TD n° 2 : Estimation probabiliste de fiabilité des systèmes

Master Ingénierie du Véhicule Electrique
Année 2021-2022
B. Monsuez

Manipulation des grandeurs dénotant la fiabilité d'un système

Manipulation des grandeurs dénotant la fiabilité d'un système

Exercice 1 : Transformation et manipulation des probabilités

Question 1 : Sachant que le Mean Time To Failure est définit comme MTTF$\equiv \int_0^\infty t\, f(t)dt$, démontrez que pour $\lim_{t\to\infty} t\, R(t) = 0$, il est possible d'avoir la formule :

$$\text{MTTF}\equiv \int_0^\infty R(t)dt$$

est vérifiée. (Pensez à faire une intégration par partie).

Correction de la Question 1 :

Nous savons que :

$$F(t) = 1 - R(t)$$

$$\int_0^t f(u)du = F(t)$$

Nous effectuons une intégration par partie et nous procédons à la simplification des expressions :

$$\int_0^t u\, f(u)du \;=\; [uF(u)]_0^t - \int_0^t F(u)du$$

$$= [uF(u)]_0^t - \int_0^t (1 - R(u))du$$

$$= [uF(u)]_0^t - \int_0^t dt \;+\; \int_0^t R(u)du$$

$$= tF(t) - t + \int_0^t R(u)du$$

$$= t(F(t) - 1) + \int_0^t R(t)dt$$

$$= -tR(t) + \int_0^t R(t)dt$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t u\, f(u)du = \lim -tR(t) + \int_0^t R(t)dt = \lim_{t\to+\infty} -tR(t) + \lim_{t\to+\infty} \int_0^t R(t)dt$$

$$= 0 + \lim_{t\to+\infty} \int_0^t R(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt$$

Question 2 : Sachant que le Mean Time To Repair est définit comme MTTR≡ $\int_0^\infty t\, g(t)dt$, démontrez que pour $\lim_{t\to\infty} t\, \overline{G}(t) = 0$, il est possible d'avoir la formule :

MTTR≡ $\int_0^\infty t\, \overline{G}(t)dt$

Correction de la question 2 : Nous effectuons exactement de la même manière une intégration par partie et nous procédons à la simplification des expressions en partant cette fois des équations suivantes :

$$\bar{G}(t) = 1 - G(t)$$

$$\int_0^t g(u)du = G(t)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\int_0^t u\, g(u)du = [uG(u)]_0^t - \int_0^t G(u)du$$

$$= [uG(u)]_0^t - \int_0^\infty (1 - \bar{G}(t))dt$$

$$= tG(t) - \int_0^t du + \int_0^t \bar{G}(t)du$$

$$= tG(t) - t + \int_0^\infty \bar{G}(u)du$$

$$= t(G(t) - 1) + \int_0^\infty \bar{G}(t)dt = -t\bar{G}(t) + \int_0^t \bar{G}(u)du$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\int_0^t u\, g(u)du &= \lim_{t\to+\infty} -t\bar{G}(t) + \int_0^t \bar{G}(u)du \\ &= \lim_{t\to+\infty} -t\bar{G}(t) + \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \bar{G}(u)du \\ &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \bar{G}(u)du = \int_0^{+\infty}\bar{G}(t)dt\end{aligned}$$

Question 3 : Montrer que le niveau de disponibilité est toujours supérieur au niveau de fiabilité. Montrer que le niveau d'indisponibilité est toujours plus petit que le niveau de défaillance. Justifier de manière informelle ces résultats.

Correction de la question 3 : Pour un système dit-non réparable, la fiabilité est égale à la disponibilité. En effet, tant que le système fonctionne, il est capable de fournir le service. Donc nous avons bien dans ce cas que la probabilité que le système à l'instant t soit disponible qui est égal à ce que le système ne soit pas tombé en panne depuis le début de son fonctionnement.

$$A(t) = R(t)$$

Si nous considérons un système qui est réparable, ce qui correspond à l'ensemble des systèmes, nous avons comme propriété que la probabilité à un instant que le système soit disponible est égale à :

- La probabilité que le système ne soit pas tombé en panne depuis le début du fonctionnement
- La probabilité que le système soit tombé en panne à un instant u ie. $f(u)$, que ce système ait été réparé entre l'instant u et v ie. $g(v-u)$ et que ce système ne soit pas tombé en panne entre l'instant v et l'instant $r(t-v)$.

