigma \approx 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1} \quad (3.40)$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{N A}^{-2} \quad (3.41)$$

Cela donne une diffusibilité magnétique assez petite :

$$\eta = \frac{1}{\sigma\mu_0} \approx 10 \quad (3.42)$$

néanmoins le Reynolds magnétique est :

$$Rm \approx 1. \quad (3.43)$$

L'écoulement est donc régi par la *MHD* résistive, on ne peut pas négliger le terme de diffusion pour ces phénomènes (illustration en PC2).

Dans le tableau suivant vous trouverez quelques ordres de grandeur de *Rm* pour différents systèmes :

Industrie	$Rm$
Générateur <i>MHD</i> -gaz	$10^{-3}$
Décharge diffuse	$10^{-3}$
arcjet	$10^{-1}$
métal liquide (mercure)	$1 - 10$
Propulseur plasma <i>MHD</i>	3
Réaction thermonucléaire ITER	$10^2$
Astrophysique	$Rm$
Noyau terrestre	$10^3$
Ionosphère	$10^3$
Atmosphère solaire	$10^8$
Couronne solaire	$10^{15}$
Espace interplanétaire	$10^{15}$
Espace interstellaire	$10^{21}$

TABLE 3.1: Ordres de grandeurs de différents phénomènes *MHD*, industriels et astrophysique. On remarque que la *MHD* idéale est extrêmement difficile à réaliser en laboratoire.

### 3.6 Analogie avec la thermique : le Prandtl

Le nombre de Prandtl est un nombre sans dimension caractéristique du fluide pour une température donnée. Il compare la diffusion visqueuse et la diffusion thermique.

$$Pr \equiv \frac{\text{temps diff. thermique}}{\text{temps diff. visqueuse}} \quad (3.44)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (3.45)$$

En regardant la signification de  $Pr$  on comprend que si :

- $Pr \gg 1$  (huile moteur), alors la diffusion thermique est très lente devant la diffusion visqueuse, le profil de température est donc fortement influencé par le profil de vitesse.
- $Pr \ll 1$  (mercure), alors la diffusion thermique est très rapide devant la diffusion visqueuse, le profil de vitesse n'influence pas le profil de température.

Pour les métaux liquides  $Pr \ll 1$  on ne peut pas utiliser de fil chaud pour faire les mesures de température car les échanges thermiques entre le fil et le fluide ne sont pas pilotés par la vitesse de l'écoulement. La mesure de la chaleur perdue par le fil n'est donc pas pertinente.

Si on reproduit le raisonnement précédent à la *MHD* on définit alors nombre de Prandtl magnétique :

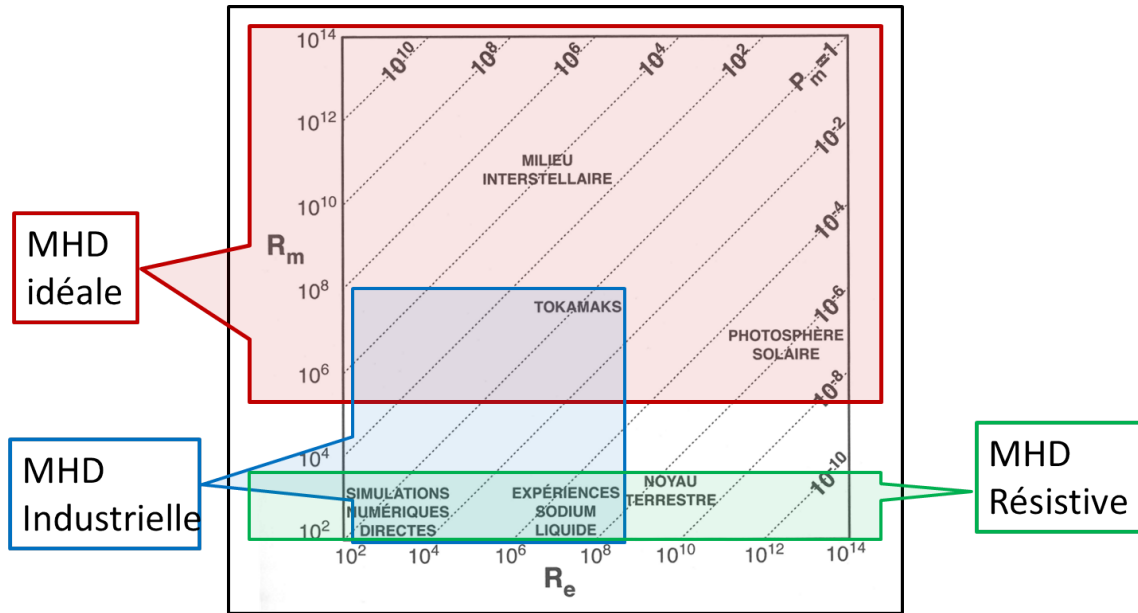


FIGURE 3.1: Domaine de validité des approximations *MHD* dans le plan  $(R_e, R_m)$  (d'après [4]). On notera que les deux nombres sans dimension ne sont pas indépendants, en effet ils sont reliés par l'intermédiaire du nombre de Prandtl magnétique.

$$Prm \equiv \frac{\text{temps diff. magnétique}}{\text{temps diff. visqueuse}} \quad (3.46)$$

$$Prm = \frac{\nu}{\eta} \quad (3.47)$$

En regardant la signification de  $Prm$  on comprend que si :

- $Prm \gg 1$  (plasma interstellaire), alors la diffusion magnétique est très lente devant la diffusion visqueuse, le profil du champ magnétique est donc fortement influencé par le profil de vitesse. On se place alors dans le cadre de la *MHD* idéale pour laquelle on peut utiliser le théorème du gel.
- $Prm \ll 1$  (métaux liquides), alors la diffusion magnétique est très rapide devant la diffusion visqueuse, le profil de vitesse n'influence pas le profil du champ magnétique. On se place alors dans le cadre de la *MHD* résistive.

# Chapitre 4

## Du plasma et de l'approximation fluide

L'état plasma est décrit comme le 4ème état de la matière. C'est une forme extrêmement abondante de l'univers - 99.9% de la matière visible principalement dans les étoiles - qui consiste en un gaz ionisé. On peut le voir comme une soupe d'électrons libre dans laquelle baignent des ions.

Le plasma se forme à partir d'un gaz neutre (isolant) qui, soumis à un fort champ électrique ou à des températures suffisantes, s'ionise. Lorsque le taux d'ionisation est suffisamment important pour que le nombre d'électrons libres par unité de volume soit comparable à celui des molécules neutres, le gaz devient alors un fluide conducteur qu'on appelle *plasma*. L'objectif de ce chapitre est d'introduire les caractéristiques physiques des plasmas modifiées par les effets hydrodynamiques et magnétiques des phénomènes *MHD*.

On peut faire un rapide calcul d'ordre de grandeur de la température. Si on suppose que l'énergie thermique doit être du même ordre de grandeur que l'énergie de ionisation on a donc :

$$k_B T \sim 1eV \tag{4.1}$$

$$T \sim 10^4 K \tag{4.2}$$

où  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$  et  $1eV = 1.6 \cdot 10^{19} \text{ J}$ . Le champ électrique pour ioniser un gaz neutre est appelé champ disruptif ou rigidité électrique et dépend de la pression du gaz (loi de Paschen). Celui-ci est de l'ordre de 30 kV/cm pour l'air sec et 10 kV/cm pour l'air humide.

Les deux populations distinctes de particules dans le plasma ainsi que ses conditions nécessaires pour qu'il atteigne l'équilibre fait que les propriétés pour appliquer l'approximation fluide pour un plasma sont particulières. C'est que nous allons décrire dans la suite.

## 4.1 Le plasma : des particules au fluide

### 4.1.1 Degré d'ionisation

Par construction un plasma contient le même nombre d'électrons  $n_e$  que de la charge des ions  $n_i$  (un ion peut être ionisé plusieurs fois).

On appelle degré de ionisation  $\beta = n_e/(n_n - n_e)$  où  $n_n$  est la population des espèces neutres.

Si  $10^{-10} < \beta < 10^{-4}$  : le plasma est faiblement ionisé (plasma industriel).

Si  $10^{-4} < \beta$  : le plasma est fortement ionisé (vent solaire, réaction thermonucléaire).

### 4.1.2 Stabilité et équilibre thermodynamique

La force coulombienne tend à faire se recombiner les électrons et les ions pour revenir à un état neutre. Donc, si la cause qui a créé l'état plasma s'arrête, le gaz redeviendra neutre (air après un éclair), si la cause persiste, la recombinaison des particules due à la force coulombienne peut être compensée par l'ionisation (issue de l'énergie thermique le plus souvent). On atteint alors l'équilibre thermodynamique. Dans cet état, le plasma peut être décrit par une distribution indépendante du temps et de l'espace i.e. la nature du "fluide équivalent" au plasma ne dépend pas de  $\mathbf{r}$  ni de  $t$ . On définit par  $\tau_{eq}$  le temps caractéristique du plasma pour atteindre l'état d'équilibre thermodynamique.

### 4.1.3 Plasma collisionnel

Selon les conditions thermodynamiques (température, densité,...), il existe deux types de plasma : les collisionnels et les non-collisionnels.

Les plasmas non-collisionnels sont peu denses ou avec si peu d'agitation que les particules échangent peu d'informations (pas de chocs). Dès lors l'équilibre thermique sera très long à atteindre et chacune des particules aura une vitesse propre dépendante de son histoire, sans que l'on puisse définir une vitesse moyenne pertinente. Ce type de plasma est décrit par des approches multi-fluides assez complexes qui n'entrent pas dans le cadre de ce cours.

Les plasmas collisionnels sont généralement suffisamment denses et ou agités thermiquement pour que les particules échangent souvent de l'information par des chocs. On peut définir un temps entre collisions :

$$\tau_{ie} = \frac{1}{f_{ie}} \quad (4.3)$$

De plus, la vitesse de chacune des particules est assez proche d'une valeur moyenne et l'équilibre thermique est atteint rapidement ( $\tau_{eq}$  et  $\tau_{ie}$  sont liés). On peut alors les traiter par une approche mono-fluide. Par la suite nous allons uniquement traiter ce type de plasma.

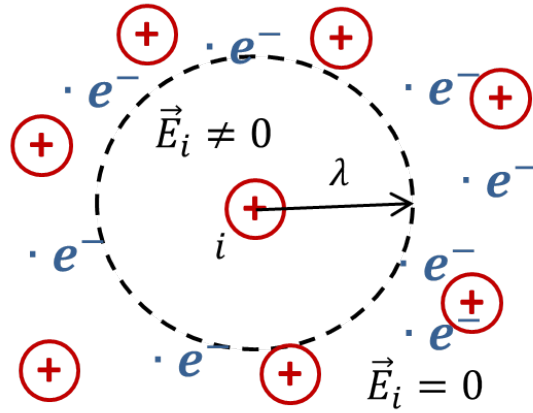


FIGURE 4.1: Schéma de la sphère de Debye

#### 4.1.4 Pulsation Plasma

Le plasma est globalement neutre, mais si un écart à la neutralité apparaît localement celui-ci va s'accompagner d'un champ électrique qui va s'appliquer à toutes les charges aux alentours. Les électrons - les particules chargées qui possèdent le moins d'inertie - vont alors subir une force de rappel coulombienne qui va les pousser à compenser ce défaut de neutralité.

Ce mouvement des électrons pour rétablir la neutralité fait alors apparaître des oscillations de charge dans le plasma à la pulsation :

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e \varepsilon_0} \quad (4.4)$$

où  $e$  et  $m_e$  sont respectivement la charge et la masse d'un électron,  $n_0$  la densité de population d'ions. Dès lors,  $\omega_p$  correspond à la pulsation à laquelle répondent les électrons d'un plasma lors d'une excitation électromagnétique. Si la fréquence d'excitation est inférieure à  $2\pi\omega_p$  alors les électrons ont le temps de s'adapter et neutralisent le champ. Cela entraîne une réflexion totale des ondes électromagnétiques par le plasma ce qui explique la portée différente entre les ondes radio à modulation de fréquence (qui traverse l'ionosphère terrestre) et d'amplitude (qui y sont réfléchies).

#### 4.1.5 Longueur de Debye

La longueur de Debye correspond au rayon de la sphère centrée sur une particule à l'intérieur de laquelle un observateur va ressentir le champ électrique émanant de cette particule.

$$\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T}{n_i q_i} \quad (4.5)$$

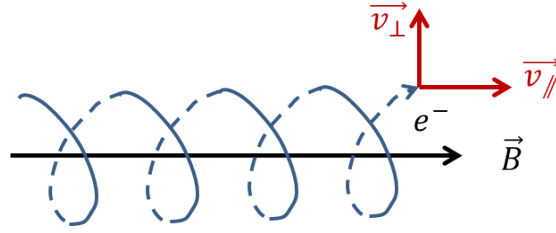


FIGURE 4.2: Schéma du rayon cyclotronique autour d'une ligne de champ magnétique.

où  $n_i$  et  $q_i$  sont respectivement la densité de population et la charge de la particule  $i$  dont on calcule la sphère de Debye (voir figure 4.1).

Au delà de cette sphère le champ des autres particules va écranter ce champ qui sera négligeable au delà de la longueur de Debye. Pour des tailles caractéristiques supérieures à  $\lambda_D$  il n'y aura donc pas d'effets locaux dans le plasma.

#### 4.1.6 Effet cyclotronique

Comme nous l'avons dans le premier chapitre la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas. En revanche celle-ci entraîne la déviation de la trajectoire des particules chargées.

