

L'approximation filaire en régime harmonique *

E. Bécache †

1 Introduction

Nous allons présenter plusieurs approches de résolution de problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques par une structure filaire, c'est à dire une structure caractérisée par la petite taille de sa section transversale par rapport à sa longueur et par rapport à la longueur d'onde. Ce type de problèmes se rencontre typiquement lorsqu'on veut faire des calculs d'antennes (champ rayonné ou émis par l'antenne...). Ce sont d'abord des physiciens qui se sont intéressés à ces problèmes depuis les premières expériences de Hertz (1888) en Radioélectricité et les expériences plus spécifiques sur les antennes (Marconi (1895), Popoff...). Nous allons envisager ici uniquement une approche par équations intégrales, et nous renvoyons au cours de Collino qui propose une méthode de couplage éléments finis avec un modèle filaire.

L'objectif des approximations filaires est de remplacer l'équation intégrale complète posée sur la surface du fil par un problème simplifié posé sur l'axe du fil, c'est à dire ne dépendant plus que d'une variable. Pocklington (1897, [33]) a été le premier à proposer une telle modélisation filaire moyennant des hypothèses sur le courant, et à partir d'approximations guidées par la physique. A partir de l'équation établie par Pocklington, de nombreux travaux ont été menés pour proposer des méthodes de résolution soit de l'équation elle-même, soit de variantes [18, 20, 28]... La première analyse mathématique de l'équation de Pocklington est due à D. S. Jones, qui a par ailleurs largement contribué à l'étude des antennes filaires, [22, 21, 23]. Depuis, d'autres mathématiciens se sont penchés sur les modèles filaires proposés par les physiciens pour les analyser et nous en verrons quelques exemples.

Une question qu'il paraît naturel de se poser est de savoir en quel sens les modèles filaires sont proches du modèle complet, et s'il est en particulier possible d'établir des estimations d'erreur entre la solution du modèle filaire et celle du modèle complet ? A notre connaissance, en ce qui concerne les équations de Maxwell, aucune démarche rigoureuse n'a été menée dans ce sens. Par contre, pour le problème simplifié du Laplacien, Rogier [35] a pu établir un modèle filaire à partir de développements de l'équation intégrale complète et il a proposé une analyse mathématique de son modèle (existence et unicité) ainsi que des estimations d'erreur. Ce modèle simplifié est intéressant car il donne déjà une idée des difficultés qu'on peut rencontrer, et permet notamment de retrouver, sur les estimations d'erreur qu'il obtient, les "effets de pointes" bien connus des modèles filaires, c'est à dire la mauvaise approximation aux extrémités du fil. Un autre point original de son approche est qu'il a tenu compte de l'influence de la section transversale : il obtient ainsi deux équations à résoudre, l'une posée sur l'axe du fil et l'autre sur la section transversale. Nous présentons ces résultats dans la première partie 2.

*Ecole des Ondes 99

†INRIA, Domaine de Voluceau-Rocquencourt, BP 105, F-78153 Le Chesnay Cédex

Avant d'aborder les approximations filaires obtenues pour l'électromagnétisme, nous rappelons dans la partie 3 la formulation complète des équations de Maxwell et l'équation intégrale complète. Nous serons alors en mesure de présenter dans la partie 4 les premiers travaux sur l'approximation filaire, initiés par Pocklington. Pour obtenir son équation, il a essentiellement fait l'hypothèse qu'en première approximation le courant est invariant par rotation, et qu'il est porté par la direction de l'axe du fil. La difficulté pour résoudre cette équation sur le plan numérique vient du fait que le noyau est singulier et difficile à calculer (c'est la moyenne du noyau de Green $3D$ sur une section du fil). Nous décrirons deux méthodes numériques qui semblent avoir été parmi les plus couramment utilisées : la méthode de Hallen et la méthode des moments. Aucune de ces méthodes n'a fait l'objet d'une analyse numérique (estimations d'erreur, stabilité...) et si elles suffisent dans de nombreux cas à obtenir une estimation du champ, elles peuvent générer des instabilités. Ce sont ces instabilités qui ont conduit Jones [22] à faire l'analyse mathématique de l'équation de Pocklington et à montrer qu'on ne pouvait pas les attribuer à son éventuel caractère mal posé. Enfin, la dernière partie 5 est consacrée à l'approximation de Mazari [27], obtenue en remplaçant le noyau de Pocklington par un noyau approché qui a l'avantage d'être beaucoup plus facilement manipulable numériquement, et qui par ailleurs garde la même singularité que le noyau de Pocklington (contrairement à la méthode des moments) ce qui est essentiel pour obtenir une équation intégrale bien posée. Elle introduit un cadre fonctionnel bien adapté tant à l'analyse de l'équation continue sous sa forme variationnelle qu'à sa discrétisation par une méthode d'éléments finis. C'est en particulier à notre connaissance la seule approche qui apporte des estimations d'erreur sur ce problème.

2 Le cas simplifié du Laplacien : l'approche de Rogier

Problème invariant par rotation. Dans sa thèse [35], Rogier a étudié le problème du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet sur un filament de longueur finie et de forme délimitée par une surface Γ_ε , de section transverse de taille au plus ε . On cherche donc u_ε , solution du problème suivant :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = g_\varepsilon & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} = O(1/r) & r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

La théorie classique du potentiel consiste à écrire la solution sous la forme d'un potentiel de simple couche de densité q_ε^{ex} (l'indice ex indique qu'il s'agit de la solution exacte)

$$(2.2) \quad u_\varepsilon^{ex}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{|x-y|} q_\varepsilon^{ex}(y) d\gamma(y) \equiv L_\varepsilon q_\varepsilon^{ex}(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon$$

où la densité q_ε^{ex} est solution de l'équation intégrale :

$$(2.3) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{|x-y|} q_\varepsilon^{ex}(y) d\gamma(y) = g_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon$$

L'approximation filaire ne peut pas être obtenue par un simple passage à la limite, en faisant tendre le petit paramètre ε vers 0, car alors le noyau devient fortement singulier, donc non intégrable. L'idée est de faire un développement du noyau par rapport à ε en extrayant la partie principale, ce qui revient essentiellement à écrire la relation $q(y) = (q(y) - q(x))$.