Donc pour un système ayant connu au moins une réparation nous ajoutons à $R(t)$ la disponibilité suite à la réparation d'une panne :

$$A(t) = R(t) + \int_0^t \int_u^t f(u)g(v)r(t-v)dvdu$$

Nous avons ainsi démontré que pour un système réparable, la disponibilité est toujours supérieure ou égale à la fiabilité.

Exercice 2 : Estimation du niveau de disponibilité d'une batterie

Nous supposons que nous avons une batterie de conception modulaire dont les éléments peuvent être changés indépendamment les uns des autres. Nous supposons qu'une batterie est composée de 20 de ces éléments.

Nous supposons que ces relations ont été démontrées :

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t r(u)du}$$

$$R(t) = e^{-\int_0^t r(u)du}$$

$$f(t) = r(t)e^{-\int_0^t r(u)du}$$

Question 1 Nous supposons que nous avons un taux de défaillance constant appelé λ, calculer le MTTF à partir de λ.

Correction de la Question 1 :

Pour un taux de panne λ, les grandeurs $r(t)$, $F(t)$, $R(t)$ et $f(t)$ se simplifient en :

$$F(t) = 1 - e^{\int_0^t \lambda du} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$
$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda du} = 1 - e^{-\lambda t}$$
$$f(t) = \lambda(1 - e^{-\lambda t})$$

Nous savons que :

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\int_0^t \lambda du} = 0$$

Ce qui nous permet de calculer le MTTF à partie de la fonction établie par l'exercice précédent :

$$\mathrm{MTTF} = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \lambda du} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\int_0^t \lambda du} dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt$$

$$= \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

Question 2 Nous supposons avoir un taux de réparation constant que nous notons μ, calculer le MTTR à partir de μ.

Correction de la Question 2 :

Par analogie, nous supposons les formules suivantes établies :

$$m(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}$$

$$G(t) = 1 - e^{-\int_0^t m(u)du}$$

$$\bar{G}(t) = e^{-\int_0^t m(u)du}$$

$$g(t) = m(t)e^{-\int_0^t m(u)du}$$

Pour un taux de réparation μ constant, les grandeurs $m(t)$, $G(t)$, $\bar{G}(t)$ et $g(t)$ se simplifient en :

$$G(t) = 1 - e^{\int_0^t \mu du} = 1 - \ (1 - \ e^{-\mu t}) = \ e^{-\mu t}$$
$$\bar{G}(t) = e^{-\int_0^t \mu du} = 1 - \ e^{-\mu t}$$
$$g(t) = \mu(1 - \ e^{-\mu t})$$

Nous savons que :

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\int_0^t \mu du} = 0$$

Ce qui nous permet de calculer le MTTF à partie de la fonction établie par l'exercice précédent :

$$\text{MTTF} = \int_0^\infty \bar{G}(t)dt = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \mu du}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\int_0^t \mu du}dt = \int_0^\infty e^{-\mu t}dt$$

$$= \left[\frac{e^{-\mu t}}{-\mu}\right]_0^\infty = \frac{1}{\mu}$$

Nous supposons que le MTTF d'un élément de la batterie est de deux ans. Nous supposons que le MTTR d'un élément de la batterie (temps d'intervention pour remplacer l'élément) est de 30 minutes.

- Déterminez les valeurs λ et μ.
- Déterminez le niveau de fiabilité de la batterie sur un an et sur 5 ans.
- Déterminez le niveau d'indisponibilité de la batterie sur un an et sur 5 ans.
- Déterminez le nombre d'interventions nécessaires sur la batterie pour une période de 5 ans.
- Vérifiez que le niveau d'indisponibilité est bien plus petit que le niveau de dysfonctionnement de la batterie.

