ÉCOLE DES ONDES

Problèmes inverses en propagation d'ondes

Modélisation du problème direct par approximation de Born + Rais

E. Bécache*

Novembre 1995

Table des matières

*. INRIA, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, BP 105, F-78153 Le Chesnay Cédex

1 Introduction

La méthode MBTT est utilisée par Chavent-Plessix [4] pour inverser des données réelles en sismique marine et est présentée dans ce cours par R.E. Plessix. Dans leur approche, ils modélisent le problème direct par une approximation de Born + rais et l'objectif de ce cours est de présenter en détail cette modélisation. Un deuxième point sera abordé dans l'exposé oral et nous renvoyons aux notes de cours de R.E. Plessix pour une présentation écrite : il s'agit du calcul de la dérivée des temps de parcours, par la méthode de l'état adjoint, qui est nécessaire pour déterminer le gradient de la fonction coût. Le champ de pression calculé qu'on doit comparer au champ observé en plusieurs récepteurs vérifie l'équation des ondes. Dans la première partie, on présente l'approximation de Born qui est une linéarisation de l'équation des ondes autour d'un milieu de vitesse régulier. La deuxième partie est consacrée à la présentation de la méthode de rayons. Elle s'appuie sur le comportement asymptotique haute fréquence de la solution et est bien adaptée dans le cas d'un milieu de propagation lisse, ce qui est le cas après avoir fait la linéarisation de Born.

Dans un premier temps, on fera des rappels sur la représentation de la solution dans le cas homogène. Puis on présentera l'approximation dans le cas hétérogène. La solution est essentiellement caractérisée par deux termes : la phase (ou encore temps de parcours), solution de l'équation Eikonale, et l'amplitude, solution d'une équation de transport. On verra enfin comment utiliser cette approximation pour déterminer le champ de pression aux récepteurs.

2 Approximation de Born

Cette approximation permet de ramener le calcul de la solution de l'équation des ondes dans un milieu de vitesse donné à un calcul dans un milieu de référence qu'on peut alors choisir régulier en considérant la différence entre les deux milieux comme une perturbation.

On considère l'équation des ondes

$$\frac{1}{K}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla.(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} u) = F(x,t) \tag{2.1}$$

où K est relié à la vitesse par la relation $K = \rho c^2$. Pour simplifier on supposera que la densité du milieu ρ est constante et égale à 1 et on définit la lenteur $\nu = \frac{1}{c}$. L'approximation de Born consiste à linéariser l'équation des ondes autour d'un milieu régulier caractérisé par K_s :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_s} + \delta k. \tag{2.2}$$

la perturbation δk représentant alors la partie rugueuse de la vitesse qui crée l'onde diffractée. On notera u_I l'onde "incidente" se propageant dans le milieu régulier

$$\frac{1}{K_s}\frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2} - \Delta u_I = F(x,t) \tag{2.3}$$

et $u_D \equiv \delta u = u - u_I$ l'onde diffractée due à la perturbation δk. En injectant (2.2) dans l'équation (2.1), l'onde totale u vérifie l'équation suivante

$$\frac{1}{K_s}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = F(x,t) - \delta k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.4}$$

ce qui donne pour le champ diffracté

$$\frac{1}{K_s}\frac{\partial^2 u_D}{\partial t^2} - \Delta u_D = -\delta k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

On peut remarquer que le champ inconnu u apparaît au second membre de (2.5).

Avant d'introduire l'approximation de Born, on va exprimer ces solution à l'aide de la solution élémentaire du milieu régulier et définir l'opérateur de Born (voir Lambaré [9]).