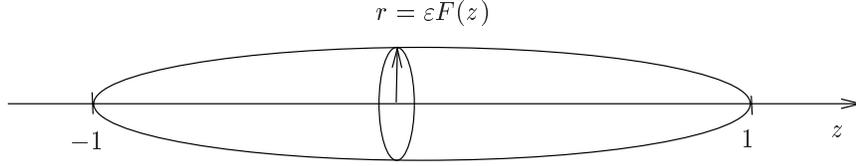


Figure 2.1: fil cylindrique délimité par la courbe F .

Dans un premier temps, on s'intéresse à un fil de géométrie invariante par rotation (plus précisément un filament cylindrique délimité par un cylindre d'équation $r = \varepsilon F(z)$, $z \in I = [-1, 1]$, cf fig. 2.1) et une donnée $g_\varepsilon = g(z)$, ce qui permet d'obtenir une équation intégrale ne portant plus que sur l'axe du fil et dont le noyau dépend encore de ε :

$$(2.4) \quad -\frac{1}{4\pi}Q(z) \ln \left(\frac{\varepsilon^2 F(z)^2}{4(1-z^2)} \right) + \frac{1}{4\pi} \int_I \frac{Q(z') - Q(z)}{|z - z'|} dz' = g(z), \quad z \in [-1, 1]$$

où $Q(z)$ représente une approximation de $2\pi q_\varepsilon^{ex} \varepsilon F(z)$. Pour déterminer la solution en un point $x = (r, \theta, z)$ dans le domaine extérieur, on approche la distance de x à un point y du fil par la distance de x au projeté de y sur l'axe du fil, $|x - y| \approx (r^2 + (z - z')^2)^{1/2}$, et en remplaçant dans (2.2) :

$$(2.5) \quad u_\varepsilon^{ap}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_I \frac{Q(z')}{(r^2 + (z - z')^2)^{1/2}} dz'$$

La formulation variationnelle de l'équation intégrale (2.4)

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4\pi} \int_I Q(z) \psi(z) \ln \left(\frac{\varepsilon^2 F(z)^2}{4(1-z^2)} \right) dz \\ + \frac{1}{8\pi} \int_I \int_I \frac{(Q(z') - Q(z))(\psi(z') - \psi(z))}{|z - z'|} dz dz' = - \int_I g \psi dz, \quad \forall \psi \end{array} \right.$$

suggère d'introduire l'espace de Hilbert

$$H_{log}^0(I) = \left\{ q \in L^2(I); \int_I \int_I \frac{|q(\xi) - q(\zeta)|^2}{|\xi - \zeta|} d\xi d\zeta < +\infty \right\}$$

qui est le cadre fonctionnel naturel pour l'analyse de cette équation. Sans entrer dans les détails (nous renvoyons le lecteur curieux au document [35]), signalons que cet espace a comme propriété de contenir tous les espaces de Sobolev $H^s(I)$ pour $s > 0$ et d'être strictement inclu dans L^2 . Dans ce cadre fonctionnel, il montre que, moyennant des hypothèses sur la forme du fil, c'est à dire sur F , l'existence et l'unicité de la solution de l'équation filaire sont donnés par l'alternative de Fredholm. La condition qu'il donne sur F est que $F(z) \geq C(1 - z^2)^{1/2 + \lambda/2}$, pour $0 \leq \lambda \leq 1/2$, ce qui revient à dire que le fil ne doit pas être trop pointu aux extrémités (avec un tel choix il n'y a pas de discontinuité de la dérivée en ± 1).

Il est intéressant de remarquer qu'en partant d'un problème coercif, on arrive à une approximation filaire qui admet une solution unique seulement en dehors de certaines valeurs critiques de ε qui forment une infinité dénombrable de valeurs toutes strictement positives.

En supposant que ε est différent des valeurs critiques du problème, il est naturel de se demander quelle est l'erreur entre la solution exacte u_ε du problème (2.1) et la solution

approchée u_ε^{ap} calculée à partir du potentiel solution de l'équation intégrale filaire. L'idée pour obtenir une erreur en norme L^∞ est d'appliquer le principe du maximum à la différence $u_\varepsilon - u_\varepsilon^{ap}$, ce qui permet de se ramener à l'erreur commise sur les opérateurs de frontière. Pour chercher ses estimations d'erreur, Rogier se place dans le cas d'un fil de forme $F(z) = g(z)\sqrt{1-z^2}$. Il s'avère qu'il n'arrive à obtenir des estimations uniformes qu'en faisant des hypothèses supplémentaires sur le comportement de la solution au voisinage des extrémités du fil qui reviennent à la supposer nulle aux extrémités ($Q \in H_0^1(I)$) et qui n'ont pas de raison a priori d'être satisfaites. On retrouve ici un des points faibles des approximations filaires, qui est qu'elles ne restituent pas le bon comportement au voisinage des extrémités mais cette erreur est très localisée aux pointes et on suppose qu'elle n'a pas trop d'effet sur la solution... Ce comportement au voisinage des extrémités dépend bien sûr beaucoup de la forme du fil, mais en pratique on néglige souvent la solution aux pointes.