Soit une particule chargée dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , on définit la composante de la vitesse parallèle à la ligne de champ magnétique  $\mathbf{v}_{\parallel}$  et celle perpendiculaire  $\mathbf{v}_{\perp}$ , alors la force de Lorentz qui s'applique à la particule s'écrit :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}. \quad (4.6)$$

Cette force n'influence que  $\mathbf{v}_{\perp}$  la composante perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{v}_{\parallel}$  reste donc inchangée. La trajectoire de la particule respecte un équilibre entre la force centrifuge ( $m\mathbf{v}_{\perp}^2/r$  et la force de Lorentz, on peut alors démontrer que la particule décrit une trajectoire hélicoïdale orientée selon l'axe de  $\mathbf{B}$  et de pulsation :

$$\omega_c = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{qB}{m} \quad (4.7)$$

dont le rayon cyclotronique (rayon de Larmor) est :

$$r_c = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}. \quad (4.8)$$

Pour conserver la validité de l'approximation fluide pour le plasma on devra considérer des tailles grandes devant le rayon cyclotronique.

#### 4.1.7 L'approximation fluide

Il y a d'autres quantités caractéristiques du plasma que nous n'avons pas mentionnées ici (paramètre plasma, écrantage magnétique,...), mais l'idée n'est pas de faire une



Plasma Type	densité	Temp.	Pulsation plasma	Longueur de Debye	Fréquence collisions	
	$n \text{ cm}^{-3}$	$T \text{ eV}$	$\omega_{pe} \text{ sec}^{-1}$	$\lambda_D \text{ cm}$	$n\lambda_D^3$	$\nu_{ei} \text{ sec}^{-1}$
Interstellar gas	1	1	$6 \times 10^4$	$7 \times 10^2$	$4 \times 10^8$	$7 \times 10^{-5}$
Gaseous nebula	$10^3$	1	$2 \times 10^6$	20	$8 \times 10^6$	$6 \times 10^{-2}$
Solar Corona	$10^9$	$10^2$	$2 \times 10^9$	$2 \times 10^{-1}$	$8 \times 10^6$	60
Diffuse hot plasma	$10^{12}$	$10^2$	$6 \times 10^{10}$	$7 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^5$	40
Solar atmosphere, gas discharge	$10^{14}$	1	$6 \times 10^{11}$	$7 \times 10^{-5}$	40	$2 \times 10^9$
Warm plasma	$10^{14}$	10	$6 \times 10^{11}$	$2 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^2$	$10^7$
Hot plasma	$10^{14}$	$10^2$	$6 \times 10^{11}$	$7 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^4$	$4 \times 10^6$
Thermonuclear plasma	$10^{15}$	$10^4$	$2 \times 10^{12}$	$2 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^6$	$5 \times 10^4$
Theta pinch	$10^{16}$	$10^2$	$6 \times 10^{12}$	$7 \times 10^{-5}$	$4 \times 10^3$	$3 \times 10^8$
Dense hot plasma	$10^{18}$	$10^2$	$6 \times 10^{13}$	$7 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^2$	$2 \times 10^{10}$
Laser Plasma	$10^{20}$	$10^2$	$6 \times 10^{14}$	$7 \times 10^{-7}$	40	$2 \times 10^{12}$

FIGURE 4.3: Tableau récapitulatif de quelques longueurs et temps caractéristiques selon l'origine des plasmas. (source NRL Plasma Formula)

liste exhaustive mais de cibler les quantités importantes pour connaître le domaine de validité de l'approximation fluide du plasma.

**L'approche fluide consiste à modéliser le plasma par un milieu continu.**

Il faut donc observer le plasma à des échelles temporelles et spatiales grandes devant celles du comportement particulaire afin de ne considérer que les phénomènes collectifs.

Donc si on définit les temps et les longueurs fluides tels que :

$$\mathcal{L} \equiv \text{grad}^{-1} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{T} \equiv \frac{\partial^{-1}}{\partial t} \quad (4.10)$$

Pour considérer le plasma comme un fluide il faut donc que :

$$\mathcal{L} \gg \max(r_c, \lambda_D) \quad (4.11)$$

$$\mathcal{T} \gg \max(\omega_p^{-1}, \omega_c^{-1}, \tau_{ie}, \tau_{eq}) \quad (4.12)$$

Outre le domaine de validité des longueurs caractéristiques minimales à considérer dans les équations, il faut noter que

- le plasma doit être à l'équilibre thermodynamique  $\rightarrow$  pertinence d'une vitesse moyenne dans un élément de volume infinitésimal.
- Le mouvement des électrons et des ions doit être indifférencié  $\rightarrow$  il faut donc que tous les porteurs de charge aient la même inertie, ce qui implique qu'il n'y a pas d'effet Hall et qui permet l'approximation mono-fluide.

# Chapitre 5

## La *MHD* idéale

On se place dans cette partie dans le cadre de la *MHD* idéale qui concerne les phénomènes pour lesquels le Reynolds magnétique sera grand  $Rm \gg 1$ . Ce domaine couvre la plupart des plasmas astrophysiques (milieu interstellaire, photosphère solaire, aurore boréale), mais aussi les plasmas des tokamaks comme ceux d'ITER (cf 3.1).

Cette approximation est valide pour l'astrophysique car les longueurs caractéristiques sont très grandes. On pourra néanmoins utiliser sans perdre en généralité que la diffusibilité magnétique est nulle en *MHD* idéale ( $\eta = 0$ ). On négligera donc la diffusion du champ magnétique dans la suite de ce chapitre.

Les équations adimensionnées de la *MHD* idéale incompressible sont :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + N(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}. \quad (5.4)$$

dans lesquelles on a enlevé les "" des quantités adimensionnées.

Il faut noter que souvent l'idéalité peut être intrinsèque au fluide considéré. En effet le nombre de Prandtl magnétique relie le nombre de Reynolds et le nombre de Reynolds magnétique ( $Prm = Rm/Re$ ), ce qui fait que lorsque  $Prm \gg 1$  un écoulement à faible Reynolds peut néanmoins suivre l'approximation de la *MHD* idéale.

### 5.1 Le théorème d'Alfvén

#### 5.1.1 Démonstration

Ce théorème est à la base de nombreux résultats en *MHD* idéale.

Pour démontrer ce théorème, on considère une surface  $\mathbf{S}$  définie par le contour fermé  $\mathcal{C}$  et advectée par l'écoulement à la vitesse  $\mathbf{u}$ . Si on considère le flux  $\Phi$  de champ ma-

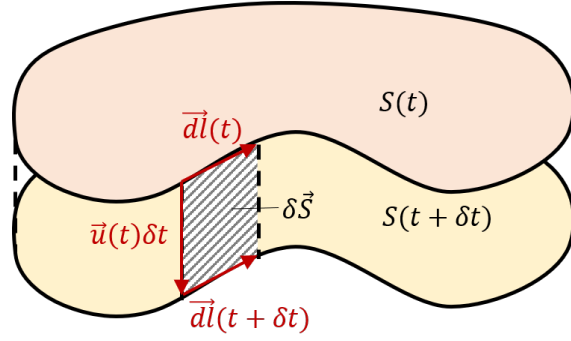


FIGURE 5.1: Schéma de la déformation de la surface  $\mathbf{S}$  définie par le contour fermé  $\mathcal{C}$ . La variation locale de la surface est  $\delta\mathbf{S} = \mathbf{u}\delta t \times \mathbf{dl}$

gnétique à travers cette surface, la variation temporelle de ce flux a deux contributions distinctes. D'un coté la variation intrinsèque du champ due à sa dépendance vis à vis du temps. De l'autre la contribution due au déplacement et à la déformation de la surface qui explore des régions où le champ varie spatialement.

Un élément de la variation de la surface défini par  $\mathbf{dl}$  s'écrit :

$$\delta\mathbf{S} = \mathbf{u}\delta t \times \mathbf{dl} \quad (5.5)$$

$$\frac{\delta\mathbf{S}}{\delta t} = \mathbf{u} \times \mathbf{dl} \quad (5.6)$$

où  $\delta t$  est la durée du déplacement élémentaire. Si on considère un champ  $\mathbf{B}$  indépendant du temps, la variation élémentaire de flux est uniquement due au mouvement de la surface et s'écrit en intégrant  $\delta\mathbf{S}$  sur le contour fermé  $\mathcal{C}$  :

$$\frac{\delta}{\delta t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \iint_S \mathbf{B} \cdot \frac{\delta\mathbf{S}}{\delta t} \quad (5.7)$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{dl}) \quad (5.8)$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \int_C (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{dl} \quad (5.9)$$

Si on calcule la variation temporelle du flux du champ magnétique à travers  $\mathbf{S}$ , en prenant les deux contributions on a :

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{dS} + \iint_S \mathbf{B} \cdot \frac{\delta\mathbf{S}}{\delta t} \quad (5.10)$$

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{dS} + \int_C (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{dl} \quad (5.11)$$

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \iint_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \right) \cdot \mathbf{dS} \quad (5.12)$$

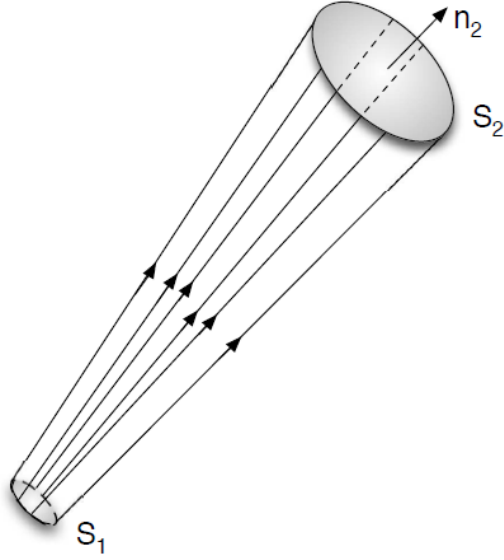


FIGURE 5.2: Schéma de la conservation du flux du champ magnétique dans un tube de flux délimité par les surface  $S_1$  et  $S_2$  (source : S. Galtier, Magnétohydrodynamique, vuibert) .

en utilisant le théorème du rotationnel.

On peut conclure, en utilisant l'équation d'induction (la version  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ ), que le flux de champ magnétique à travers une surface fermée et entraînée par le fluide est constant.

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (5.13)$$

On appelle ce résultat le théorème d'Alfvén ou le théorème du "gel".

L'importance de ce théorème se révèle en deux temps.

- On définit un tube magnétique (figure 5.2), i.e. un tube défini à partir du champ  $\mathbf{B}$  tel que sa surface latérale parallèle aux lignes de champ et les surfaces  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  sont perpendiculaires. Grâce à l'équation de Maxwell-Thompson, on conclut directement que le flux de champ magnétique à travers  $\mathbf{S}_1$  est égal à celui à travers  $\mathbf{S}_2$ .
- Si on définit maintenant une surface infinitésimale  $d\mathbf{S}$ , entraînée par l'écoulement. Initialement cette surface entoure une ligne de champ magnétique, l'unique possibilité pour que le flux de champ magnétique à travers  $d\mathbf{S}$  soit une constante du temps, c'est que cette surface se déplace le long de cette ligne de champ magnétique, c'est à dire que la ligne de courant suit la ligne de champ magnétique.

**En *MHD* idéale, le théorème d'Alfvén implique que les lignes de courant et les lignes de champ magnétique sont gelées les unes aux autres.**

### 5.1.2 Lien avec le rayon de Larmor

Le théorème du gel est une conséquence directe du rayon cyclotronique défini dans le chapitre précédent, en effet si une particule fluide a une vitesse  $\mathbf{v}_\perp$  non nulle par rapport à la direction de la ligne de champ magnétique, la force de Lorentz va lui donner une trajectoire hélicoïdale qui la piègera le long de la ligne de champ. Comme dans l'approximation fluide on ne résout pas le rayon cyclotronique on n'observe que le gel entre les lignes de courant de l'écoulement et de champ magnétique.

### 5.1.3 Qui entraîne qui ?

Le théorème d'Alfvén démontre que les lignes de courant de l'écoulement et les lignes de champs magnétiques sont gelées entre elles, mais il n'explique pas lequel de ces champs "contrôlent" l'autre. Pour cela, il faut calculer les énergies respectives de chacun des champs et les comparer. Cela introduit donc un nombre sans dimension :

$$M_a^2 \equiv \frac{E_{cin}}{E_{mag}} \quad (5.14)$$

$$M_a^2 \equiv \frac{\rho v^2}{B^2/\varepsilon_0} = \frac{v^2}{V_A^2} \quad (5.15)$$

où  $V_A = B/\sqrt{\rho\varepsilon_0}$  est la vitesse d'Alfvén.

Donc pour les écoulements super-alfvéniqes c'est le fluide qui pilote la dynamique du champ magnétique, tandis que pour les écoulements sub-alfvéniqes c'est le champ magnétique qui pilote la dynamique.

## 5.2 Les ondes d'Alfvén

Dans un écoulement incompressible "classique", il ne peut pas se développer d'ondes de pression (ondes sonores) car celles-ci s'accompagnent de variation de la densité. Cependant avec l'intervention de la force de Lorentz dans N.S., on peut imaginer l'apparition d'ondes *MHD* qui utilisent les termes magnétiques comme force de rappel.