Solution élémentaire : G_s

C'est la solution de l'équation des ondes dans le milieu régulier due à une force ponctuelle en espace et en temps :

$$\frac{1}{K_s}\frac{\partial^2 G_s}{\partial t^2} - \Delta G_s = \delta(x)\delta(t) \tag{2.6}$$

On donnera dans le paragraphe suivant son expression en 2D et en 3D. Toute solution de l'équation des ondes dans le milieu régulier est la convolution de la solution fondamentale et du second membre, ce qui donne en particulier pour les champs u, u_I et u_D les expressions suivantes :

$$u(x,t) = (G_s \overset{(x,t)}{*} (F - \delta k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}))(x,t) \tag{2.7}$$

$$u_I(x,t) = (G_s \overset{(x,t)}{*} F)(x,t) \tag{2.8}$$

$$u_D(x,t) = -(G_s \overset{(x,t)}{*} (\delta k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}))(x,t) \tag{2.9}$$

L'expression (2.7) exprime la solution en fonction de la perturbation mais elle fait apparaître l'inconnue dans le terme de droite, ce qui conduirait, pour en déduire le champ, à une équation intégrale difficile à résoudre.

Opérateur de Born

L'expression (2.9) peut se réécrire, en explicitant le produit de convolution, sous la forme

$$
(2.10) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_D(x,t) &= -\int_V \int_{\mathbf{R}} G_s(x-x',t-t')\delta k(x') \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x',t')dt'dx' \\ &= \int_V \delta k(x') \mathcal{B}_1(x,x',t)dx' \end{aligned} \right.
$$

où $\mathcal{B}_1$ est la fonctionnelle de l'opérateur de Born définie par

$$
(2.11) \qquad \mathcal{B}_1(x,x',t) = -\int_{\mathbf{R}} G_s(x-x',t-t')\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x',t')dt'
$$

Jusqu'ici toutes les expressions obtenues sont exactes. L'approximation de Born consiste à supposer que les perturbations sont assez petites pour qu'on puisse ne tenir compte que du terme du premier ordre. L'expression (2.10) exprime linéairement l'onde diffractée par rapport à la perturbation.

Au premier ordre, on peut alors remplacer le champ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ apparaissant dans la fonctionnelle de Born par le champ incident $\frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}$, ce qui donne l'approximation de Born :

$$
(2.12) \qquad u_D(x,t) \simeq \int_V dx' \delta k(x') \left(-\int_{\mathbf{R}} G_s(x-x',t-t')\frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}(x',t')dt' \right)
$$

Remarque 1 - *Il est facile de voir à partir de (2.12) que le champ diffracté est alors solution de l'équation linéarisée*

$$
(2.13) \qquad \frac{1}{K_s}\frac{\partial^2 u_D}{\partial t^2} - \Delta u_D = -\delta k \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}
$$

3 Approximation haute fréquence : rais

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'approximation haute fréquence de la solution u de l'équation des ondes

$$
(3.1) \qquad \nu^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(t)\delta(x-x_s)
$$

avec des conditions initiales nulles ($u(x,0) = \partial u/\partial t(x,0) = 0$). Elle est basée sur une représentation de la solution sous la forme

$$
(3.2) \qquad u(x,t) = A_S(x)S(t-\tau^S(x))
$$

où $\tau^S(x)$ représente le temps de parcours de la source S au point x et $A_S(x)$ l'amplitude. En fréquences, ça revient à décomposer la solution en une partie fortement oscillante, la phase τ^S, et en une partie plus lisse, l'amplitude :

$$
(3.3) \qquad \hat{u}(x,\omega) = A_S(x)e^{i\omega\tau^S(x)}\hat{S}(\omega)
$$

Dans cette partie, nous rappelons tout d'abord quelques résultats en milieu homogène. Dans ce cas la représentation de la solution se fait à l'aide de la solution fondamentale et en particulier en 3D elle est exactement de la forme (3.2) avec des expressions simples de l'amplitude et du temps de parcours. Nous verrons ensuite comment obtenir dans le cas hétérogène les équations caractérisant le temps de parcours (équation eikonale) et l'amplitude (équation de transport). Les ouvrages auxquels on peut se référer pour cette partie sont bien sûr nombreux, et on se contente ici d'en citer quelques uns [1, 2, 3, 5, 7, 11].