Influence de la section transverse. L'hypothèse d'indépendance par rotation est très restrictive, et on aimerait pouvoir aussi traiter le cas d'une donnée qui peut dépendre de l'angle, ou d'une forme de fil non cylindrique. On suppose maintenant que le fil est délimité par une surface d'équation $r = \varepsilon F(z)\rho(\theta)$, avec $F(\pm 1) = 0$. Tout point $x \in \Gamma_\varepsilon$ peut s'écrire $x = (\varepsilon F(z)\rho(\theta) \cos \theta, \varepsilon F(z)\rho(\theta) \sin \theta, z) \equiv (\varepsilon F(z)s, z)$ où s est un vecteur de \mathbb{R}^2 décrivant la courbe $\rho(\theta)$, notée γ . Toujours à partir d'un développement de l'opérateur intégral exact :

$$(2.7) \quad K_\varepsilon q(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{|x-y|} q_\varepsilon(y) d\gamma(y)$$

Rogier montre qu'on peut l'approcher par

$$(2.8) \quad \begin{cases} K_\varepsilon^{ap} q(s, z) = -\frac{1}{4\pi} Q(z) \ln \left(\frac{\varepsilon^2 F(z)^2}{4(1-z^2)} \right) + \frac{1}{4\pi} \int_I \frac{Q(z') - Q(z)}{|z-z'|} dz' \\ -\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \tilde{q}(s', z) \ln |s-s'| d\gamma(s') \end{cases}$$

où on a fait le changement de fonction $\tilde{q}(s, z) = q(\varepsilon F(z)s, z)\varepsilon F(z)$ et où Q représente sa valeur moyenne sur une section transverse, $Q(z) = \int_\gamma \tilde{q}(s, z) d\gamma(s)$. La différence avec le cas précédent vient donc de l'intégrale supplémentaire posée sur la section transverse. Si on note A l'opérateur agissant sur la valeur moyenne, c'est à dire

$$(2.9) \quad AQ(z) = \frac{1}{4\pi} Q(z) \ln \left(\frac{\varepsilon^2 F(z)^2}{4(1-z^2)} \right) - \frac{1}{4\pi} \int_I \frac{Q(z') - Q(z)}{|z-z'|} dz'$$

L'équation filaire s'écrit dans ce cas :

$$(2.10) \quad \begin{cases} AQ(z) + \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \tilde{q}(s', z) \ln |s-s'| d\gamma(s') = -g(z, s), \quad \forall (z, s) \in I \times \gamma \\ Q(z) = \int_\gamma \tilde{q}(s, z) d\gamma(s) \end{cases}$$

Pour étudier ce problème, on découpe la résolution en deux problèmes, l'un posé sur l'axe du filament et l'autre posé sur la courbe décrivant la coupe transversale du domaine. Pour

ce faire, on introduit une fonction $\phi = \frac{\partial v}{\partial n}$ qui vérifie (qui existe bien, cf [35], [30])

$$(2.11) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \phi(s') \ln |s - s'| d\gamma(s') = C \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \phi(s') \ln |s'| d\gamma(s') \\ \int_{\gamma} \phi(s') d\gamma(s') = 1 \end{cases}$$

Cette fonction permet de se ramener à l'étude de la valeur moyenne Q . En effet, si on multiplie l'équation (2.10) par ϕ et qu'on intègre sur γ , on obtient

$$(2.12) \quad A Q(z) + C Q(z) = -\langle g, \phi \rangle_{\gamma}$$

Cette équation revient à résoudre

$$(2.13) \quad \tilde{A} Q = \tilde{g}$$

où \tilde{A} est défini de la même façon que A en remplaçant ε par $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \sqrt{\exp(2\pi C)}$ et $\tilde{g} = -\langle g, \phi \rangle_{\gamma}$. L'opérateur \tilde{A} est de même nature que A , donc en dehors de certaines valeurs de ε , on sait que (2.13) admet une solution unique $Q \in H_{\log}^0(I)$. Dans ce cas, pour déterminer \tilde{q} en fonction de Q , on la décompose sous la forme :

$$\tilde{q} = \tilde{q}_0 + \phi Q$$

ce qui en remplaçant dans (2.10) donne le problème suivant : trouver \tilde{q}_0 : tel que

$$(2.14) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \tilde{q}_0(s', z) \ln |s - s'| d\gamma(s') = -g + \langle g, \phi \rangle_{\gamma} \equiv \tilde{g}(s, z) & (a) \\ \int_{\gamma} \tilde{q}_0(z, s') d\gamma(s') = 0 & (b) \end{cases}$$

On reconnaît l'équation intégrale de première espèce associée au Laplacien 2D, avec conditions de Dirichlet. Il est clair que la deuxième condition est nécessaire pour avoir un problème bien posé, car si Q_0 est une solution de (a), $Q_0 + C$ aussi. Des résultats classiques sur le potentiel en dimension 2 permettent de conclure à l'existence et l'unicité d'une solution $\tilde{q}_0(z, \cdot)$ dans $H^{-1/2}(\gamma)$ si $\tilde{g} \in H^{1/2}/P^0$. Finalement en définissant les espaces

$$\begin{aligned} H_{\log}^m(I, H^s(\gamma)) &= \left\{ q, z \longrightarrow \|q(\cdot, z)\|_{H^s(\gamma)} \in H_{\log}^m(I) \right\} \\ (H_{\log}^m(I, H^s(\gamma)))' &= \left\{ g, z \longrightarrow \|g(\cdot, z)\|_{H^s(\gamma)} \in (H_{\log}^m(I))' \right\} \end{aligned}$$

on peut énoncer le

Théorème 1 *Si $g \in (H_{\log}^m(I, H^s(\gamma)))'$, et si ε n'est pas une valeur critique, le problème (2.10) admet une solution unique $\tilde{q} \in H_{\log}^m(I, H^{s-1}(\gamma))$.*

3 Formulation intégrale complète pour le cas de Maxwell

Dans cette section, nous rappelons comment sont obtenues les équations intégrales pour des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétique par un obstacle, sans aucune hypothèse sur la forme de l'obstacle. On s'intéressera plus particulièrement au cas d'un obstacle

parfaitement conducteur. Dans un premier temps nous rappelons les équations de Maxwell qui régissent les champs électromagnétiques. Nous montrons ensuite comment obtenir une représentation intégrale de la solution. L'équation intégrale est obtenue en exprimant la condition aux limites sur la frontière du conducteur et nous donnerons sa formulation variationnelle.