Reprenons l'équation de Navier-Stokes adimensionnée :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad}(p - N\mathbf{B}^2) - N(\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}. \quad (5.16)$$

Cette décomposition de la force de Lorentz - appelé le tenseur de Maxwell - fait intervenir un terme de pression magnétique  $\mathbf{grad}(B^2)$  et un terme plus difficile à interpréter  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B}$ . Pour comprendre ce terme écrivons son expression en coordonnées curvilignes pour lesquelles le champ magnétique s'écrit  $\mathbf{B} = B\mathbf{t}$ .

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} = B \frac{d}{ds} (B\mathbf{t}) \quad (5.17)$$

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} = B \frac{dB}{ds} \mathbf{t} + B^2 \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (5.18)$$

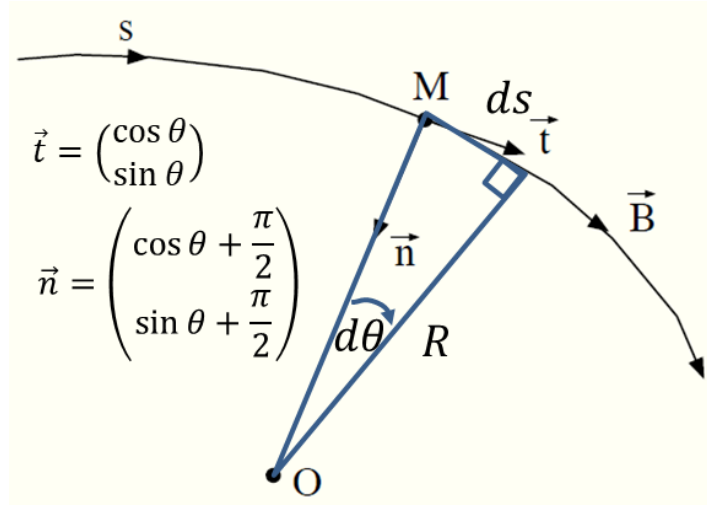


FIGURE 5.3: Ligne de champ magnétique en coordonnées curvilignes où  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, s$  sont respectivement la tangente, la normale et la coordonnée.

A partir de la figure 5.3 on peut rappeler les propriétés des coordonnées curvilignes :

$$ds = R d\theta, \quad (5.19)$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}, \quad (5.20)$$

et donc :

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R} \mathbf{n}. \quad (5.21)$$

En utilisant les propriétés précédentes dans l'équation 5.18 on peut écrire le terme magnétique tel que :

$$(\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} = \frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial s} \mathbf{t} + \frac{B^2}{R} \mathbf{n} \quad (5.22)$$

Ces termes peuvent alors se comprendre comme des termes de tension magnétique qui - à l'instar d'une tension élastique dans une corde - tendent à redresser la courbure des lignes de champ magnétique.

Dans la figure 5.4 on remarque qu'au repos la tension magnétique n'a pas d'effet. Si on perturbe les lignes de champ magnétique la courbure fait naître des termes de tension magnétique avec une résultante orientée vers l'intérieur (vers la position au repos). Ils agissent alors comme une force de rappel. Tout comme dans les cordes "classiques" ces contributions permettent alors la propagation d'ondes *MHD* le long de ces cordes magnétiques. Ces ondes, prédites théoriquement en 1942 et observées en 1959, sont nommées les ondes d'Alfvén. Nous traiterons de ces ondes de manière plus complète en exercice. Néanmoins, il faut noter que ces ondes se déplacent le long des lignes de champ magnétique alors que le mouvement de la perturbation magnétique et du fluide y est perpendiculaire. Ce sont donc des ondes transversales qui se propagent à la vitesse

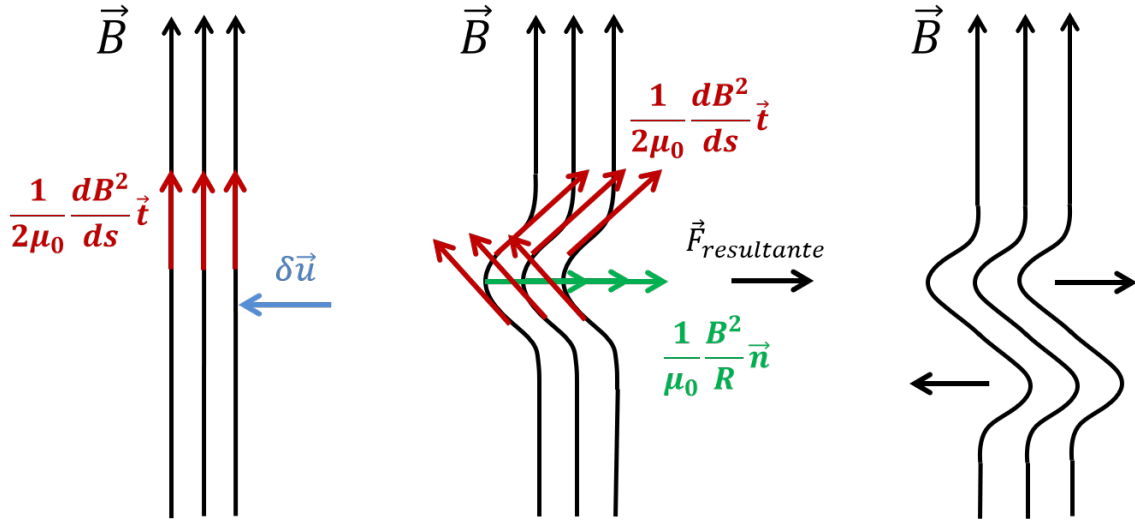


FIGURE 5.4: Réponse des lignes de champs magnétiques à une petite perturbation  $\delta u$  dans le cadre de la *MHD* idéale. On observe que les termes de tension magnétique entraîne une force de rappel qui cherche à réduire la courbure des lignes de champ. (source S. Galtier, magnétohydrodynamique, vuibert)

d'Alfvén  $V_A = B/\sqrt{\rho\varepsilon_0}$ . Elles sont présentes naturellement dans la couronne solaire où elles se propagent à des vitesses de  $10^4 \text{ km s}^{-1}$ .

Enfin on peut noter l'existence des ondes magnéto-sonores qui concerne la *MHD* compressible. Ces ondes s'obtiennent en rajoutant une équation sur la pression  $\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\gamma P}{\rho} \mathbf{grad}(\rho \mathbf{v})$  où  $\gamma$  intervient dans la vitesse du son  $c_s = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$ .

# Chapitre 6

## Application et limites de la *MHD* idéale : le confinement et la reconnexion magnétique

L'une des applications les plus importantes de la *MHD* concerne le confinement du plasma dans les réacteurs de recherche civil sur la fusion nucléaire (ex : ITER). Pour bien comprendre les enjeux du confinement nous allons tout d'abord faire un tour des principes de fonctionnement des réacteurs à fusion avant de nous focaliser sur les différents mécanismes de confinement magnétique.

### 6.1 Préliminaire : Principe des réacteurs à fusion

#### 6.1.1 La fusion

Le comportement des noyaux atomiques est gouverné par les 3 interactions fondamentales du modèle standard de la physique des particules : *l'interaction forte*, *l'interaction faible* et *l'interaction électromagnétique*. Chaque noyau atomique est composé d'un certain nombre de protons (chargés positivement) et de neutrons (neutres). A l'intérieur des noyaux l'interaction coulombienne tends à repousser les protons entre eux, tandis que l'interaction forte tend à conserver l'adhésion par l'intermédiaire de la force nucléaire. Les neutrons tendent donc à stabiliser l'édifice en contrecarrant les forces de répulsion électrostatiques croissantes entre les protons. Cependant un plus grand nombre de nucléons fait diminuer l'énergie par liaison dans le noyau, ce qui le rend moins stable.

Les noyaux instables peuvent se recombiner soit en se désintégrant en noyaux plus léger : c'est la fission nucléaire qui à l'oeuvre dans les réacteurs nucléaires actuels. Les noyaux peuvent aussi fusionner pour former des noyaux plus lourds : c'est la réaction de fusion qui opère au coeur des étoiles et qui le sujet de recherche du réacteur de recherche ITER.



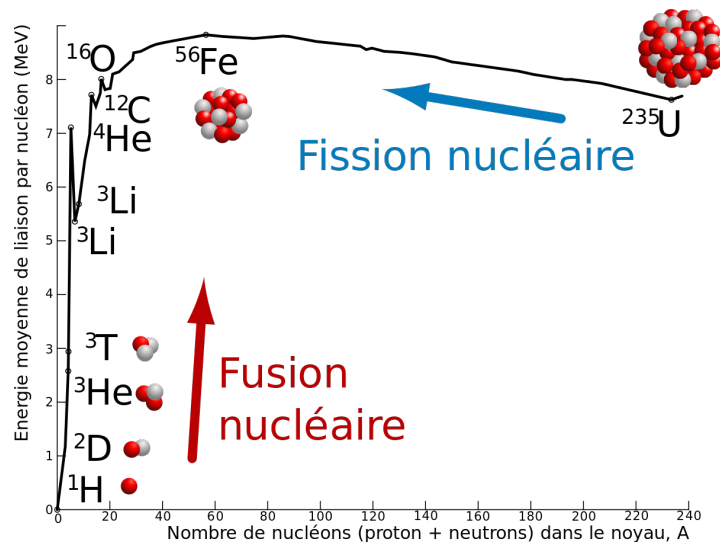
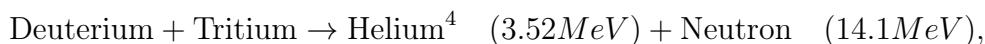


FIGURE 6.1: Courbe d'énergie des noyaux atomiques en fonction du nombre de nucléons.

La figure 6.1 montre que la réaction de fusion libère beaucoup plus d'énergie par réaction que la réaction de fission. La maîtrise de cette réaction fournirait une nouvelle source considérable d'énergie "propre", d'où l'enjeu sociétal que ce sujet a pris actuellement.

### 6.1.2 Dans ITER

Dans ITER la réaction mise en jeu est :



où  $1\text{MeV} = 10^6\text{eV} \approx 1.61 \cdot 10^{-13}\text{J}$ .

Pour donner un ordre de grandeur, en traduisant l'énergie cinétique de chacun des produits de la réaction en température, le noyau d'hélium est à une température de  $4.1 \cdot 10^{10}\text{K}$  et le neutron à  $2.04 \cdot 10^{11}\text{K}$ .

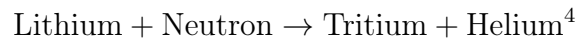
Dans un tel réacteur, l'excès d'énergie ( $17.62\text{MeV}$ ) générée sous forme d'agitation thermique, doit être transféré vers un circuit hydraulique qui entraîne une génératrice productrice d'électricité. Pour que la réaction de fusion s'opère il faut que les noyaux de deutérium et de tritium se rapprochent suffisamment pour entrer dans la zone d'influence de l'interaction forte. Les deux noyaux étant chargés positivement, il faut donc franchir une barrière d'énergie due à la répulsion coulombienne. Cette barrière est très haute et l'énergie cinétique du plasma est généralement inférieure. Cependant, grâce à l'effet tunnel, la probabilité que l'ion incident franchisse cette barrière est non nulle et croît avec l'énergie cinétique de celui-ci. Néanmoins pour que la probabilité de réaction soit suffisante, il faut produire un plasma avec une très grande énergie cinétique ( $T > 10^8\text{K}$ ) et avec une très grande densité.

Pour que le bilan de la réaction soit positif, il faut limiter les pertes thermiques vers l'extérieur, c'est pourquoi la solution de confinement magnétique a été privilégiée.

Le principe de fonctionnement d'ITER est donc :

- On chauffe dans une chambre à vide toroïdale quelques grammes (mélange de deutérium et de tritium) de plasma jusqu'à une température de  $150 \cdot 10^6$  K.
- Pour confiner ce plasma au centre de la chambre et donc limiter les pertes thermiques et l'endommagement de l'enceinte, on confine le plasma grâce à un champ lui aussi toroïdal.
- Comme nous sommes dans l'approximation de la *MHD* idéale, les particules fluides de plasma sont piégées sur les lignes de champ magnétique. Si les lignes de champ magnétique se resserrent i.e. que le champ s'intensifie, la densité du plasma augmente.
- Dans les conditions suffisantes, la réaction de fusion survient et libère alors un neutron qui, insensible au champ magnétique, ira alors frapper la couverture de la chambre à vide qui est composée de lithium (liquide ou solide).

La réaction :



peut alors alimenter en tritium le coeur du réacteur, tandis que la chaleur récupérée est transmise à un circuit hydraulique secondaire reliée à une génératrice de courant.

La *MHD* intervient dans deux des mécanismes du réacteur : dans le confinement ainsi que dans la couverture tritigène. Dans sa conception actuelle, celle-ci est composée d'un écoulement de lithium liquide, qui, soumis au champ magnétique intense des bobines électromagnétiques de confinement, peut faire apparaître des phénomènes purement *MHD*.

Par la suite, nous nous intéresserons aux différents mécanismes de confinement qui sont à l'origine des plus gros défis technologiques et scientifiques auxquels est confronté ITER de nos jours.

## 6.2 Le confinement magnétique

L'objectif d'ITER est de réussir à produire 500 MW de puissance thermique sur des temps de l'ordre de la dizaine de minutes. Pour cela, il faut arriver à chauffer le plasma à  $150 \cdot 10^6$  K et maintenir une densité du plasma de l'ordre de  $10^{-7}$  fois plus faible que la densité de l'air ambiant. Même cette densité est petite les températures mises en jeu sont telles que le confinement est une des problématiques principales de la fusion thermonucléaire.