3.1 Quelques rappels en milieu homogène

On suppose dans ce paragraphe que la lenteur ν est constante. Notons $G_\nu(x,t)$ la solution fondamentale vérifiant

$$\nu^2 \frac{\partial^2 G_\nu}{\partial t^2} - \Delta G_\nu = \delta(t)\delta(x) \tag{3.4}$$

qui correspond dans le domaine fréquentiel à $G_\nu(x,\omega)$ solution de

$$-\nu^2\omega^2 G_\nu - \Delta G_\nu = \delta(x) \tag{3.5}$$

3.1.1 Expressions de la solution fondamentale

- **Dans le domaine temporel**

$$G_\nu(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{H(t-\nu|x|)}{(t^2-\nu^2|x|^2)^{1/2}} & \text{en 2D} \\ \dfrac{1}{4\pi|x|}\delta(t-\nu|x|) & \text{en 3D} \end{cases} \tag{3.6}$$

- **Dans le domaine fréquentiel**

$$G_\nu(x,\omega) = \begin{cases} \dfrac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega\nu|x|) & \text{en 2D} \\ \dfrac{1}{4\pi|x|} e^{i\omega\nu|x|} & \text{en 3D} \end{cases} \tag{3.7}$$

3.1.2 Représentation du champ u

La solution u de (3.1) s'exprime alors simplement en fonction de la solution fondamentale :

- **dans le domaine temporel**

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (G_\nu \overset{(x,t)}{*} f(t)\delta(x-x_S))(x,t) \\ &= (G_\nu(x-x_S,.) \overset{(t)}{*} f(.))(t) \end{aligned}$$

ou encore, en remplaçant G_ν par son expression (3.6) :

$$(3.8) \qquad u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \dfrac{H(\tau-\nu|x-x_S|)}{(\tau^2-\nu^2|x-x_S|^2)^{1/2}} f(t-\tau)d\tau & \text{en 2D} \\ \dfrac{1}{4\pi|x-x_S|} f(t-\nu|x-x_S|) & \text{en 3D} \end{cases}$$

– **dans le domaine fréquentiel**

$$(3.9) \qquad \begin{cases} \hat{u}(x,\omega) & = (G_\nu \overset{(x)}{*} \hat{f}(\omega)\delta(x-x_S))(x) \\ & = G_\nu(x-x_S,\omega)\hat{f}(\omega) \end{cases}$$

ou encore

$$(3.10) \qquad \hat{u}(x,\omega) = \begin{cases} \dfrac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega\nu|x-x_S|)\hat{f}(\omega) & \text{en 2D} \\ \dfrac{1}{4\pi|x-x_S|} e^{i\omega\nu|x-x_S|}\hat{f}(\omega) & \text{en 3D} \end{cases}$$

3.1.3 Approximation haute fréquence dans le cas homogène

Cette approximation revient à chercher une solution de (3.1) de la forme (3.2) c'est à dire comme une amplitude $A_S(x)$ multipliée par un potentiel retardé.

- **en 3D**

En 3D, la solution s'exprime exactement sous la forme (3.2), c'est à dire comme une amplitude $A_S(x)$ multipliée par un potentiel retardé. Les expressions de l'amplitude $A_S(x)$, du temps de parcours $\tau^S(x)$ et du signal S sont alors particulièrement simples :

$$(3.11) \qquad \begin{cases} A_S(x) & = \dfrac{1}{4\pi|x-x_S|} \\ \tau^S(x) & = \nu|x-x_S| \\ S(t) & = f(t) \end{cases}$$

Le signal se propage dans ce cas sans déformation.

- **en 2D**

Dans le cas 2D par contre la solution n'est pas un potentiel retardé, mais on va voir que l'approximation haute fréquence de sa transformée de Fourier donne une solution de la forme cherchée (3.2). Cette solution approchée s'obtient à partir de l'approximation haute fréquence de la solution fondamentale.