3.1 Les équations de Maxwell

On considère un problème de diffraction d'ondes électromagnétiques dans le vide par un obstacle parfaitement conducteur, occupant un volume $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$. Le domaine extérieur sera noté Ω_e et le champ électromagnétique (E, H) généré par un courant électrique J_a (de support inclu dans Ω_e), est alors solution des équations de Maxwell :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \nabla \times E - i\omega\mu H = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ \nabla \times H + i\omega\varepsilon E = J_a, & \text{dans } \Omega_e \\ E \wedge \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Dans (3.1), ε représente la permittivité du vide, μ la perméabilité, ω la pulsation et \vec{n} la normale à Γ orientée vers l'extérieur de Ω_i . Notons qu'on peut exprimer aussi ces équations de Maxwell en fonction de deux autres paramètres physiques, l'impédance $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ et le nombre d'onde $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c}$ (où $c = 3.10^8$ m/s est la vitesse de la lumière). L'onde diffractée (E^s, H^s) , générée par la présence de l'obstacle, est par définition la différence entre le champ total et le champ incident (E^i, H^i) , c'est à dire le champ créé par la même source se propageant dans tout l'espace, et vérifie donc

$$(3.2) \quad \begin{cases} \nabla \times E^s - i\omega\mu H^s = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ \nabla \times H^s + i\omega\varepsilon E^s = 0, & \text{dans } \Omega_e \\ E^s \wedge \vec{n} = -E^i \wedge \vec{n} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Pour bien définir le problème (3.2), on a besoin de se donner une condition de radiation à l'infini, ici une condition d'onde sortante. Nous la précisons un peu plus loin, après avoir vu le comportement à l'infini de la solution fondamentale.

3.2 Représentation intégrale de la solution

Pour établir la représentation intégrale de la solution, la démarche classique est la suivante (cf par exemple [32]):

a - On définit un prolongement de la solution dans le domaine intérieur et on réécrit le problème au sens des distributions.

b - On définit la solution fondamentale associée

c - La solution (distribution) s'obtient alors comme une convolution de la solution fondamentale avec le terme source.

a - Formulation au sens des distributions.

Dans le cas d'un obstacle parfaitement conducteur, il est naturel de prolonger le champ total par 0 à l'intérieur de l'obstacle puisque physiquement le champ est effectivement nul dans le conducteur. Ceci revient à prolonger l'onde diffractée par l'opposé du champ incident et nous conduit à définir la distribution suivante :

$$(3.3) \quad (\tilde{E}^s, \tilde{H}^s) = \begin{cases} (E^s, H^s) & \text{dans } \Omega_e \\ -(E^i, H^i) & \text{dans } \Omega_i \end{cases}$$

Elle est alors solution du problème suivant (au sens des distributions) :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \nabla \times \tilde{E}^s - i\omega\mu\tilde{H}^s = 0 \\ \nabla \times \tilde{H}^s + i\omega\varepsilon\tilde{E}^s = j\delta_\Gamma \end{cases}$$

où $j\delta_\Gamma$ est une distribution portée par la surface Γ et tangente à Γ , avec

$$(3.5) \quad j = [\tilde{H}^s \wedge \vec{n}]_\Gamma = (\tilde{H}^s \wedge \vec{n})_\Gamma^i - (\tilde{H}^s \wedge \vec{n})_\Gamma^e$$

b - Solution fondamentale

Notons $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ la solution élémentaire associée à (3.4) :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \nabla \times \mathcal{E} - i\omega\mu\mathcal{H} = 0 \\ \nabla \times \mathcal{H} + i\omega\varepsilon\mathcal{E} = \delta I_3 \end{cases}$$

où I_3 est la matrice identité de \mathbb{R}^3 . \mathcal{E} et \mathcal{H} sont des matrices 3×3 de distributions, et sont données par le :

Théorème 2 *La solution élémentaire s'exprime de la façon suivante :*

$$(3.7) \quad \begin{cases} \mathcal{E}(x) = i\omega\mu G(x)I_3 + \frac{i}{\omega\varepsilon} D^2 G(x) \\ \mathcal{H}(x) = \nabla \wedge (G(x)I_3) \end{cases}$$

où G est la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz

$$(3.8) \quad G(x) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr}, \quad r = \|x\|$$

Preuve : nous renvoyons par exemple à [32] pour la démonstration de ce résultat. Notons simplement qu'il est obtenu à partir d'une décomposition en potentiels de la solution $\mathcal{E} = \nabla V + A$, où les potentiels V et A sont déterminés de manière unique si on ajoute la condition de jauge de Lorentz $\text{div } A - k^2 V = 0$. Chacun des potentiels vérifie alors une équation de Helmholtz.

Remarque 1 *L'opérateur D^2 est défini de manière classique par $(D^2 G)_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}$.*

L'opérateur $\nabla \wedge$ d'un tenseur d'ordre 2 est défini comme le rotationnel par rapport au premier indice :

$$(\nabla \wedge M)_{ij} = (\nabla_i \wedge M_{.j})_i = \varepsilon_{imk} \partial_m M_{kj}$$

où ε_{ijk} est égal à 1 si (i, j, k) est une permutation de $(1, 2, 3)$, à 0 si deux indices sont égaux et -1 sinon.

Remarque 2 On peut obtenir par symétrie la “seconde partie” de la solution fondamentale en mettant le terme source dirac sur la première équation et en échangeant les rôles de \mathcal{E} et \mathcal{H} (cf [32]). Pour un conducteur parfait, nous n’avons besoin que de la “première partie”.

Remarque 3 On peut remarquer que la solution élémentaire \mathcal{E} se comporte comme les dérivées secondes de G lorsque r est proche de 0, c’est à dire en $1/r^3$ ce qui correspond à un noyau hypersingulier.