En utilisant les propriétés de la *MHD* idéale on sait que :

- Si le plasma est piégé sur une ligne de champ magnétique, en resserrant ces lignes de champ le plasma peut être confiné.

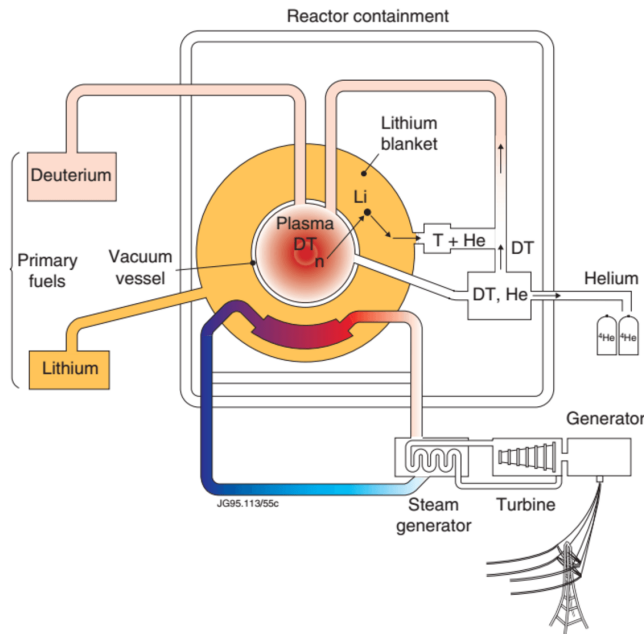


FIGURE 6.2: Schéma de principe d'ITER. La chambre à vide siège de la réaction de fusion contient le plasma. Les neutrons produits vont frapper la couverture de lithium qui réapprovisionne le plasma en tritium et qui transmet la chaleur à un circuit secondaire couplée à une génératrice.

- Cela permet de contenir les particules au centre pour limiter les pertes thermiques et que les particules chargées ne détériorent pas les parois du réacteurs.
- Si les scénarios de confinement du champ magnétique sont bien maîtrisés, malheureusement ces confinements sont instables.

Dans un premier temps nous détaillerons les équilibres pour différents confinements, puis nous étudierons la stabilité de ces équilibres (théorie linéaire des perturbations) dans le chapitre suivant.

### 6.2.1 L'effet miroir magnétique

Le premier mécanisme de confinement existe aussi dans la nature au niveau des pôles magnétique terrestre. A proximité de la terre, les particules chargées du vent solaire sont soumises au champ magnétique terrestre. A ces échelles l'approximation de la *MHD* idéale s'applique car  $Rm \gg 1$ , les particules de plasma se retrouvent piégées le long des lignes de champ à cause du théorème du gel issu du rayon cyclotronique.

Or à proximité des pôles le champ magnétique s'intensifie car les lignes de champs se resserrent. Les particules "rebondissent" alors au niveau de ces champs intenses et repartent dans le sens inverse.

Pour démontrer cet effet, on suppose que le moment magnétique et l'énergie totale d'une particule chargée piégée le long d'une ligne de champ sont constants.

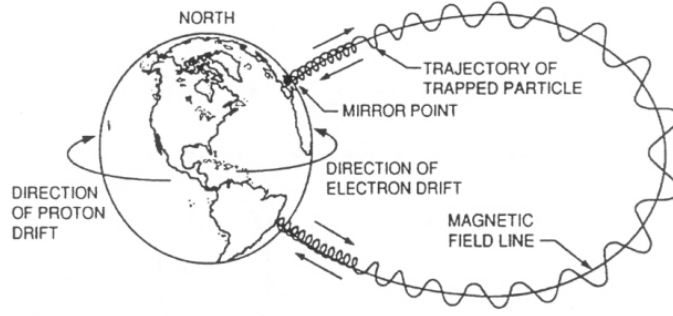


FIGURE 6.3: Schéma de principe de l'effet miroir qui a lieu au niveau des pôles magnétiques terrestre. Les particules chargées piégées sur une ligne de champ sont "réfléchies" au niveau des zones de champ fort.

- Le moment magnétique d'une particule chargée est défini par :

$$\mu = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{j} \quad (6.1)$$

Où  $\mathbf{r}$  est le rayon de courbure de la trajectoire de la particule, et  $\mathbf{j} = q\mathbf{v}_\perp$  la densité de courant associée à la particule, n. b.  $\mathbf{v}_\perp$  est la vitesse orthogonale à la ligne de champ.

Pour une particule en rotation hélicoïdale autour d'une ligne de champ magnétique :

$$\mu = \frac{1}{2} \mathbf{r}_c \times q\mathbf{v}_\perp, \quad (6.2)$$

puis en utilisant l'équation pour le rayon de Larmor  $r_c = \frac{mv_\perp}{qB}$  le moment magnétique devient :

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} \quad (6.3)$$

qui est une constante du mouvement si la dynamique est lente devant le temps cyclotronique  $\tau_c = 2\pi/\omega_c$  (invariant adiabatique).

La conservation du moment magnétique entraîne que si l'intensité du champ magnétique augmente alors la vitesse orthoradiale  $v_\perp$  augmente aussi.

- L'énergie cinétique d'une particule du plasma se conserve, donc

$$E_c = \frac{1}{2}v_\perp^2 + \frac{1}{2}v_\parallel^2 = cte \quad (6.4)$$

En remplaçant par l'expression de  $v_\perp$  issue du moment magnétique, on obtient :

$$E_c = \mu B + \frac{1}{2}v_\parallel^2 = cte. \quad (6.5)$$

Donc dans les régions de champ magnétique intense, la conservation de l'énergie implique que la vitesse longitudinale  $v_\parallel$  diminue jusqu'à possiblement atteindre une valeur nulle. La particule est alors "réfléchie". On dit que le plasma fuit les champ magnétique intense.

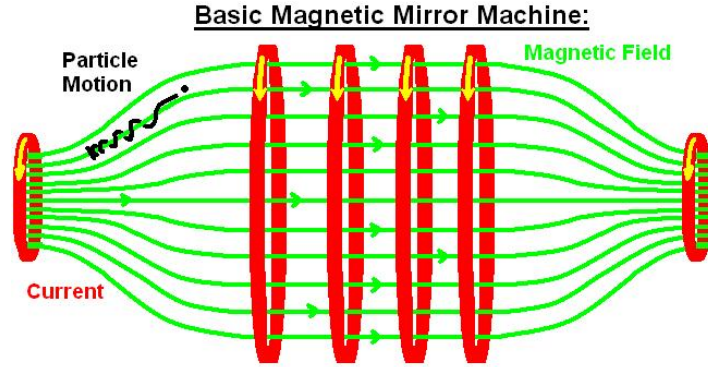


FIGURE 6.4: Schéma de principe du confinement magnétique de type bouteille. On resserre les lignes de champ magnétique à chaque extrémités ce qui entraîne une augmentation du champ et donc la réflexion des particules chargées.

Il faut noter cependant que la réflexion n'est pas totale et dépend de la valeur de  $B_{\text{et}}$  du rapport  $v_{\perp}/v_{\parallel}$  (voir PC).

Le miroir magnétique peut être utilisé dans le confinement de type bouteille décrit dans la figure 6.4. Il a été abandonné pour réaliser la fusion car, par construction, il permet de nombreuses pertes thermiques. Cependant, cet effet est présent au niveau des pôles magnétiques terrestre et entraîne le piégeage des particules de vent solaire qui font alors des aller-retours dans les ceintures de Van Allen.

## 6.2.2 L'état d'équilibre de confinement

Dans la suite, nous allons détailler l'équilibre de deux types de confinements. Pour cela on se place dans le cadre de la *MHD* idéale en équilibre statique pour décrire le plasma au repos, soumis à un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$ , et sans courant électrique de forçage (uniquement du courant induit).

Les équations de la *MHD* sont :

$$\mathbf{v}_0 = 0 \quad (6.6)$$

$$-\mathbf{grad}p_0 + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0) = 0 \quad (6.7)$$

$$\text{div}\mathbf{B}_0 = 0. \quad (6.8)$$

Les champs ne dépendent que des variables d'espace et vérifient les équations :

$$\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{grad}p = 0 \quad (6.9)$$

$$\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{grad}p = 0 \quad (6.10)$$

$$\mathbf{j}_0 = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}\mathbf{B}. \quad (6.11)$$

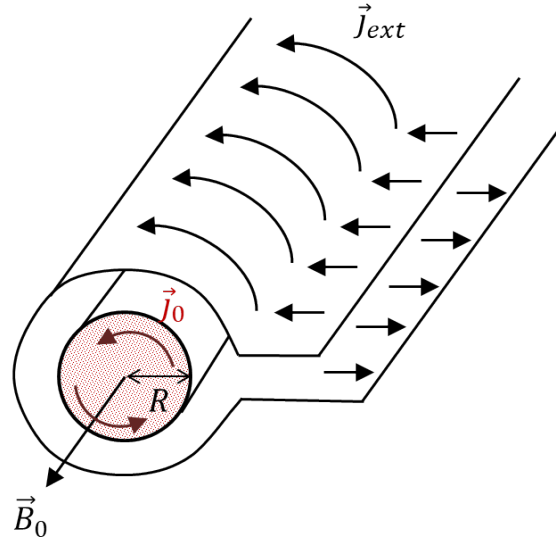


FIGURE 6.5: Schéma de principe du confinement magnétique  $\theta$ -pinch. On applique un courant azimuthal qui va générer un champ magnétique axial qui en interagissant avec son courant induit va alors créer une pression radiale de confinement.

### 6.2.3 Le confinement $\theta$ -pinch

Le principe du  $\theta$ -pinch est d'appliquer une densité de courant électrique azimuthale  $\mathbf{j}_{ext}$  à la surface d'un cylindre de rayon  $R$  dans lequel on veut confiner le plasma. Ce courant va générer un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  orienté le long de l'axe du cylindre. Ce champ va alors induire la densité de courant  $\mathbf{j}_0$  azimuthale à l'intérieur du plasma. La force de Lorentz produite à partir du courant induit et du champ magnétique exercera alors une pression radiale de confinement.

Comme nous sommes en symétrie axiale, les champs sont indépendants de  $\theta$  et  $z$ , on peut donc écrire que la densité de courant induite est de la forme :

$$\mathbf{j}_0 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_{0z}}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \quad (6.12)$$

en négligeant les composantes de champ magnétique induite selon  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{z}$ . Ceci entraîne un gradient de pression tel que :

$$\mathbf{grad} p_0 = -\frac{1}{\mu_0} B_{0z} \frac{\partial B_{0z}}{\partial r} \mathbf{e}_r. \quad (6.13)$$

En intégrant selon  $r$  et en prenant la pression hydrodynamique  $p_0$  nulle en  $r = R$ , on obtient :

$$p_0(r) + \frac{1}{2\mu_0} B_{0z}^2(r) = \frac{1}{2\mu_0} B_{0z}^2(R). \quad (6.14)$$

Enfin, on peut écrire l'évolution du champ magnétique à l'intérieur du cylindre :

$$B_{0z}(r) = B_{0z}(R) \sqrt{1 - \beta(r)}. \quad (6.15)$$

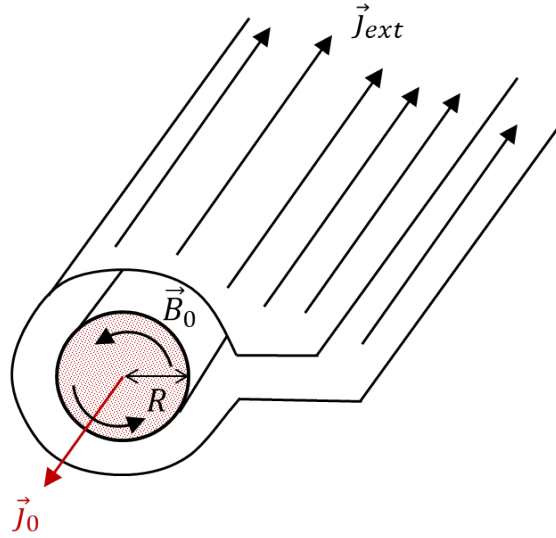


FIGURE 6.6: Schéma de principe du confinement magnétique z-pinch. On applique un courant axial qui va générer un champ magnétique azimuthal qui en interagissant avec son courant induit va alors créer une pression radiale de confinement.

avec  $\beta(r) = \frac{p_0(r)}{B_{0z}^2(R)/2\mu_0}$  qui définit le rapport entre pression cinétique (hydrodynamique) et pression magnétique. A l'équilibre thermodynamique on peut exprimer la pression cinétique grâce à la température :  $\beta(r) = \frac{nk_B T}{B_{0z}^2(R)/2\mu_0}$ .

Si  $\beta > 1$  le plasma est dominé par l'énergie cinétique des particules.

Si  $\beta < 1$  le plasma est dominé par l'énergie du champ magnétique.

Pour fixer les idées, dans ITER, le champ magnétique est de l'ordre de 5 T, la densité de l'ordre de  $10^{19}$ , ce qui donne  $\beta \approx 0.004$ , le plasma est donc dominé par le champ magnétique, qui peut alors confiner le plasma.

En pratique, le confinement  $\theta$ -pinch est assez stable, cependant, à nouveau par construction il y a des fuites aux extrémités du cylindre.