$\star$ **Approximation de la solution fondamentale 2D**

On applique l'approximation

$$H_0^{(1)}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i(r-\frac{\pi}{4})}(1 + 0(\frac{1}{r})) \text{ si } r \to +\infty$$

à la fonction de Green G_ν, ce qui donne

$$G_\nu(x,\omega) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2\nu|x|}}\sqrt{\frac{\pi}{-i\omega}} e^{i\omega\nu|x|}(1 + 0(\frac{1}{|x|})) \tag{3.12}$$

soit en temps

$$G_\nu(x,t) \simeq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2\nu|x|}}\frac{H(t-\nu|x|)}{(t-\nu|x|)^{1/2}} \tag{3.13}$$

car

$$\sqrt{\frac{\pi}{-i\omega}} = \mathcal{F}_{(t)}[\frac{H(t)}{\sqrt{t}}] \tag{3.14}$$

$\star$ **Approximation du champ u en 2D**

On approche la solution élémentaire par sa limite donnée par (3.12) et on obtient finalement

$$\hat{u}(x,\omega) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2\nu|x-x_S|}}\sqrt{\frac{\pi}{-i\omega}} e^{i\omega\nu|x-x_S|}\hat{f}(\omega) \tag{3.15}$$

c'est à dire

$$\hat{u}(x,\omega) = A_S(x) e^{i\omega\tau^S(x)}\hat{S}(\omega)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_S(x) & = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}\dfrac{1}{\sqrt{|x-x_S|}} \\ \tau^S(x) & = \nu|x-x_S| \\ \hat{S}(\omega) & = \frac{1}{(-i\omega)^{1/2}}\hat{f}(\omega) \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Soit en temps

$$u(x,t) = A_S(x)\ S(t-\tau^S(x))$$

Remarque 2 - *Le terme* $(-i\omega)^{1/2}$ *s'interprète comme une dérivée en temps fractionnaire, d'ordre* $1/2$*. La relation entre la source* f *et le signal* S *s'exprime donc en temps comme :*

$$S^{(1/2)}(t) = f(t) \tag{3.17}$$

On peut aussi l'expliciter grâce à (3.14) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} S(t) & = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{H(t)}{\sqrt{t}} * f(t) \\ & = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int \dfrac{H(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}} f(\tau) d\tau \end{array} \right. \tag{3.18}$$

Remarque 3 - *L'approximation de G_ν par l'expression (3.13) en temps est une bonne approximation de la solution près du front d'onde c'est à dire lorsque $t - \nu|x| << 1$. En effet, dans ce cas on a*

$$(t^2 - \nu^2|x|^2)^{1/2} \simeq \sqrt{2\nu|x|}\sqrt{t - \nu|x|}.$$

3.2 Théorie des rayons

Revenons à l'équation des ondes en milieu hétérogène (3.1) qui devient l'équation de Helmholtz dans le domaine fréquentiel :

$$-\omega^2\nu^2(x)\hat{u}(x,\omega) - \Delta\hat{u}(x,\omega) = \hat{f}(\omega)\delta(x - x_S). \tag{3.19}$$

Par analogie avec le cas homogène, on cherche une solution sous la forme

$$\hat{u}(x,\omega) = A_S(x,\omega)\hat{S}(\omega)e^{i\omega\tau^S(x)} \tag{3.20}$$

où l'amplitude est représentée par un développement asymptotique

$$A_S(x,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A_k(x)}{(-i\omega)^k} \tag{3.21}$$

Remarque 4 - *L'ansatz (3.20) a été utilisé par Keller en 1958 [8] et fournit une bonne approximation loin des caustiques. Depuis d'autres ansatz ont été proposés,[6, 10]..., en particulier pour approcher la solution au voisinage des caustiques.*

En pratique, on ne retiendra que le terme d'ordre 0, $A_0(x)$, qu'on notera par la suite $A_S(x)$, ce qui redonne la forme annoncée (3.2).