Donnons quelques propriétés importantes des solutions fondamentales sortantes des équations de Maxwell (cf [32]) :

Théorème 3 Les solutions fondamentales vérifient les conditions de radiation de Sommerfeld, pour $r = \|x\|$ grand :

$$(3.9) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} - ik\mathcal{E} \right| \leq \frac{C}{r^2} \\ \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} - ik\mathcal{H} \right| \leq \frac{C}{r^2} \end{cases}$$

ainsi que les conditions de radiation de Silver-Müller ($\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$)

$$(3.10) \quad \begin{cases} |\sqrt{\varepsilon}\mathcal{E} - \sqrt{\mu}\mathcal{H} \wedge \vec{n}| \leq \frac{C}{r^2} \\ |\sqrt{\varepsilon}\mathcal{E} \wedge \vec{n} + \sqrt{\mu}\mathcal{H}| \leq \frac{C}{r^2} \end{cases}$$

Chacune de ces quatre conditions suffit à déterminer la solution fondamentale de manière unique. Par ailleurs, les composantes de \mathcal{E} et \mathcal{H} se comportent toutes en $1/r$ à l’infini et on a :

$$(3.11) \quad |\mathcal{E} \cdot \vec{r}| \leq \frac{C}{r}, \quad |\mathcal{H} \cdot \vec{r}| \leq \frac{C}{r}, \quad |\mathcal{E} \cdot \mathcal{H}| \leq \frac{C}{r^2}$$

Nous pouvons maintenant préciser les conditions de radiation que doit satisfaire l’onde diffractée (solution de (3.2)), par exemple :

$$(3.12) \quad |E^s| \leq \frac{C}{r}, \quad |H^s| \leq \frac{C}{r}, \quad |\sqrt{\varepsilon}E^s - \sqrt{\mu}H^s \wedge \vec{n}| \leq \frac{C}{r^2}$$

c - Représentation intégrale

La solution de (3.4) s’exprime simplement comme le produit de convolution de la solution fondamentale avec le terme source, c’est à dire :

$$\tilde{E}^s = \mathcal{E} \star (j\delta_\Gamma); \quad \tilde{H}^s = \mathcal{H} \star (j\delta_\Gamma)$$

ce qui d’après les expressions de \mathcal{E} et \mathcal{H} données en (3.6) peut s’exprimer :

$$\begin{cases} \tilde{E}^s = i\omega\mu G(x)I_3 \star (j\delta_\Gamma) + \frac{i}{\omega\varepsilon} D^2 G \star (j\delta_\Gamma) \\ \tilde{H}^s = \nabla \wedge (G(x)I_3) \star (j\delta_\Gamma) \end{cases}$$

D'après les propriétés du produit de convolution on a

$$\left(D^2 G \star (j \delta_\Gamma)\right)_i = \sum_m \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_m} \star (j_m \delta_\Gamma) = \sum_m \frac{\partial G}{\partial x_i} \star \frac{\partial (j_m \delta_\Gamma)}{\partial x_m} = (\nabla(G \star \operatorname{div}(j \delta_\Gamma)))_i$$

et en utilisant la formule de Stokes

$$\int_\Gamma u \operatorname{div}_\Gamma v d\gamma + \int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot v d\gamma = 0$$

on peut montrer que

$$\operatorname{div}(j \delta_\Gamma) = \operatorname{div}_\Gamma j \delta_\Gamma$$

où $\operatorname{div}_\Gamma$ représente la divergence surfacique (cf par exemple [32, 41, 5, 6]). On obtient finalement la représentation suivante du champ diffracté, en un point $x \in \Omega_e$:

$$(3.13) \quad \begin{cases} E^s(x) = i\omega\mu \int_\Gamma G(x-y)j(y)d\gamma_y + \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla_x \int_\Gamma G(x-y) \operatorname{div}_\Gamma j(y)d\gamma_y \\ H^s(x) = \nabla_x \wedge \int_\Gamma G(x-y)j(y)d\gamma_y \end{cases}$$

3.3 Equation intégrale et formulation variationnelle

Pour écrire l'équation intégrale à partir des formules de représentation (3.13), il est nécessaire d'exprimer les traces des champs sur Γ . Ici, la condition de conducteur parfait nécessite uniquement la connaissance de la trace extérieure $E^s \wedge \vec{n}_\Gamma$ qui peut s'exprimer de la façon suivante (cf [32])

$$(3.14) \quad \begin{cases} E^s \wedge \vec{n}_\Gamma = i\omega\mu \int_\Gamma G(x-y)j(y) \wedge \vec{n}_x d\gamma_y \\ \quad + \frac{i}{\omega\varepsilon} \int_\Gamma \left(\nabla_x G(x-y) \wedge (\vec{n}_x - \vec{n}_y) \operatorname{div}_\Gamma j(y) + G(x-y) \vec{\operatorname{rot}}_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma j(y) \right) d\gamma_y \end{cases}$$

Cette expression provient de résultats sur les traces des potentiels, (cf [32]) (on ne peut pas directement prendre $x \in \Gamma$ dans (3.13)). L'équation intégrale s'obtient alors en exprimant la condition de conducteur parfait $E^s \wedge \vec{n}_\Gamma = -E^i \wedge \vec{n}_\Gamma$. Pour obtenir la formulation variationnelle, on exprime cette condition plutôt sous la forme $\vec{n} \wedge (E^s \wedge \vec{n})_\Gamma = -\vec{n} \wedge (E^i \wedge \vec{n})_\Gamma$, puis on la multiplie par un champ test j^t tangent à Γ et on intègre sur Γ . Après intégration par parties, on obtient la formulation établie par Bendali [5, 6], et appelée équation de réaction : trouver $j \in V$ tel que pour tout $j^t \in V$

$$(3.15) \quad \begin{cases} i\omega\mu \int_\Gamma \int_\Gamma G(x-y)j(y) \cdot j^t(x) d\gamma_y d\gamma_x \\ \quad - \frac{i}{\omega\varepsilon} \int_\Gamma \int_\Gamma G(x-y) \operatorname{div}_\Gamma j(y) \operatorname{div}_\Gamma j^t(x) d\gamma_y d\gamma_x = - \int_\Gamma E^i \cdot j^t d\gamma \end{cases}$$