## 6.2.4 Le confinement z-pinch

Le principe du z-pinch est l'inverse de celui du  $\theta$ -pinch. Ici on applique une densité de courant électrique axiale  $\mathbf{j}_{ext}$  à la surface de cylindre de rayon  $R$ . Ce courant va alors générer un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  azimuthal. Ce champ va alors induire la densité de courant  $\mathbf{j}_0$  axiale à l'intérieur du plasma. La force de Lorentz produite à partir du courant induit et du champ magnétique exercera une pression radiale de confinement.

En reprenant le raisonnement du  $\theta$ -pinch, (symétrie axiale, champs indépendants de  $\theta$  et  $z$ ) on peut donc écrire que la densité de courant induite est de la forme :

$$\mathbf{j}_0 = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial r B_{0\theta}}{\partial r} \mathbf{e}_z \quad (6.16)$$

en négligeant les composantes du champ magnétique induit selon  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{z}$ . Ceci entraîne un gradient de pression tel que :

$$\mathbf{grad}p_0 = -\frac{1}{\mu_0 r} B_{0\theta} \frac{\partial r B_{0\theta}}{\partial r} \mathbf{e}_r. \quad (6.17)$$

Si la dérivée est positive alors la force de Lorentz entraîne une pression hydrodynamique qui confine le plasma. On réécrit le gradient de pression :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( p_0(r) + \frac{1}{2\mu_0} B_{0\theta}^2(r) \right) = -\frac{1}{\mu_0 r} B_{0\theta}^2(R). \quad (6.18)$$

Le terme de droite est un terme de tension magnétique - additionnel par rapport au confinement  $\theta$ -pinch. Selon le profil du champ magnétique  $B_{0\theta}$ , on pourra confiner le plasma. En pratique cette configuration est assez instable mais on peut atteindre des confinements plus efficace. Par exemple, le confinement d'un plasma jusqu'à une température de  $10^9$  K a été réalisé avec cette configuration.

### 6.2.5 $z + \theta = \text{Tokamak}$

Pour additionner les avantages des deux types de confinement, réduire les problèmes de fuite du z-pinch, et stabiliser l'équilibre du  $\theta$ -pinch, la solution est de les combiner pour former ce qu'on appelle un tokamak.

La configuration tokamak consiste en un tore dans lequel les lignes de champs magnétiques ont une configuration hélicoïdale afin de minimiser les différences d'intensité entre les lignes de champ à l'intérieur du tore et celles à l'extérieur. En effet, à cause de l'effet miroir magnétique et de la force centrifuge, dans un tore simple, le plasma a tendance à se déplacer vers l'extérieur du tore ce qui augmente la possibilité de pertes thermiques.

Pour créer la configuration hélicoïdale du champ magnétique, on ajoute une composante poloïdale au champ toroïdal initial. Pour cela on induit un courant électrique à l'intérieur du plasma en faisant varier le champ d'une bobine d'axe vertical située au centre du tore. On applique donc un courant alternatif de quelques méga-ampère à une fréquence de l'ordre du Hertz à l'intérieur de cette bobine. Ce caractère cyclique peut être problématique pour la production d'une réaction de fusion continue.

L'alternative au tokamak est le stellarator dont le principe est de modifier la configuration du champ magnétique de confinement pour que, sur un tour, l'intensité du champ sur une trajectoire soit partout la même. Différentes variantes existe par exemple certaines combinent deux tores tournant dans des sens opposés pour compenser la déviation du plasma sur un tour.

Le confinement tokamak est en cours de mise au point actuellement dans ITER, cependant le point le plus délicat concerne la stabilité du plasma. En effet, expérimentalement, il a été observé des événements très brefs ( $\tau = 20$  ms) qui font perdre le confinement du plasma et qui peuvent endommager l'enceinte en relachant des décharges de quelques millions d'ampères sur une surface de quelques  $\text{cm}^2$ .



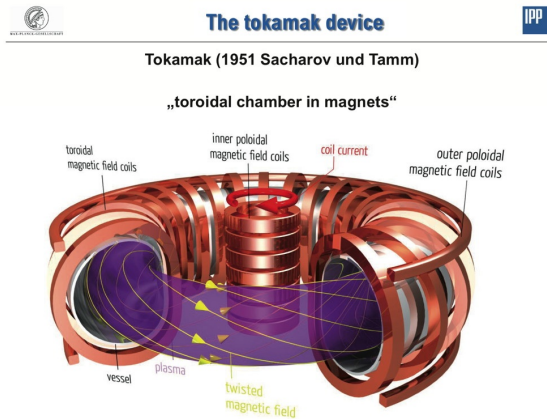


FIGURE 6.7: Schéma de principe d'un tokamak. Cette géométrie élaborée en 1951 combine les champs magnétiques de confinement d'un z-pinch et d'un  $\theta$ -pinch. Pour cela, un réseau de bobines supraconductrices génère un champ toroïdal, et une bobine centrale induit un courant dans le plasma qui génère à son tour la composante de champ poloïdal. La combinaison des deux génère la configuration hélicoïdale des lignes de champ.

Ces instabilités, nommées des *disruptions*, pourraient être due à une perte locale de l'idéalité de l'écoulement plasma. Dans ce cas, il apparaîtrait alors des zones de diffusion du champ magnétique qui entraîneraient une reconfiguration topologique des lignes de champ que l'on nomme la reconnexion magnétique. Ce phénomène, à l'origine entre autres des éruptions solaires, est décrit dans le chapitre suivant.

## 6.3 La reconnexion magnétique

### 6.3.1 Description

Dans le cadre de la *MHD* idéale, à cause du théorème du gel, les lignes de courant et les lignes de champs sont gélées les unes avec les autres. Cela signifie qu'il ne peut pas y avoir de reconfiguration topologique des lignes de champ. Par exemple, deux lignes de champ ne peuvent pas se "briser" et se reconnecter entre elles. Cependant, comme on l'a vu précédemment, le domaine de validité de la *MHD* idéale est déterminé par les grands nombres de Reynolds magnétique. Or, celui-ci dépend de l'échelle d'observation  $L$  :  $Rm = \sigma \mu_0 v L$ . Il y a donc toujours une échelle en dessous de laquelle le théorème du gel ne sera plus respecté. Sur ces échelles des courants électriques apparaîtront, le champ magnétique pourra alors diffuser ce qui réorganisera des lignes de champ.

Plus particulièrement, si on se place dans le cas où deux lignes de champ magnétique de sens opposés se rapprochent suffisamment l'une de l'autre, une nappe de courant se forme entre les deux et une réorganisation topologique se produit. Une fois la reconnexion terminée, les lignes de champ s'éloignent avec une vitesse beaucoup plus élevée que la vitesse d'approche.

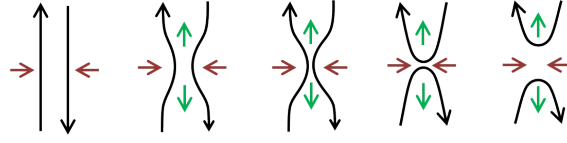


FIGURE 6.8: Schéma de principe de la reconnexion magnétique. 2 lignes de champ de sens opposés se rapprochent l'une de l'autre localement. A partir d'une certaine proximité, la *MHD* idéale n'est plus respectée, une nappe de courant se crée entraînant alors la reconfiguration des lignes de champ.

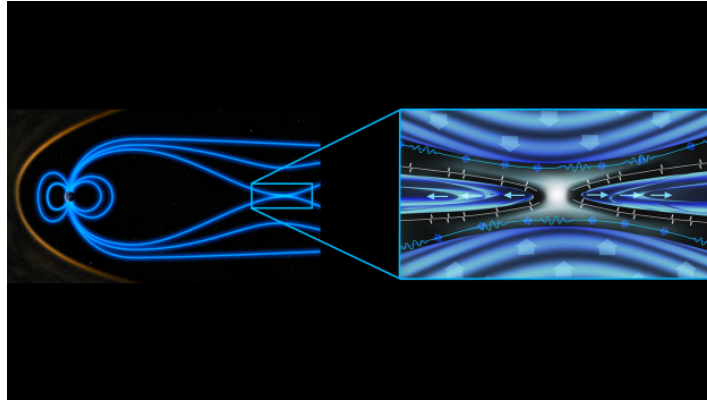


FIGURE 6.9: Localisation de la reconnexion magnétique dans la queue de la magnétosphère. Lors de la reconnexion, le vent solaire piégé dans la magnétosphère est libéré et peut alors atteindre les pôles magnétiques terrestres, ce qui crée alors d'importantes aurores boréales.

*La reconnexion magnétique permet donc le transfert d'énergie magnétique en énergie cinétique.*

Ce processus est extrêmement étudié car il pourrait être une nouvelle source d'énergie. Il a aussi lieu dans la magnétosphère et permet l'entrée du vent solaire à la base des aurores boréales. Il est aussi important dans les éruptions solaires, dont la prédiction est cruciale pour la protection des satellites et l'exploration spatiale. Il faut noter que la reconnexion est un phénomène plus large que la *MHD* car la reconfiguration topologique des lignes de vorticités dans l'hélium superfluide par exemple relève des mêmes processus.

### 6.3.2 Modèle de nappe de courant en *MHD* idéale

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux limites de la *MHD* idéale en étudiant la description de deux lignes de champ de sens opposés. Le système se compose d'un champ magnétique qui dépend linéairement de l'altitude donc pour une

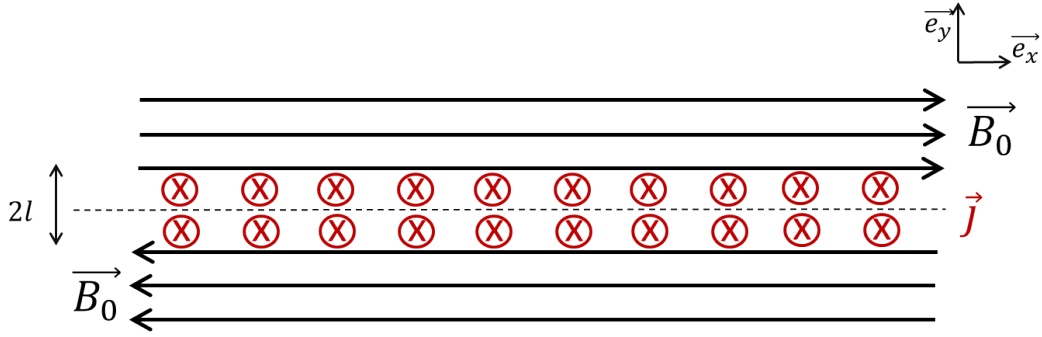


FIGURE 6.10: Schéma d'une nappe de courant entre deux lignes de champ magnétique dans l'approximation de la *MHD* idéale.

nappe d'épaisseur  $2l$  :

$$\mathbf{B}(y) = B_0 \frac{y}{l} \mathbf{e}_x \quad \text{pour } (-l < y < l) \quad (6.19)$$

et qui constant ailleurs :

$$\mathbf{B}(y) = B_0 \mathbf{e}_x \quad \text{pour } y > l, \quad (6.20)$$

$$\mathbf{B}(y) = -B_0 \mathbf{e}_x \quad \text{pour } y < -l. \quad (6.21)$$

Ce changement de signe génère une nappe de courant en  $y = 0$  telle que :

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot} \mathbf{B} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial y} \mathbf{e}_z \quad (6.23)$$

$$j_z = -\frac{B_0}{\mu_0 l} \quad (6.24)$$

Lorsque les lignes de champ se rapprochent alors  $l \rightarrow 0$  et  $j_z \rightarrow +\infty$ . Aucun mécanisme brisant cette configuration existe en *MHD* idéale, cependant à partir d'un certain  $l Rm \sim 1$ . On peut conclure que le système est stable jusqu'au moment où la *MHD* idéale ne s'applique plus : c'est à ce moment la reconnexion magnétique apparaît.

### 6.3.3 Modèle de Sweet-Parker.

Le premier modèle décrivant la reconnexion magnétique a été établi 1956 par Peter Sweet et Eugene Parker. Il reprend le modèle de nappe de courant en *MHD* idéale décrit précédemment mais la zone où le champ magnétique varie linéairement, et où se trouve la nappe de courant, est une zone de reconnexion dans laquelle le champ magnétique peut diffuser. Dans cette région, la diffusibilité magnétique est non-nulle, on peut alors

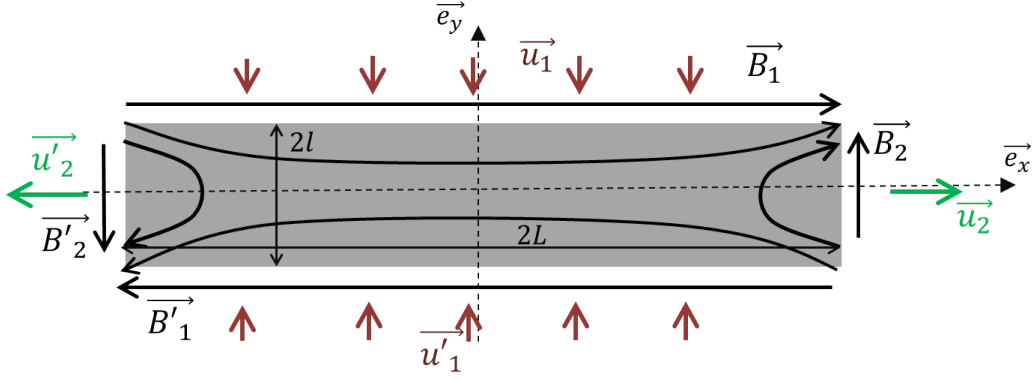


FIGURE 6.11: Schéma de principe de la reconnexion de Sweet-Parker. Le processus de diffusion a lieu dans la zone grisée pour laquelle  $l \ll L$ .

utiliser les équations de la *MHD* standard incompressible inviscide en régime permanent alors que tout le reste de l'espace est piloté par la *MHD* idéale.