Dans (3.20), le terme source $\hat{S}(\omega)$ dépend encore de la dimension et est défini par

$$\begin{cases} S(t) = f(t) & \text{en 3D} \\ S^{(1/2)}(t) = f(t) & \text{en 2D} \end{cases}$$

ce qui peut se résumer par :

$$S^{(1-s)}(t) = f(t)$$

avec

$$s = \begin{cases} 1 & \text{en 3D} \\ 1/2 & \text{en 2D} \end{cases}$$

En injectant (3.20) et (3.21) dans l'équation de Helmholtz (3.19) et en identifiant les termes de même ordre en ω, on obtient

$$|\nabla\tau^S|^2 = \nu^2 \quad \text{Equation eikonale} \tag{3.22}$$

$$2\nabla A_S.\nabla\tau^S + A_S\Delta\tau^S = 0 \quad \text{1ère Equation de transport} \tag{3.23}$$

$$\Delta A_k - 2\nabla A_{k+1}.\nabla\tau^S - A_{k+1}\Delta\tau^S = 0, \quad k \geq 0 \tag{3.24}$$

Comme on l'a annoncé, on ne conserve que le terme d'ordre 0 de l'amplitude qui est régi par l'équation (3.23).

Notons que l'expression approchée (3.20) de la solution fait apparaître deux temps caractéristiques : le temps de parcours $\tau^S(x)$ et le temps caractéristique de la source $< t >= \frac{2\pi}{\omega}$. L'approximation haute fréquence est valable si $\omega\tau^S(x) >> 1$, sinon il apparaît des interférences entre le signal source et le milieu.

On va s'intéresser maintenant plus en détail à la résolution de l'équation eikonale (3.22) puis de l'équation de transport (3.23).

3.2.1 Equation eikonale : calcul de la phase

L'équation eikonale (3.22) régit les temps de parcours de la source S à un point x ou encore les fronts d'onde (ou surfaces d'équiphase : $\tau^S(x) = cte$). La première approche pour la résoudre consiste à déterminer la propagation des fronts d'onde dans le temps. Cette approche est assez couteuse et ne permet pas de déterminer l'amplitude. La deuxième approche est le tracé de rais qui sont les trajectoires orthogonales aux fronts d'ondes. On peut aussi les interpréter comme les bicaractéristiques de l'équation eikonale. Cette deuxième approche permet en plus d'obtenir assez simplement une bonne estimation de l'amplitude.

Supposons le rai paramétré à l'aide de l'abscisse curviligne s et soit $x(s)$ la position d'un point du rai d'abscisse s. La tangente unitaire au rayon $\vec{t} = \dfrac{dx}{ds}$ est par définition orthogonale au front d'onde donc parallèle à $\nabla\tau^S$. On définit le vecteur lenteur $\vec{p} = \nabla\tau^S$. On a donc

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\nu}\vec{p} \tag{3.25}$$

puisque $\vec{p}$ vérifie l'équation eikonale $|\vec{p}| = \nu$. L'équation (3.25) caractérise l'évolution de la tangente au rai, mais ne peut pas être résolue seule. On a besoin aussi de connaître l'évolution de la dérivée du vecteur lenteur. On dérive donc (3.25) :

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\nu\frac{dx}{ds}\right)$$

Par ailleurs, par définition de $\vec{p}$, on a aussi

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\nabla\tau^S(x(s))\right) = \nabla(\nabla\tau^S)\frac{dx}{ds} = \frac{1}{2\nu}\nabla(|\nabla\tau^S|^2)$$

et en utilisant l'équation eikonale :

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \nabla\nu \tag{3.26}$$

Cette équation régissant l'évolution normale du rai est appelée équation de courbure. Les équations régissant l'évolution du rai forment donc un système differentiel en la variable $(x(s), \vec{p}(s))$ et permet de déterminer en même temps le temps de parcours, en remarquant que

$$\frac{d\tau^S}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\tau^S(x(s))\right) = \nabla\tau^S.\frac{dx}{ds} = \vec{p}.\frac{1}{\nu}\vec{p} = \nu.$$