Le bon espace fonctionnel pour analyser cette formulation variationnelle est l'espace $X = H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ des champs tangentiels sur Γ dont chaque composante appartient à $H^{-1/2}(\Gamma)$ et dont la divergence surfacique appartient aussi à $H^{-1/2}(\Gamma)$. Bendali a montré que l'analyse de cette équation intégrale pouvait être ramenée à un cadre d'application de l'alternative de Fredholm et que ce problème admet une solution unique sauf pour les valeurs de k^2

correspondant à des fréquences propres du problème intérieur. Signalons toutefois que cette analyse n'est pas faite directement sur la formulation (3.15) qui n'est pas si sympathique qu'on pourrait croire... En effet, si la forme définie par $\int_{\Gamma} G(x-y)u(x)v(y)d\gamma_x d\gamma_y$ se décompose bien en la somme d'une forme coercive et d'une forme compacte sur $H^{-1/2}(\Gamma)$, le changement de signe dans la forme bilinéaire de (3.15) empêche de faire l'analyse de façon standard, car on n'a pas la compacité qui permettrait d'obtenir des estimations sur la divergence. Pour faire l'analyse du problème continu et l'analyse numérique du problème approché, on transforme (3.15) en une formulation de type point-selle.

Une première méthode, due à Bendali, est d'introduire comme nouvelle variable la charge ρ , reliée au courant par la loi de conservation de la charge :

$$(3.16) \quad \operatorname{div}_{\Gamma} j + i\omega\rho = 0$$

En introduisant la variable ρ dans l'équation (3.15) et en réinterprétant (3.16) dans un "certain sens faible" (sans entrer dans les détails...), on obtient une formulation mixte du type : trouver $(j, \rho) \in X \times M$ où $M = \left\{ \nu \in H^{-1/2}(\Gamma), \langle \nu, 1 \rangle = 0 \right\}$ tel que

$$(3.17) \quad \begin{cases} a(j, j^t) + b_1(\rho, j^t) = \langle f, j^t \rangle & \forall j^t \in X \\ b_2(\nu, j) + c(\nu, \rho) = 0 & \forall \nu \in M \end{cases}$$

Notons que ce n'est toujours pas standard, car la forme b_1 n'est pas égale à b_2 , comme dans une formulation mixte classique. La formulation du problème sous forme mixte sert uniquement à faire l'analyse, et c'est l'équation (3.15) qui est discrétisée.

Il existe une deuxième méthode pour se ramener à une formulation mixte (cf [32]) qui consiste à décomposer le courant sous la forme :

$$(3.18) \quad j = g + \operatorname{rot}_{\Gamma} p$$

On obtient alors une formulation mixte plus classique : trouver $(g, p) \in X \times W$, où $W = H^{1/2}(\Gamma)$

$$(3.19) \quad \begin{cases} a(g, g^t) + b(g^t, p) = \langle f, g^t \rangle & \forall g^t \in X \\ b(g, q) = 0 & \forall q \in W \end{cases}$$

Remarque 4 On trouvera souvent l'équation (3.15) (ou la première formulation mixte) exprimée en fonction de la variable $p = i\omega j = \left[\nabla \tilde{E}^s \wedge \vec{n} \right]$ (ou des variables p et $\lambda = -\frac{\rho}{\varepsilon}$).

3.4 Mise en oeuvre et application au cas du fil mince

3.4.1 Mise en oeuvre numérique

La discrétisation de (3.15) se fait à l'aide d'une méthode d'éléments finis frontières. On approche d'abord la surface Γ par un maillage composé en général de triangles plats, puis on approche le courant par exemple par des éléments finis de Raviart Thomas ([34]). La principale difficulté dans la mise en oeuvre est bien sûr le calcul des intégrales élémentaires qui forment la matrice du système linéaire à résoudre. Ces intégrales sont du type :

$$I_{nm} = \int_{K \times T} \frac{e^{ikr}}{r} p_n(x) p_m(y) dT_y dK_x$$

pour deux éléments K et T du maillage. Si on pose

$$F_m(x) = \int_T \frac{e^{ikr}}{r} p_m(y) dT_y$$

l'intégrale I_{nm} est obtenue en intégrant $F_m p_n$ à l'aide d'une formule de quadrature (de Gauss-Lobato par exemple) :

$$I_{nm} \approx \sum_i \omega_i p_n(x_i^K) F_m(x_i^K)$$

On choisit le nombre de points d'intégration non seulement en fonction de l'ordre désiré et du degré des polynômes 'a intégrer mais aussi en fonction de la proximité ou non des triangles K et T : on prend plus de points lorsque les triangles ont un sommet commun. On est donc ramené à l'évaluation de $F_m(x)$ pour $x \in K$. Là encore, on doit distinguer 2 cas :

- Si K et T n'ont pas de sommet commun, l'intégrande est alors suffisamment régulier, et on peut de nouveau utiliser une formule d'intégration numérique.
- Si K et T ont au moins un sommet commun, il y a une singularité en $r = 0$. On peut montrer (cf par ex [5]) que tout revient à évaluer l'intégrale

$$S(x) = \int_T \frac{1}{r} dT_y$$

qui peut s'intégrer analytiquement en utilisant la méthode de De Hoop ([]).