Applications numériques pour la fiabilité

- λ et μ doivent être exprimées dans la même unité de mesure. Ici le MTTF est exprimée ne années, le MTTR en minutes. Il faut choisir une unité commune, par exemple en nombre d'heures. Dans ce cas nous avons :
- $\lambda = 5{,}71 \ \ 10^{-5} \ \ h^{-1}$
- $\mu = 2 \ h^{-1}$

- Pour les niveaux de fiabilités, nous avons :
- $R(8760) = 0{,}61$
- $R(43800) = 8{,}21\ 10^{-2}$

Calcul de la disponibilité et de l'indisponibilité

Nous rappelons les définitions de l'indisponibilité, ie. la probabilité que le système soit dans l'état de faute à l'instant t quand le système était en fonctionnement à l'instant 0.

$$Q = \Pr\{x(t) = 1 \mid N_0\} = 1 - A(t)$$

Comme $A(t) \geq R(t)$, nous avons $U(t) \leq F(t)$.

Pour effectuer les calculs, nous avons besoin d'introduire deux nouvelles notions :

<u>L'intensité de panne (failure intensity) :</u>

$$w(t)dt = \Pr\{\bar{N}_{[t,t+dt]} | N_0\}$$

C'est à la dire la probabilité que dans le système soit juste en faute pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$. Pour un système non-réparable, nous avons :

$$w(t) = f(t)$$

<u>Le nombre de pannes attendu (Expected Number of Failures) :</u>

$$W(t, t + dt) = \sum_{i=1}^{\infty} i \times Pr[i \text{ pannes dans l'intervalle de temps } [t, t + dt] | N_0\}$$

Qui indique quelle est la probabilité d'avoir une panne dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$, que ce soit la première, la deuxième, la troisième panne, ainsi de suite.

Comme du fait de l'absence de réparation immédiate, il ne peut se produire qu'une seule panne dans l'intervalle $[t, t + dt]$,

$$W(t, t + dt) = w(t)dt$$

Par extension, nous avons le nombre de pannes attendu sur l'intervalle de temps $[a, b]$ comme étant :

$$W(a, b) = \int_a^b w(t)dt$$

<u>L'intensité de réparation (repair intensity)</u>

$$v(t)dt = \Pr\{\bar{F}_{[t,t+dt]} | N_0\}$$

C'est à la dire la probabilité que dans le système ne soit plus en faute pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$. Pour un système non-réparable, nous avons :

$$v(t) = 0$$

Le nombre de réparations attendu (Expected Number of Repairs) :

$$V(t, t+dt) = \sum_{i=1}^{\infty} i \times Pr[i\ réparations\ dans\ l'intervalle\ de\ temps\ [t, t+dt]|N_0\}$$

Qui indique quelle est la probabilité d'avoir une réparation dans l'intervalle de temps $[t, t+dt]$, que ce soit la première, la deuxième, la troisième réparation, ainsi de suite.

Comme du fait de l'absence de réparation immédiate, il ne peut se produire qu'une seule réparation dans l'intervalle $[t, t+dt]$,

$$V(t, t+dt) = v(t)dt$$

Par extension, nous avons le nombre de réparations attendu sur l'intervalle de temps $[a, b]$ comme étant :

$$V(a, b) = \int_a^b v(t)dt$$

Formules de calcul des intensités de pannes et de réparations

Considérons désormais l'intensité de pannes, cette intensité pour un intervalle de temps infinitésimal $[t, t+dt]$ est donné par la probabilité de première faute sur cet intervalle $f(t)dt$ mais aussi par la probabilité qu'une faute se soit produit à l'instant t après qu'une réparation ait eu lieu à l'instant u, u étant un instant entre 0 et t, ceci étant donné par $f(t-u)v(u)du$ où $f(t-u)$ correspond à la probabilité de faute sachant que le composant a été réparé à l'instant u, et $v(u)$ donne l'intensité de réparation, c'est-à-dire la probabilité que le composant a bien été réparé à l'instant u. Il ne reste plus qu'à faire varier u entre 0 et t, ce qui nous donne la formule suivante :

$$w(t)dt = f(t)dt + \int_0^t f(t-u)v(u)du$$

Par analogie, nous considérons l'intensité de réparation pour l'intervalle infinitésimal allant de $[t, t+dt]$. Pour qu'il y ait réparation, il faut qu'à un instant u compris entre 0 et t, le système soit tombé en panne, cette information nous est donné par $w(u)$. Maintenant, la réparation doit se terminer dans l'intervalle $[t, t+dt]$, cette information nous est donné par $g(t-u)$ qui indique la probabilité que le système ait été réparé au bout du temps $t-u$. ne reste plus qu'à faire varier u entre 0 et t, ce qui nous donne la formule suivante :