La démonstration et les résultats issus du modèle de Sweet-Parker sont dans la PC associée. Cependant, il faut noter que le modèle donne un temps caractéristique pour la reconnexion magnétique de :

$$\tau_{rec} = \frac{L}{V_A} \sqrt{\frac{LV_A}{\eta}}. \quad (6.25)$$

L'application numérique du temps caractéristique pour la couronne solaire donne :  $\tau_{rec} \approx 10^7$ s, alors que l'ordre de grandeurs des observations est de 10s. Pour ce phénomène le modèle de Sweet-Parker est donc faux, il existe des modèles améliorant les prédictions. Par exemple, le modèle de Petcheck qui modifie la forme de la régions de reconnexion et impose une taille de nappe  $L$  plus petite. Il a été proposé un modèle turbulent de Sweet-Parker, pour lequel on introduit une diffusibilité magnétique "turbulente" qui est beaucoup plus grande que celle basée uniquement sur les phénomènes diffusifs. Cependant, aucun modèle n'est pleinement satisfaisant à l'heure actuelle.

# Chapitre 7

## Les instabilités *MHD*

On a vu dans le chapitre précédent différents types de confinements. En regard des températures et des courants mis en jeu, la stabilité du confinement est cruciale pour maintenir la réaction de fusion ainsi que l'intégrité des enceintes de la chambre à vide. On a vu que la reconnexion magnétique pouvait faire perdre la stabilité de ces confinements, cependant, d'autres sources d'instabilités pourraient exister. L'objectif de ce chapitre est d'essayer de faire une introduction à la théorie linéaire des perturbations qui permet de prédire un certain nombre d'instabilités.

### 7.1 Définition

On dit qu'un système est à l'équilibre lorsque son évolution temporelle est décrite par les solutions d'une équation connue (ressort/pendule en oscillation, chaîne soumise à son propre poids, ...).

- Cet équilibre est stable si, lorsqu'on perturbe le système initialement à l'équilibre, il revient dans ce même état.
- Cet équilibre sera instable si, lorsqu'on perturbe le système initialement à l'équilibre, quelque soit la taille de la perturbation, il s'éloigne de cet état. L'évolution du système n'est plus décrite par la solution initiale, il peut même être décrit par une autre équation d'évolution.

Plus généralement, on peut définir une instabilité comme étant le changement de la solution décrivant l'évolution d'un système. Il faut noter que la stabilité d'un équilibre n'est pas forcément synonyme de robustesse de l'état vis à vis d'une perturbation infinitésimale. Mais en pratique, de ce raisonnement sur l'évolution d'un état d'équilibre après une perturbation infinitésimale découle une première approche du domaine des instabilités : **la théorie linéaire des perturbations**.

Concrètement dans les études de stabilité de ce type, on définira une perturbation sous la forme d'une onde, qui entraînera par exemple l'apparition d'oscillations si c'est un équilibre stable où d'une croissance exponentielle dans le cas instable (voir figure 7.1).

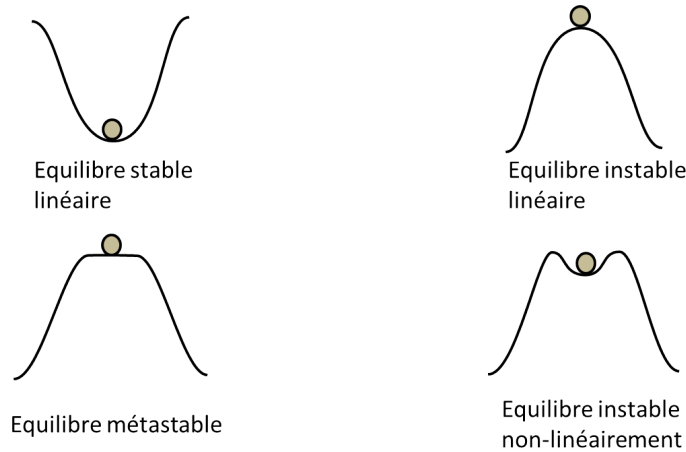


FIGURE 7.1: Schéma des différents types d'équilibres dans le cas unidimensionnel. Haut-gauche : équilibre stable à toutes les perturbations. Haut-droite : équilibre instable avec croissance exponentielle quelque soit la taille de la perturbation. Bas-gauche : équilibre métastable, sans frottement le système restera un temps dans l'équilibre initial avant d'en sortir exponentiellement. Bas-droite : l'équilibre est instable à partir d'une certaine amplitude de perturbation.

Dans la figure 7.1, nous représentons les différents types d'équilibre dans un système unidimensionnel. Par la suite, on s'intéressera à la stabilité linéaire.

Beaucoup de phénomènes naturels tels que la dynamo terrestre ou solaire, l'accrétion des disques protoplanétaires sont des mécanismes d'instabilités qu'il convient de comprendre afin de prédire leur évolution qui peut être chaotique.

Les instabilités sont aussi en oeuvre dans l'industrie comme dans les cellules de réduction de l'aluminium où elles entraînent une surtension, ou dans les tokamaks pour qui la perte de confinement peut dégrader les parois du tore.

## 7.2 Analyse de stabilité linéaire

La méthode consiste à rajouter aux solutions de l'état de base une perturbation infinitésimale. La forme des solutions des équations pour cette perturbation donne alors la stabilité du système.

En *MHD* pour le champ de vitesse et le champ magnétique on peut poser :

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad (7.1)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \quad (7.2)$$

où  $\mathbf{v}_0, \mathbf{B}_0$  sont les champs solutions de l'équilibre initial et  $\mathbf{v}_1, \mathbf{B}_1$  les perturbations infinitésimales.

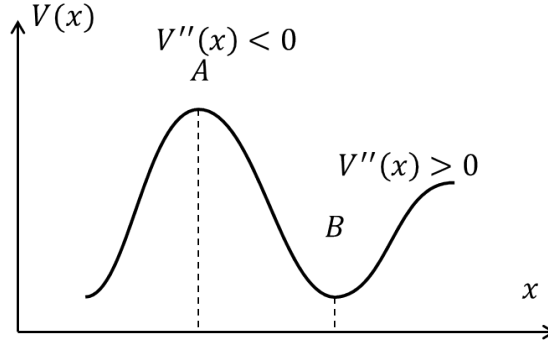


FIGURE 7.2: Potentiel unidimensionnel  $V(x)$ . A est un point d'équilibre instable, B un point d'équilibre stable.

### 7.2.1 Cas unidimensionnel

On s'intéresse ici au cas 1D où le champ de forces  $\mathbf{F}(x)$  dérive d'un potentiel  $V(x)$ .

$$\mathbf{F}(x) = -\mathbf{grad}V(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (7.3)$$

Celui-ci possède deux extrêmes A et B, en  $x_A$  et  $x_B$  (voir figure 7.2), donc  $F(x_A) = F(x_B) = 0$ .

Afin de déterminer la stabilité de ces extrêmes, on fait un développement limité autour de ces positions :

$$F(x) = F(x_{A,B}) + F'(x_{A,B})(x - x_{A,B}) + o(x) \quad (7.4)$$

$$F(x) = 0 - V''(x_{A,B})(x - x_{A,B}) + o(x) \quad (7.5)$$

La stabilité de l'équilibre est donc pilotée par le signe de  $V''$ . Dans le cas décrit dans la figure

- $V''(x_B) > 0$  alors  $F(x^+) < 0$  et  $F(x^-) > 0$ , le champ de force tend à ramener le système à sa position d'équilibre en B.
- Si  $V''(x_A) < 0$  alors  $F(x^+) > 0$  et  $F(x^-) > 0$ , le champ de force tends à éloigner le système à sa position d'équilibre en A.

Pour aller un peu plus loin, on introduit  $\delta x_A = x - x_A$  une perturbation infinitésimale de l'équilibre autour de A.

L'équation d'évolution de cette perturbation est :

$$m \frac{d\delta x_A}{dt^2} = F(x) - F(x_A), \quad (7.6)$$

$$m \frac{d\delta x_A}{dt^2} = + F'(x_A)\delta x_A, \quad (7.7)$$

$$m \frac{d\delta x_A}{dt^2} = - V''(x_A)\delta x_A, \quad (7.8)$$

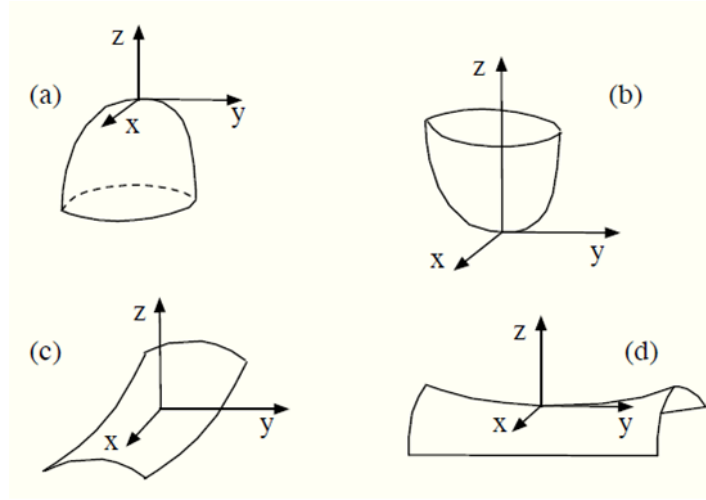


FIGURE 7.3: Les 4 différents types d'équilibre en 2 dimensions. a) équilibre instable dans toutes directions, b) équilibre stable dans toutes les directions c) et d) point selle ou noeud-col pour lesquels il y a une direction stable et toutes les autres directions instables.

dont la solution est :

$$\delta x_A = \delta x_A^0 e^{i\omega_A t} \quad (7.9)$$

avec  $\omega_A^2 = \frac{V''(x_A)}{m}$ .

Donc dans le cas ici, la solution pour la perturbation au point A est instable avec une croissance exponentielle. Si on fait le même raisonnement autour du point B on montre que le point B est stable, et que la trajectoire est oscillante.

$$\delta x_A = \delta x_A^0 e^{\pm \sqrt{\frac{V''(x_A)}{m}} t} \quad (7.10)$$

$$\delta x_B = \delta x_B^0 e^{\pm i \sqrt{\frac{V''(x_B)}{m}} t}. \quad (7.11)$$

## 7.2.2 Cas bidimensionnel

On reprend le même raisonnement que dans le cas unidimensionnel. Le champ de forces  $\mathbf{F}(x, y)$  dérive d'un potentiel  $V(x, y)$  tel que :

$$\mathbf{F}(x, y) = -\mathbf{grad}V(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \mathbf{e}_y. \quad (7.12)$$

Les extrêmes A et B, en  $(x_A, y_A)$  et  $(x_B, y_B)$  sont définis par  $F(x_A, y_A) = F(x_B, y_B) = 0$ . Les différentes configurations d'équilibre en 2D sont reportées dans la figure 7.3.

(a)  $\frac{\partial V}{\partial x} < 0, \frac{\partial V}{\partial y} < 0$  la configuration est instable dans toutes les directions.

(b)  $\frac{\partial V}{\partial x} > 0, \frac{\partial V}{\partial y} > 0$  la configuration est stable dans toutes les directions.



- (c)  $\frac{\partial V}{\partial x} > 0, \frac{\partial V}{\partial y} < 0$  configuration où la direction  $\mathbf{e}_x$  est stable et toutes les autres directions sont instables.
- (d)  $\frac{\partial V}{\partial x} < 0, \frac{\partial V}{\partial y} > 0$  configuration où la direction  $\mathbf{e}_y$  est stable et toutes les autres directions sont instables.

En deux dimensions, à partir du moment où le potentiel est négatif selon une variable, toutes les perturbations avec une composante selon cette variable déstabiliseront l'équilibre.

On remarque que plus le système a une grand nombre de dimensions moins il y a de types d'équilibres stables. Les systèmes avec un grand nombre de dimensions seront donc plus facilement instables, voir chaotiques.

## 7.3 Application à la *MHD*

Dans cette section nous allons reprendre les équations de la *MHD* standard inviscide et introduire la décomposition des champs de l'équation 7.2 qui introduit les perturbations infinitésimales. Par soucis de simplicité, on se place dans la suite dans le cas d'un fluide au repos.

### 7.3.1 Navier-Stokes

On reprend l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) = -\mathbf{grad} p + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (7.13)$$

À  $t = 0$  le système est l'état d'équilibre :  $\mathbf{v}_0 = 0$ ,  $p_0 = cte$ ,  $\rho_0 = cte$  et  $\mathbf{B}_0$  est indépendant du temps.