3.4.2 Application au cas du fil mince

Lorsque l'obstacle est un fil mince de rayon a et de longueur L , par hypothèse $ka \ll 1$ et $a \ll L$. Dans ce cas, le problème intérieur n'a pas de fréquence propre et il y a donc toujours existence et unicité de la solution de (3.15). On peut donc appliquer la méthode précédente, l'avantage étant que l'analyse du problème approché existe et qu'on peut donc assurer la convergence de la méthode avec des estimations d'erreur connues (cf [7, 5]). Cela nécessite de mailler assez précisément le fil, ce qui demande un grand nombre de triangles et par conséquent un grand nombre de degrés de liberté. Cette méthode est donc coûteuse et il est naturel d'essayer de prendre en compte l'hypothèse de fil mince pour obtenir un modèle approché.

4 Historique non exhaustif de différentes approches

4.1 Présentation de l'approximation de Pocklington.

Pocklington [33] a été le premier à proposer une approximation filaire c'est à dire un modèle simplifié prenant en compte la géométrie particulière des fils. Il a obtenu cette approximation dans le cas d'un fil courbe mais par souci de simplicité de l'exposé nous exposerons la démarche pour un fil cylindrique droit (fig 4.1) de rayon a et de longueur $2L$.

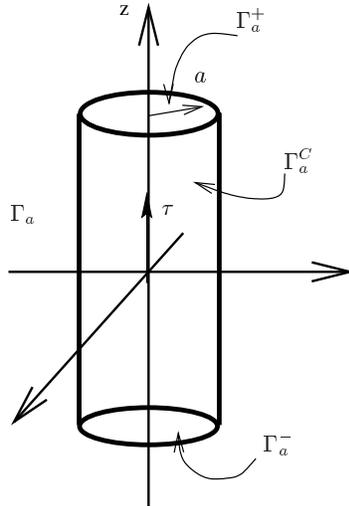


Figure 4.1: fil cylindrique d'épaisseur a .

Une structure filaire est caractérisée par la petite taille de sa section transverse par rapport aux autres dimensions que sont la longueur du fil et la longueur d'onde, ce qui se traduit par :

$$(4.1) \quad a \ll 2L ; ka \ll 1$$

où k représente le nombre d'onde ($k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c}$). Par la suite nous supposons que $L = 1$.

En faisant des hypothèse supplémentaires, à savoir que le courant ne dépend pas de l'angle et qu'il est porté par la direction τ de l'axe du fil, Pocklington a montré que la distribution de courant, c'est à dire la fonction scalaire I telle que

$$(4.2) \quad j(y) = \frac{I(z)}{2\pi a} \tau$$

est solution d'une équation intégrale unidimensionnelle :

$$(4.3) \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \int_{-1}^1 I(z') K(z - z') dz' = f(z)$$

où f est une fonction proportionnelle au champ tangent incident ($f(z) = 4i\pi\omega\varepsilon E^i \cdot \tau$) et K représente, à une constante près, la moyenne du noyau de Green le long du bord de la section d'abscisse z' :

$$(4.4) \quad \begin{cases} K(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr(u,\theta)}}{r(u,\theta)} d\theta \\ r(u,\theta) = (u^2 + 4a^2 \sin^2 \theta / 2)^{1/2} \end{cases}$$

Pour obtenir une équation bien posée, il doit en plus imposer la nullité des courants aux extrémités, c'est à dire

$$(4.5) \quad I(\pm 1) = 0$$

Cette hypothèse revient à modéliser le fil comme un tube creux. Si le fil n'est pas creux, négliger le courant aux extrémités conduit à commettre une erreur de l'ordre de ka , qui n'est pas plus importante que d'autres termes qui ont été négligés pour obtenir l'approximation

(4.3) (cf [22, 21]). Cependant, on voit déjà que l'approximation filaire ne pourra pas donner de bons résultats au voisinage des extrémités, puisqu'elle ne prend pas du tout en compte la géométrie particulière du fil aux pointes et le champ électrique est justement très sensible à cette géométrie.

Le champ diffracté peut alors être reconstruit à partir de la connaissance du courant I , en utilisant la représentation (3.13). Il vérifie les mêmes propriétés que j , c'est à dire invariant par rotation et porté par τ , et a pour expression, en tout point $x = (r, \theta, z)$:

$$(4.6) \quad E^s(x) = \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon} \tau \left(k^2 \int_{-1}^1 \widetilde{K}(r, z - z') I(z') dz' + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^1 \widetilde{K}(r, z - z') I'(z') dz' \right)$$

où le noyau \widetilde{K} sera explicité en (4.10).

Remarque 5 *Pour un fil courbe, l'approximation filaire admet la même expression que (4.3) en remplaçant simplement l'abscisse z par l'abscisse curviligne le long du fil s .*

4.2 Obtention de l'approximation.

Pour obtenir l'approximation (4.3), repartons de la représentation intégrale du champ :

$$(4.7) \quad E^s(x) = \frac{i}{\omega\varepsilon} \left(k^2 \int_{\Gamma_a} G(x - y) j(y) d\gamma_y + \nabla_x \int_{\Gamma_a} G(x - y) \operatorname{div}_{\Gamma} j(y) d\gamma_y \right)$$

Les premiers termes négligés sont les intégrales sur les bords Γ_a^{\pm} : en première approximation, on peut approcher le courant (ou sa divergence) par sa valeur sur l'axe, en commettant une erreur d'ordre a , et pour presque tout $x = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ (ne se trouvant pas sur Γ_a^{\pm}) on peut donc majorer l'intégrale par $C \int_{\Gamma_a^{\pm}} \frac{1}{|x - y|} d\gamma_y \leq \frac{Ca^2}{|z - 1|}$. Ce terme est donc d'un ordre inférieur par rapport aux autres termes, cependant on voit que cette estimation se dégrade lorsque z s'approche de 1.