$$v(t)dt = \int_0^t g(t-u)w(u)du$$

L'indisponibilité

Si nous considérons $x_{0,1}(t)$ (passage de l'état normal à l'état de faute) et $x_{1,0}(t)$ (passage de l'état de faute à l'état normal) le nombre de pannes et le nombre de réparations, nous pouvons définir le nombre de systèmes en cours de réparations comme étant :

$$x(t) = x_{0,1}(t) - x_{1,0}(t)$$

Les expressions définissants disponibilités et indisponibilités peuvent dont être réécrites comme suit :

$$A(t) = Pr\{x(t) = 0|N_0\} = Pr\{x_{0,1}(t) - x_{1,0}(t) = 0\ |N_0\}$$

$$U(t) = Pr\{x(t) = 1|N_0\} = Pr\{x_{0,1}(t) - x_{1,0}(t) = 1\ |N_0\}$$

De fait, $x_{0,1}(t)$ correspond à la fonction $W(0,t)$ et $x_{1,0}(t)$ à la fonction $x_{0,1}(t)$, nous pouvons ainsi réécrire les équations précédentes en :

$$U(t) = W(0,t) - V(0,t)$$

Et par extension :

$$U(t) = \int_0^t |w(u) - v(u)| du$$

Calcul de l'indisponibilité en fonction de $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$

Après intégration, nous avons :

$$w(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda^2}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$
$$v(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

Qui nous donne ensuite :

$$W(0,t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}\ t + \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)^2}\ [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}]$$
$$V(0,t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} t - \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}]$$

Pour obtenir finalement :

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\ e^{-(\lambda + \mu)t}$$
$$Q(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}]$$

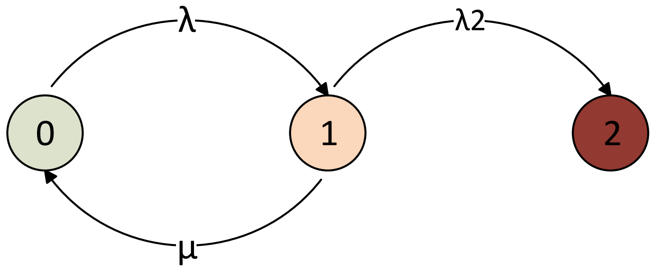
Ce qui est intéressant, c'est qu'en $+\infty$ nous obtenons les limites suivantes :

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1/_{\lambda}}{1/_{\lambda} + 1/_{\mu}} = \frac{\mathrm{MTTF}}{\mathrm{MTTF} + \mathrm{MTTR}}$$
$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{1/_{\mu}}{1/_{\lambda} + 1/_{\mu}} = \frac{\mathrm{MTTR}}{\mathrm{MTTF} + \mathrm{MTTR}}$$

Question 3 Au fonctionnement normal de la batterie, nous considérons désormais la possibilité que lorsqu’une opération d’échange se produise, la batterie puisse-t-être endommagé par un court-circuit. Dans ce cas de figure la batterie ne pourra plus être réparée. Pour simplifier, nous supposons que la probabilité de détérioration de la batterie lors de l’intervention est constante et qu’elle correspond à un taux de 1/1000.

- Construisez le diagramme de dégradation de la batterie.
- Déterminez la probabilité de destruction de la batterie sur une période de 5 ans.

Le diagramme de défaillance du système est le suivant :



Nous considérons que nous avons à chaque intervention une perte de 1/1000 des batteries. Nous devons déterminer le nombre d’interventions, ce qui nous est donné par $V(0,t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}t - \frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}]$. Nous multiplions ce nombre d’interventions par le nombre la probabilité de destruction par intervention, ce qui nous donnera une estimation du nombre de batteries qui seront perdue.

Pour une période de 5 ans, ceci nous donne 2,5 10^{-3} comme probabilité de perte complète de la batterie suite à une intervention.