À  $t = 0^+$  on perturbe le système, on écrit alors tout les champs en les décomposant entre la partie à l'équilibre et la partie perturbée. Les champs sont de la forme :

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v}_1 \quad (7.14)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \quad (7.15)$$

$$p = p_0 + p_1 \quad (7.16)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (7.17)$$

Ensuite on réécrit Navier-Stokes à  $t = 0^+$  en identifiant les termes de même ordre.

$$\mathbf{0} = -\mathbf{grad} p_0 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}) \quad (\text{ordre } 0) \quad (7.18)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\mathbf{grad} p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{rot} \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (\text{ordre } 1). \quad (7.19)$$

On dérive par rapport au temps ( $\partial/\partial t \equiv \dot{\phantom{x}}$ ) l'équation à l'ordre 1,

$$\rho \ddot{\mathbf{v}}_1 = -\mathbf{grad} \dot{p}_1 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{rot} \mathbf{B}_0 \times \dot{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{rot} \dot{\mathbf{B}}_1 \times \mathbf{B}_0). \quad (7.20)$$

On essaie maintenant d'écrire tous les champs d'ordre 1 en fonction de la perturbation de vitesse  $\mathbf{v}_1$  :

- Pour le champ de pression on suppose que le système suit une évolution isentropique,

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cte \quad (7.21)$$

$$\frac{dp}{dt} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (7.22)$$

La dérivée particulaire de la masse volumique permet d'identifier dérivée droite et dérivée partielle :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{grad}) \rho_0 \quad (7.23)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho_1}{\partial t}. \quad (7.24)$$

Tandis que la conservation de la masse permet de relier vitesse et masse volumique

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}_1) = 0 \quad (7.25)$$

En injectant dans la dérivée particulaire de la pression on arrive à exprimer la pression  $p_1$  en fonction de la vitesse  $\mathbf{v}_1$  :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{grad}) p_0 \quad (7.26)$$

$$-\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (7.27)$$

$$\gamma p_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}_1) = \dot{p}_1 \quad (7.28)$$

- Pour le champ magnétique on utilise l'équation de Maxwell-Ampère associée à la loi d'Ohm dans laquelle on suppose la densité de courant nulle.

$$-\frac{\partial B_1}{\partial t} = \mathbf{rot} \mathbf{E}_1, \quad (7.29)$$

$$\mathbf{j}_1 = \sigma(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) = \mathbf{0}, \quad (7.30)$$

qui donne :

$$\dot{B}_1 = \mathbf{rot}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0). \quad (7.31)$$

- Finalement, on injecte ces résultats dans l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{v}}_1 = -\gamma p_0 \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{v}_1) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{rot}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)) \times \mathbf{B}_0) \quad (7.32)$$

Le raisonnement précédent permet d'exprimer l'équation de la dynamique des fluides uniquement en fonction de la perturbation de vitesse. De plus, cette équation ne fait intervenir que des opérateurs linéaires et les champs à l'ordre 0, on peut donc résoudre cette équation sous certaines conditions. Dans la suite nous introduirons la méthode des modes normaux pour la résolution des instabilités.

### 7.3.2 Modes normaux

Le préalable à la résolution par la méthode des modes normaux est l'introduction de l'opérateur des petits mouvements. Pour cela on utilise la description lagrangienne :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi \quad (7.33)$$

où  $\xi$  est un petit déplacement d'ordre 1 par rapport à la position d'équilibre.

Un développement limité de la vitesse autour de la position d'équilibre permet d'écrire :

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}_0, t) + (\xi \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_1(\mathbf{r}_0, t), \quad (7.34)$$

or le second terme est d'ordre 2, dès lors :

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{v}_1(\mathbf{r}_0, t) \quad (7.35)$$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) \approx \dot{\xi}(\mathbf{r}_0, t). \quad (7.36)$$

Comme nous sommes initialement à l'équilibre, à  $t_0 = 0$  on a :

$$\ddot{\xi}(\mathbf{r}_0, t) \approx \mathbf{0} \quad (7.37)$$

$$\xi(\mathbf{r}_0, t) \approx \mathbf{0}. \quad (7.38)$$

On remplace alors la perturbation de vitesse  $\mathbf{v}_1$  par la dérivée du déplacement  $\dot{\xi}$  dans N.S.

$$\rho_0 \ddot{\dot{\xi}} = -\gamma p_0 \mathbf{grad}(\text{div} \dot{\xi}) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{rot}(\dot{\xi} \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\dot{\xi} \times \mathbf{B}_0)) \times \mathbf{B}_0) \quad (7.39)$$

Puis en intégrant par rapport au temps, en remarquant que l'équation (7.38) impose que la constante est nulle, on obtient :

$$\rho_0 \ddot{\xi} = -\gamma p_0 \mathbf{grad}(\text{div} \xi) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{rot} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{rot}(\xi \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\xi \times \mathbf{B}_0)) \times \mathbf{B}_0). \quad (7.40)$$

Cette équation est l'égalité entre l'opérateur linéaire et la dérivée temporelle seconde du déplacement infinitésimal.

$$\rho_0 \ddot{\xi}(\mathbf{r}_0, t) = \mathcal{L}(\xi(\mathbf{r}_0, t)) \quad (7.41)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire uniquement sur les variables d'espace.

L'approche des modes normaux consiste à supposer que l'on peut séparer les dépendances en temps et en espace dans les solutions (variables séparées). La solution est de la forme :

$$\xi(\mathbf{r}_0, t) = \tilde{\xi}(\mathbf{r}_0) e^{-i\omega t}, \quad (7.42)$$

En introduisant dans l'équation 7.41 on obtient :

$$-\rho\omega^2 \tilde{\xi}(\mathbf{r}_0) e^{-i\omega t} = \mathcal{L}(\tilde{\xi}(\mathbf{r}_0)) e^{-i\omega t}. \quad (7.43)$$

qui est une équation d'un problème aux valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{L}$ .

*Petit rappel :*

Chercher les valeurs propres d'un opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  correspond à trouver l'ensemble des vecteurs  $V_i$  tels que :

$$(\mathcal{L} - \lambda_i \mathcal{I}) V_i = 0 \quad (7.44)$$

où  $V$  est le vecteur propre associé au scalaire  $\lambda_i$  qui sa valeur propre.

On peut donc affirmer que les solutions de la théorie perturbative appliquée à la *MHD* standard inviscide sont de la forme :

$$-\omega_n^2 \tilde{\xi}_k = \frac{\mathcal{L}}{\rho}(\tilde{\xi}_n). \quad (7.45)$$

où  $\omega_n^2$  sont les valeurs propres de l'opérateur  $\frac{\mathcal{L}}{\rho}$  et  $\tilde{\xi}_n$  les vecteurs propres associés. La solution générale est donc la combinaison linéaire des vecteurs propres  $\tilde{\xi}_n$  (modes normaux) qui évoluent indépendamment les uns des autres à leur pulsation propres  $\omega_n$ .

$$\xi(\mathbf{r}_0, t) = \sum_n a_n \tilde{\xi}_n(\mathbf{r}_0) e^{i\omega_n t}. \quad (7.46)$$

Par ailleurs, on appelle  $a_n$  la coordonnée normale (amplitude du mode).

Les propriétés de l'opérateur  $\mathcal{L}$  (linéaire, hermitien), font que les valeurs propres sont réelles, et que les vecteurs sont orthogonaux entre eux (modes normaux). Enfin, le signe des valeurs propres donne la stabilité du mode associé, à partir du moment où un seul mode est instable on dit que l'équilibre est instable. En effet, le taux de croissance du mode instable étant le seul positif, il est le seul à être amplifié alors que les autres s'amortissent avec le temps. Il deviendra forcément prépondérant dans la dynamique du système, le rendant instable.

- Si  $\omega_n^2 > 0$ , alors  $\omega_n \in \mathbb{R}$ , et donc l'évolution temporelle est une oscillation. Le mode est stable.

- Si  $\omega_n^2 < 0$ , alors  $\omega_n \in i\mathbb{R}$ , et donc l'évolution temporelle est une exponentielle amplifiée. Le mode - et l'équilibre - est instable.

L'objectif d'une étude de stabilité linéaire est donc d'exprimer les pulsations des modes normaux en fonction des paramètres du système. En modifiant les paramètres du système, le signe des pulsations propres pourra changer, faisant évoluer du même coup la stabilité du système. On dit alors qu'on a franchit une **bifurcation** (changement de stabilité du système) pilotée par un **paramètre contrôle** (le paramètre qui est modifié).

### 7.3.3 Application aux ondes d'Alfvén

Dans cette section, on va adapter les résultats assez généraux de la section précédente aux ondes d'Alfvén. Pour rappel, les hypothèses initiales sont celles de la *MHD* standard inviscide, de plus à  $t = 0$  le fluide est au repos et  $\mathbf{B}_0$  est indépendante du temps.

Les hypothèses supplémentaires sont :

- L'écoulement est incompressible :  $\text{div}\xi = 0$ .
- Le fluide est au repos initialement donc en intégrant par rapport au temps :  $\text{div}\xi = cte = 0$ .
- Le champ magnétique est uniforme à l'ordre 0 :  $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$ .

En introduisant ces hypothèses dans l'équation (7.40) on obtient :

$$\rho_0\ddot{\xi} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\xi \times \mathbf{B}_0)) \times \mathbf{B}_0. \quad (7.47)$$

On développe cette équation et avec les hypothèses, on réduit l'équation à :

$$\rho_0\ddot{\xi} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{rot}((\mathbf{B}_0.\mathbf{grad})\xi) \times \mathbf{B}_0. \quad (7.48)$$

Ensuite on injecte la forme de la solution générale (7.46),

$$\rho_0\omega_n^2\tilde{\xi}_n = \frac{1}{\mu_0}B_0\mathbf{e}_z \times \mathbf{rot}((\mathbf{B}_0.\mathbf{grad})\tilde{\xi}_n). \quad (7.49)$$

La perturbation de déplacement est donc perpendiculaire à  $\mathbf{e}_z$ . Donc elle est de la forme :

$$\tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}_{n,x}\mathbf{e}_x + \tilde{\xi}_{n,y}\mathbf{e}_y. \quad (7.50)$$

En développant  $\mathbf{B}_0.\mathbf{grad}$  :

$$\rho_0\omega_n^2\tilde{\xi}_n = \frac{1}{\mu_0}B_0^2 \times \mathbf{rot}\left(\frac{\partial\tilde{\xi}_n}{\partial z}\right). \quad (7.51)$$

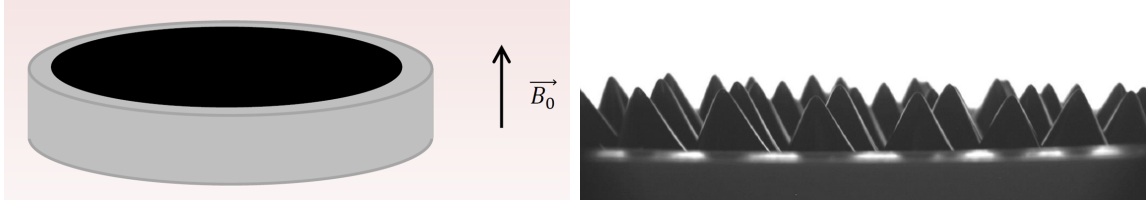


FIGURE 7.4: Schéma de l'instabilité de Rosenzweig, à gauche la surface libre avant la bifurcation, à droite la déformation de celle-ci au delà d'un certain seuil de champ magnétique.

Grâce au théorème de Schwarz on peut sortir la dérivée partielle par rapport à  $z$  :

$$\rho_0 \omega_n^2 \tilde{\xi}_n = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} (B_0^2 \times \mathbf{rot}(\tilde{\xi}_n z)). \quad (7.52)$$

On développe cette équation en utilisant la forme de la perturbation bidimensionnelle, on obtient alors une équation d'onde :

$$\omega_n^2 \tilde{\xi}_n = -\frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\xi}_n. \quad (7.53)$$

Ce qui donne en cherchant les solutions de la forme  $\tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}_{n,0} e^{ikz}$ , une relation de dispersion :

$$\omega_n^2 = \frac{B_0^2 k^2}{\rho_0 \mu_0} > 0. \quad (7.54)$$

Toutes les valeurs propres de l'opérateur sont toujours positives quelque soient les paramètres du système. Le système est donc stable. On retrouve bien les résultats des ondes d'Alfvén, i.e. le mouvement du plasma est perpendiculaire à  $\mathbf{B}_0$  et les ondes se déplacent à la vitesse d'Alfvén,  $V_A = B_0 \sqrt{\rho_0 \mu_0}$ .

### 7.3.4 Approche expérimentale

Expérimentalement la caractérisation des instabilités est assez fastidieuse. Par exemple, l'identification d'une bifurcation nécessite de faire varier finement et indépendamment les paramètres de contrôle afin de pouvoir déterminer avec précision le seuil de la bifurcation pour le comparer avec la théorie. La plupart du temps, cependant, la théorie n'est pas forcément en mesure de prédire (où n'a pas encore prédit) le seuil de bifurcation, on se remet donc à une étude expérimentale systématique pour identifier les paramètres impliqués dans l'instabilité.

Pour illustrer ces concepts, on va s'intéresser à une instabilité partiellement *MHD* : l'instabilité de Rosenzweig pour les ferrofluides. Cette catégorie de fluide est particulière : il s'agit d'une émulsion entre une matrice liquide oléagineuse (huile) et des

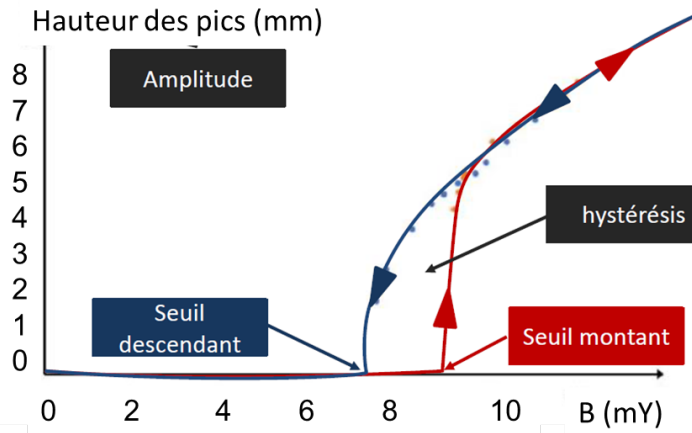


FIGURE 7.5: Graphique de l'amplitude des pics de l'instabilité de Rosenzweig en fonction de l'intensité du champ magnétique appliqué. On observe la bifurcation en fonction du paramètre de contrôle qui fait apparaître un phénomène d'hystérésis - le seuil montant est différent du seuil descendant.

particules solides magnétisables (type oxydes de fer comme la magnétite  $Fe_3O_4$ ) recouvert de surfactant. Les particules entraînent alors le liquide autour d'elles, il y a un couplage mécanique entre l'aimantation et l'écoulement.