Le système à résoudre est finalement le suivant :

$$(3.27)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{1}{\nu}\vec{p} \\ \dfrac{d\vec{p}}{ds} = \nabla\nu \\ \dfrac{d\tau^S}{ds} = \nu \end{cases}$$

avec des conditions initiales

$$(3.28)\qquad \begin{cases} x(0) = x_S \\ \vec{p}(0) = \vec{p}_S \\ d\tau^S(0) = 0 \end{cases}$$

en supposant que l'abscisse $s = 0$ correspond au point source et que la direction initiale du rayon est donnée par le vecteur $\vec{p}_S$.

3.2.2 Equation de transport : détermination de l'amplitude

Pour déterminer complètement l'approximation haute fréquence de la solution

$$u(x,t) = A_S(x)S(t - \tau^S(x))$$

on doit connaître l'amplitude $A_S(x)$ qui satisfait l'équation de transport (3.23) qu'on peut réécrire de la façon suivante :

$$(3.29)\qquad div(A_S^2\nabla\tau^S) = 0$$

Si on intègre (3.29) sur une surface fermée Σ en 2D ou sur un volume fermé Σ en 3D, on obtient

$$\int_{\partial\Sigma} A_S^2\nabla\tau^S.\vec{n}d\sigma = 0$$

On va choisir une surface (ou volume) particulière liée au tracé de rais : un tube de rais. Le calcul est d'abord expliqué en détail en 2D, et on se contentera de donner le résultat en 3D, le raisonnement étant analogue.

Amplitude en 2D

On considère un rai central issu du point S défini par $(x(s), \vec{p}(s))$ entouré de rais infiniment voisins obtenus à partir de variations infinitésimales des paramètres du rai. On suppose que l'angle délimitant les rais extrêmes est $\delta\phi$. On définit S_1 (resp. S_2) la courbe formée des points ayant pour abscisse curviligne

FIG. 3.1 - *faisceau de rais issu de S*

s_1 (resp. s_2) et Γ_1, Γ_2 les bords latéraux du faisceau de rais, délimités par S_1 et S_2 (voir figure 3.1).

Etant donné que $\vec{p} = \nabla \tau^S$ est tangent au rai, la contribution des courbes Γ_1 et Γ_2 à l'intégrale est nulle. Il reste :

$$\int_{S_1} A_S^2 \vec{p}.\vec{n} dl_1 + \int_{S_2} A_S^2 \vec{p}.\vec{n} dl_2 = 0$$

On introduit α l'angle entre la direction du rayon et la normale à la courbe S et on suppose que les variations sont suffisament petites pour approcher la fonction dans l'intégrale par sa valeur au rai central :

$$A_S^2(s_1)\nu(s_1) cos\alpha_1 dS_1 = A_S^2(s_2)\nu(s_2) cos\alpha_2 dS_2$$

ce qui donne

$$A_S(s_2) = A_S(s_1)\sqrt{\frac{\nu(s_1) cos\alpha_1 dS_1}{\nu(s_2) cos\alpha_2 dS_2}} \tag{3.30}$$

Ceci peut être exprimé en fonction de la divergence géométrique $J_{2D} = cos\alpha dS/\delta\phi$

$$A_S(s_2) = A_S(s_1)\sqrt{\frac{\nu(s_1)}{\nu(s_2)}}\sqrt{\frac{J_{2D}(s_1)}{J_{2D}(s_2)}} \tag{3.31}$$

L'amplitude dépend donc de la manière dont le tube s'élargit ou se rétrécit. Afin d'obtenir une expression approchée de l'amplitude en un point donné, on suppose que le point s_1 se trouve dans un voisinage de la source et que le milieu est homogène dans ce voisinage. On connaît alors l'expression de l'amplitude en s_1 (voir (3.16))

$$A_S(s_1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu(s_1)}} \frac{1}{s_1}$$

et les rayons étant droits dans ce voisinage, S_1 est une portion de cercle, $\alpha_1 = 0$ et $dS_1 = s_1 \delta\phi$. En remplaçant dans (3.31) on obtient donc

$$A_S(s_2) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu(s_2)}} \frac{1}{\sqrt{J_{2D}(s_2)}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu(s_2)}} \frac{\sqrt{\delta\phi}}{\sqrt{cos\alpha_2 dS_2}} \tag{3.32}$$