Arbre de défaillance

Exercice 3** : **Réalisation d’un arbre de défaillance à partir d’une situation actuelle

Nous supposons que nous avons un système d’entrée par des feux sur une voie rapide automatisée (ie. Une fois injectée sur la voie, le véhicule est conduit automatiquement).

Nous supposons que pour une raison quelconque le feu d’accès à la voie rapide automatisée reste très longtemps au rouge (ce qui laisserait supposer un dysfonctionnement), que le trafic est excessivement dense et en conséquence, un conducteur décide d’ignorer ce feu et de s’insérer dans le trafic de la voie rapide automatisée.

Question 1 : Faite l’analyse des séquences d’évènements possibles pouvant amener :

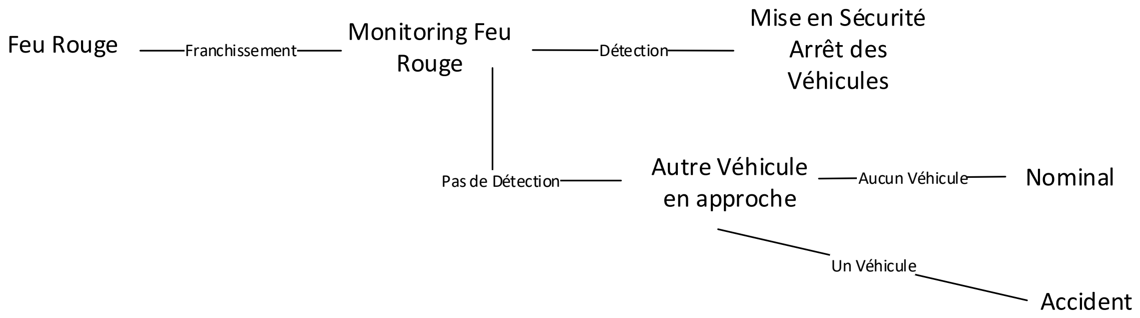
-. Soit à une insertion réussie dans le flux des véhicules,

-. Soit à une mise en sécurité du système (le véhicule entrant et le véhicule sur la voie rapide sont stoppés à temps.

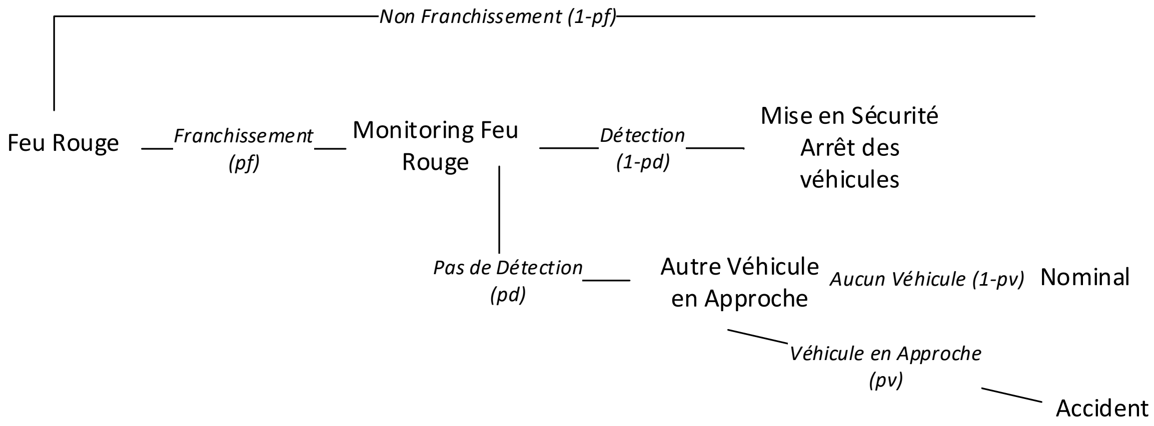
-. Soit à une collision.

Dans un premier temps, construire l’arbre d’évènement associé à cette situation. Une fois, cet arbre d’évènement construit, construisez l’arbre de défaillance associé à cette situation.

Réalisation de l'arbre d'évènement



Pour passer à l'arbre de faute, il est nécessaire d'associer une probabilité à chacune des transitions possibles :



On trouve en conséquence que la probabilité d'accident est de $p_f p_d p_v$.