Dans un récipient, se trouve un ferrofluide à surface libre, lorsqu'on applique un champ magnétique uniforme perpendiculaire à la surface, à partir d'une certaine intensité on voit la surface se déformer (figure 7.4).

- Pour l'étude expérimentale de cette instabilité, on détermine les forces qui s'appliquent au ferrofluide. On comptabilise 3 forces : la gravité, la force magnétique, et la tension de surface. C'est l'équilibre de ces trois forces qui détermine la solution ! On peut construire alors des nombres sans dimension afin de réduire l'espace des paramètres à explorer.

- Pour la recherche du seuil : il faut déterminer la valeur du paramètre de contrôle pour lequel  $\omega_n^2 = 0$ , i.e. l'apparition de la déformation de la surface. Souvent la déformation infinitésimale est difficile à observer, on peut alors exciter le système en dessous du seuil et mesurer le temps de retour à l'équilibre. Plus on sera proche du seuil, plus ce temps sera grand (ralentissement critique).

- Enfin la mesure de l'évolution de l'amplitude en fonction du paramètre de contrôle permet souvent d'établir un "scaling" qui représente la dépendance du nouvel état d'équilibre avec les paramètres du système (figure 7.5).

Dans la figure 7.6, on représente la famille d'instabilités liées à celle de Rosenzweig. On place le ferrofluide dans une cellule de Hele-Shaw (2 plaques, infiniment grandes devant l'écart entre elles, entre lesquelles se trouve le fluide), puis on soumet ce ferrofluide à un champ magnétique avec différentes caractéristiques (oscillants, transverses, etc...). Selon le type excitation magnétique, la géométrie des modes instables du fluide sera plus ou moins complexe.

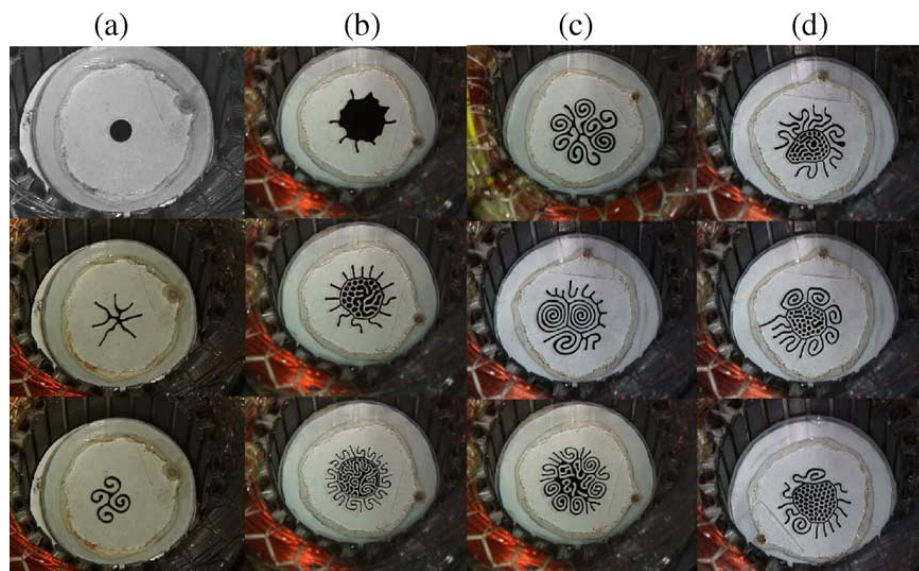


FIGURE 7.6: Une goutte de ferrofluide entre des plaques de verre Hele – Shaw avec un intervalle de 1.1 mm et des champs magnétiques continus (de 0 à 250 Gauss). (a) un champ continu vertical est d’abord appliqué pour former un motif en labyrinthe et un motif en spirale; (b) un champ azimuthal tournant dans le sens inverse des aiguilles d’une montre est initialement appliqué; la configuration continue de la tache de fluide subit une bifurcation brusque en une configuration de gouttes discrètes; (c) divers états finaux de spirales, et (d) de gouttelettes. [15]



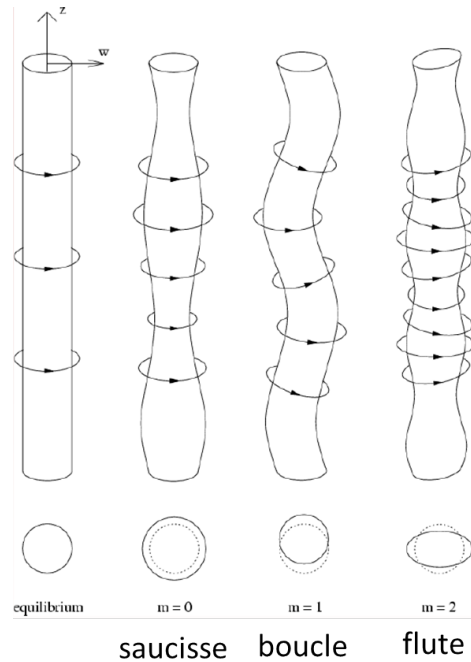


FIGURE 7.7: Différentes configurations des instabilités qui peuvent apparaître. L’instabilité axisymétrique ( $m = 0$ ) est l’instabilité saucisse, les autres son successivement l’instabilité boucle, puis l’instabilité flûte.

### 7.3.5 Stabilité du z-pinch

Si on reprends la configuration de confinement z-pinch vu dans le chapitre précédent, on peut réaliser une étude de stabilité linéaire. Cette étude qui sera faite PC montre que le plasma peut subir une multitude d’instabilités avec des topologies angulaires différentes ( $m = 0$  : axisymétrique,  $m = 1$  : un noeud selon  $\theta$ ,  $m = 2$  : 2 noeuds, etc...). Selon les paramètres du système, certaines de ces instabilités seront plus susceptibles d’apparaître.

### 7.3.6 Un mot sur la l’instabilité magnétorotationnelle

Les disques protoplanétaires (protostellaires, protoplanétaires, d’accrétion, galactiques, ...) sont composés de plasma, de gaz neutre et de poussière en orbite autour d’objets massifs (étoiles, trou noir,...). L’accrétion de ces disques entraîne l’apparition de nouvelles étoiles, de systèmes planétaires ou de galaxies. En première approximation, la matière du disque est à l’équilibre entre la gravitation issue de l’objet central et la force centrifuge. Or la conservation du moment cinétique tend à maintenir cet équilibre et donc à faire tourner ces disques indéfiniment. Le transport du moment cinétique est donc fondamental pour comprendre le mécanisme d’accrétion.

L’accrétion du gaz vers l’objet central nécessite donc un processus physique capable d’extraire le moment angulaire de la matière en rotation et de briser l’équilibre entre la

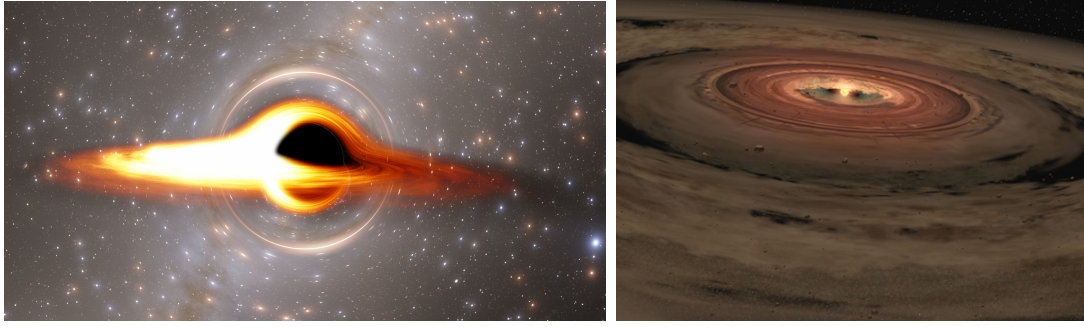


FIGURE 7.8: A gauche, disque d'accrétion autour d'un trou noir. Au droite image d'un disque protoplanétaire.

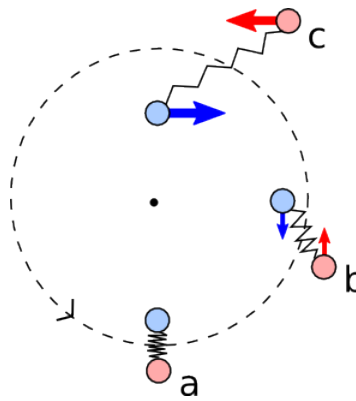


FIGURE 7.9: Schéma du mécanisme de l'instabilité magnétorotationnelle. La force magnétique transporte le moment cinétique entre les particules  $I$  et  $J$

gravitation et la force centrifuge. Comme le disque est soumis à la 3ème loi de Kepler, il tourne avec un champ de vitesse laminaire dépendante de l'orbite. Dès lors, le seul processus pour transporter le moment cinétique est la diffusion visqueuse, cependant ce mécanisme donne des temps d'accrétion trop grand de plusieurs ordres de grandeurs pour expliquer les observations ( $\tau_{diff} \gg \tau_{mes}$ ). Il faut donc introduire un autre phénomène permettant le transport du moment cinétique : l'instabilité magnétorotationnelle.

Dans un disque de plasma en rotation autour d'un objet central, un champ magnétique perpendiculaire au plan de rotation va créer une force magnétique (proportionnelle à la distance comme un ressort) entre les particules fluides du plasma. Dès lors sous certains conditions le système est instable.

Considérons 2 particules fluides  $I$  et  $J$  initialement sur le même rayon. Le champ magnétique crée une force de rappel entre les deux particules proportionnelle au déplacement.

Si une perturbation écarte ces particules (comme le ferait une onde d'Alfvén), elles se retrouvent alors à deux rayons différents.  $I$  est sur un rayon plus petit, dès lors, pour conserver son moment cinétique, sa vitesse angulaire augmente. Au contraire,  $J$  se retrouve sur un plus grand rayon et sa vitesse angulaire diminue. A l'instant suivants,

la distance entre les particules  $I$  et  $J$  a augmenté et la force de rappel magnétique augmente. Elle exerce alors un couple qui fait diminuer le moment cinétique de  $I$  et qui fait augmenter celui de  $J$ . Ce phénomène transporte bien le moment cinétique. Cette instabilité découverte théoriquement par Balbus et Hawley [16] dans les années 90 est un des mécanismes privilégiés pour expliquer l'accrétion des disques protoplanétaires. Cependant, elle fait encore l'objet de recherche, car personne ne l'a observé expérimentalement en laboratoire à ce jour.

# Bibliographie

- [1] Lionel Alexander Bethune Pilkington. Review lecture : the float glass process. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 314(1516) :1–25, 1969.
- [2] Julius Hartmann and Freimut Lazarus. *Hg-dynamics*. Levin & Munksgaard Copenhagen, 1937.
- [3] Hannes Alfvén. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, 150(3805) :405–406, 1942.
- [4] S. Galtier. *Magnétohydrodynamique*. Vuibert, 2013.
- [5] P.A. Davidson. *Introduction to Magnetohydrodynamics, Second Edition*. Cambridge, 2017.
- [6] J.D. Jackson. *Electrodynamique classique*. Dunod, 2001.
- [7] Bruce T Tsurutani and Walter D Gonzalez. The interplanetary causes of magnetic storms : A review. *Magnetic storms*, 98 :77–89, 1997.
- [8] Steven A Balbus and John F Hawley. Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks. *Reviews of modern physics*, 70(1) :1, 1998.
- [9] Gary A Glatzmaiers and Paul H Roberts. A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*, 377(6546) :203–209, 1995.
- [10] CNRS. L'expérience d'oersted.
- [11] CNRS. Les lois de l'électrodynamique.
- [12] CNRS. Créer de l'électricité avec le magnétisme ? la découverte de l'induction.
- [13] CNRS. La loi d'ohm : la délicate genèse d'une loi "simple".
- [14] Arnaud CHIFFAUDEL CEA Saclay Cécile GASQUET, Damien ERICHER. Mesure de vitesse dans le sodium par velocimétrie ultrasonore.
- [15] Cory Lorenz and Markus Zahn. Hele-shaw ferrohydrodynamics for rotating and dc axial magnetic fields. *Physics of Fluids*, 15(9) :S4–S4, 2003.
- [16] Steven A Balbus and John F Hawley. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. i-linear analysis. ii-nonlinear evolution. *The Astrophysical Journal*, 376 :214–233, 1991.
- [17] J. Ferreira. Magnétostatique, 2012.

- [18] R. Feynman. *Electromagnétisme 1*. Dunod, 1968.
- [19] Carles R. Fleckinger R. Pérez, J.P. *Electromagnétisme*. Dunod, 2009.