Remarque 5 - *La longueur $cos\alpha_2 dS_2$ correspond approximativement à la section du tube par le front d'onde en s_2.*

Remarque 6 - *Si on approche la divergence géométrique en s_2 par la valeur qu'elle aurait en milieu homogène $J_{2D}(s_2) \simeq s_2$, on obtient une approximation de l'amplitude (assez grossière) :*

$$A_S(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu(x)}} \frac{1}{\sqrt{|x - x_S|}} \tag{3.33}$$

Amplitude en 3D

Le raisonnement est le même qu'en 2D mais ici le faisceau de rais est un volume, l'angle $\delta\phi$ désigne l'angle solide du faisceau et on obtient :

$$A_S(s_2) = A_S(s_1) \sqrt{\frac{\nu(s_1) dS'_1}{\nu(s_2) dS'_2}} = A_S(s_1) \sqrt{\frac{\nu(s_1)}{\nu(s_2)}} \sqrt{\frac{J_{3D}(s_1)}{J_{3D}(s_2)}} \tag{3.34}$$

où dS' désigne la surface de la section du tube par le front d'onde en s et $J_{3D}(s) = dS'(s)/\delta\phi$. On prend maintenant de nouveau s_1 très proche de la source ce qui permet d'expliciter $A_S(s_1) = \frac{1}{4\pi s_1}$ (voir (3.11)), $dS'_1 = s_1^2 \delta\phi$, $J_{3D}(s_1) = s_1^2$ et d'obtenir

$$A_S(s_2) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\nu(s_1)}{\nu(s_2)}} \frac{1}{\sqrt{J_{3D}(s_2)}} \tag{3.35}$$

Remarque 7 - *Une première approximation de l'amplitude peut de nouveau être obtenue en approchant la divergence géométrique par sa valeur en milieu homogène*

$$A_S(s_2) \simeq \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\nu(x_S)}{\nu(x)}} \frac{1}{|x - x_S|} \tag{3.36}$$

Remarque 8 - *On peut regrouper les cas 2D et 3D :*

$$A_S(x) = \frac{1}{2(2\pi)^s} \frac{(\nu(x_S))^{s-1/2}}{(\nu(x))^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{J_S(x)}} \tag{3.37}$$

4 Application de l'approximation de Born + rais au calcul du champ de pression

La plupart des notations de cette partie sont identiques à celles du cours de R. E. Plessix. Le problème direct qu'on cherche à résoudre est celui de la détermination du champ de pression u dû à un signal émis par la source S. Ce champ vérifie l'équation des ondes

$$\nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(t)\delta(x - x_S) \tag{4.1}$$

On décompose la lenteur ν en la somme d'une lenteur régulière ν_s et d'une partie rugueuse $\delta\nu$

$$\nu = \nu_s + \delta\nu$$

et le champ de pression en la somme d'un champ incident u_I et d'un champ diffracté u_D

$$u = u_I + u_D$$

obtenus par approximation de Born (voir (2.3) et (2.13)) et solutions des équations

$$\nu_s^2 \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2} - \Delta u_I = f(t)\delta(x - x_S) \tag{4.2}$$

$$\nu_s^2 \frac{\partial^2 u_D}{\partial t^2} - \Delta u_D = -2\nu_s \delta\nu \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2} \tag{4.3}$$

On suppose que les perturbations de lenteur sont reliées à la réflectivité par la relation suivante

$$2\frac{\delta\nu}{\nu_s} = \sum_M r_M \delta(x - x_M) \tag{4.4}$$

où r_M représente la réflectivité au point M et les perturbations sont donc localisées en un ensemble de points M. L'équation (4.3) sur le champ diffracté se réécrit donc

$$\nu_s^2 \frac{\partial^2 u_D}{\partial t^2} - \Delta u_D = -\sum_M \nu_s^2(x_M) r_M \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2} \delta(x - x_M) \tag{4.5}$$

L'approximation haute fréquence du champ incident est alors

$$u_I(x,t) = A_S(x) S(t - \tau^S(x)) \tag{4.6}$$

où τ^S est solution de l'équation eikonale (voir section 3.2.1)

$$|\nabla \tau^S(x)|^2 = \nu_s^2,$$

A_S est l'amplitude (voir section 3.2.2) donnée par

$$A_S(x) = \frac{1}{2(2\pi)^s} \frac{(\nu_s(x_S))^{s-1/2}}{(\nu_s(x))^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{J_S(x)}}$$

et le signal $S(t)$ est relié à la source par

$$S^{(1-s)}(t) = f(t)$$

avec $s = 1/2$ en 2D et $s = 1$ en 3D.

On applique de nouveau l'approximation haute fréquence à la solution de (4.5) qui provient de sources aux points diffractants x_M :

$$u_D(x,t) = -\sum_M \nu_s^2(x_M) r_M A_M(x) F(t - \tau^M(x)) \tag{4.7}$$

où τ^M est le temps de parcours du point M au point x, A_M est l'amplitude donnée par

$$A_M(x) = \frac{1}{2(2\pi)^s} \frac{(\nu_s(x_M))^{s-1/2}}{(\nu_s(x))^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{J_M(x)}}$$

et le signal F est défini par

$$F^{(1-s)}(t) = \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}(x_M, t) \Longleftrightarrow F(t) = \frac{\partial^{s+1} u_I}{\partial t^{s+1}}(x_M, t)$$

ou encore compte tenu de (4.6)

$$F(t) = A_S(x_M) S^{(s+1)}(t - \tau^S(x_M)) = A_S(x_M) f^{(2s)}(t - \tau^S(x_M))$$

d'où finalement

$$u_D(x,t) = -\sum_M \nu_s^2(x_M) r_M A_M(x) A_S(x_M) f^{(2s)}(t - \tau^S(x_M) - \tau^M(x)) \tag{4.8}$$

Les expressions (4.6) et (4.8) sont le point de départ de la modélisation du problème direct utilisée par Chavent et Plessix [4].

Références

[1] M. Balabane and C. Bardos. Equation des ondes : solutions asymptotiques et singularités. Technical report, Cours INRIA, Octobre 1989. Cours sur la propagation d'ondes électromagnétiques - Aspects Mathématiques et Numériques.

[2] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. C. Papanicolaou. *Asymptotic Methods in Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam, 1978.

[3] N. Bleistein. *Mathematical Methods for Wave Phenomena*. computer science and Applied Mathematics. academic press, 1984.

[4] G. Chavent and R. E. Plessix. A time domain derivation of optimal and suboptimal Kirchhoff quantitative migration via a least-square approach. soumis à Geophysics (preprint report INRIA $n°$ 1928, 1993).

[5] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, volume II - PDE. Wiley, 1962,.

[6] A. Erdélyi. *Asymptotic Expansions*. Dover Publ. Co., New York, 1956.

[7] L. Hormander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume I-III. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[8] J.B. Keller. A geometrical theory of diffraction, calculus of variations and its applications. In McGraw-Hill, editor, *Proc. Sympsia Appl. Math.*, volume 8, pages 27–52, New York, 1958.

[9] G. Lambaré. *Inversion linéarisée de données de sismique réflexion par une méthode quasi-newtonienne*. PhD thesis, Université Paris 7, 1991.

[10] D. Ludwig. Uniform asymptotic expansions at a caustic. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, XIX:215–250, 1966.

[11] J. Virieux. Propagation in inhomogeneous media , ray theory. Workshop on Earthquake sources and Regional lithospheric structures from seismic wave data, Nov 1990.