Sur le bord cylindrique du fil Γ_a^c , la divergence surfacique du courant s'écrit compte tenu de l'hypothèse (4.2):

$$(4.8) \quad \operatorname{div}_{\Gamma} j = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (j \cdot e_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (j \cdot \tau) = \frac{I'(z)}{2\pi a}$$

Réécrivons les intégrales de (4.7). On a d'une part :

$$I_1 = \int_{\Gamma_a^c} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} j(y) d\gamma_y = \int_{-1}^1 \frac{I(z')}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} d\theta' a dz' \tau$$

où $y = (a \cos \theta', a \sin \theta', z')$. Pour un point $x = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, on a :

$$(4.9) \quad |x - y| = \left((z - z')^2 + (r - a)^2 + 4ar \sin^2(\theta - \theta')/2 \right)^{1/2} \equiv R(r, z - z', \theta - \theta')$$

et en posant

$$(4.10) \quad \widetilde{K}(r, z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(r, z - z', \theta')}}{R(r, z - z', \theta')} d\theta'$$

on obtient :

$$I_1 = I_1(r, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 I(z') \widetilde{K}(r, z - z') dz' \tau$$

dont la trace sur Γ_a^c fait apparaître le noyau $K(u) = \widetilde{K}(a, u)$.

Pour la deuxième intégrale, on remarque que ça se passe à peu près de la même façon :

$$I_2 = \int_{\Gamma_a^c} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \operatorname{div}_{\Gamma} j(y) d\gamma_y = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 I'(z') \widetilde{K}(r, z - z') dz'$$

Après intégration par parties, en utilisant les conditions aux limites (4.5) et la symétrie du noyau \widetilde{K} , on obtient :

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dz} \int_{-1}^1 I(z') \widetilde{K}(r, z - z') dz'$$

La trace tangentielle du gradient s'exprime alors :

$$\nabla_x I_2 \wedge n_x = \frac{\partial I_2}{\partial z} e_\theta$$

On obtient l'équation de Pocklington en exprimant seulement une partie de la condition aux limites :

$$(E^s \wedge n_x) \cdot e_\theta = -(E^i \wedge n_x) \cdot e_\theta$$

ce qui est encore équivalent à exprimer que la trace tangentielle suivant l'axe du cylindre du champ total est nulle :

$$E^s \cdot \tau = -E^i \cdot \tau$$

Etant donné qu'en faisant l'hypothèse (4.2) sur le courant on s'est ramené à une inconnue scalaire, il est naturel de ne garder qu'une équation scalaire issue de la condition aux limites.

L'hypothèse sinusoidale. A partir de son approximation, Pocklington a cherché à comprendre comment le courant se propageait le long d'une antenne. Il a montré qu'en première approximation la distribution de courant est sinusoidale et se propage avec la vitesse de la lumière sans perte d'amplitude. Ce résultat est à la base de la théorie de la diffraction par des antennes et a été utilisé par les physiciens dans un certain nombre d'applications simples (ligne ouverte sans perte, alimentée par une source de tension sinusoidale, ..., cf [36]). L'hypothèse du courant sinusoidal s'énonce de la façon suivante : *la répartition de l'intensité du courant est sinusoidale sur toute portion de conducteur filiforme sans perte, rectiligne ou non*. Dans les applications, on cherche donc le courant sous la forme :

$$I(s) = Ae^{iks} + Be^{-iks}$$

et les constantes sont déterminées par des conditions aux limites (conservation des courant en un point de connexion, courant nul à toute extrémité isolée).

4.3 Sur l'analyse mathématique de l'équation de Pocklington.

Jones a été le premier à proposer une analyse mathématique de l'équation de Pocklington et plus généralement il a largement contribué aux problèmes d'antennes, [22, 21, 23]. Il a montré dans [22] un résultat d'unicité de la solution de (4.3)-(4.5). L'idée pour montrer l'unicité est de passer par le champs électromagnétique associé au potentiel vecteur

$$\Pi(r, z) = \tau \int_{-1}^1 I(z') \widetilde{K}(r, z - z') dz'$$

où \widetilde{K} a été défini par (4.10)-(4.9). Il montre alors que la trace tangentielle du champ électrique est nulle sur Γ_a^c , et grâce à l'unicité de la solution des équations de Maxwell, il en déduit la nullité du champ électromagnétique, et par conséquent la nullité du courant (qui est le saut de la composante azimutale H_θ du champ magnétique).

Pour l'existence, il montre l'équivalence entre (4.3)-(4.5) et l'équation intégrale obtenue en intégrant (4.3) et parfois appelée équation de Hallen :

$$(4.11) \quad \int_{-1}^1 I(z')K(z-z')dz' = Ae^{ikz} + Be^{-ikz} + \int_{-1}^1 f(z')\frac{\sin k(z-z')}{k}dz'$$

où les constantes A et B sont déterminées de manière à satisfaire (4.5) (ce qui est possible, cf [22]). C'est à partir de cette nouvelle formulation qu'il démontre l'existence d'une solution intégrable, en supposant que f est continue. La preuve de l'existence repose essentiellement sur la décomposition suivante du noyau

$$(4.12) \quad K(u) = -\frac{1}{a\pi} \ln|u| + R(u)$$

où R est une fonction continue ayant des dérivées bornées, et sur l'alternative de Fredholm. On peut cependant se demander ce que signifie la condition (4.5) (posée sur un ensemble de mesure nulle) pour une fonction seulement intégrable! Cette question a été soulevée par Rynne [37] et pour donner un sens à la trace de I aux extrémités du fil, il s'est placé dans un cadre fonctionnel un peu différent : pour une donnée dans L^p il a montré un résultat d'existence et d'unicité de la solution dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(-1, 1)$ des fonctions L^p à dérivée première dans L^p qui est inclu dans $C^0[-1, 1]$ (cf [2]) et donc I est bien définie en tout point de $[-1, 1]$. Dans ce cadre, il a aussi démontré la continuité de la solution par rapport aux données.

4.4 Quelques méthodes numériques pour résoudre l'équation de Pocklington

Il y a eu un certain nombre de tentatives pour résoudre l'équation de Pocklington avec plus ou moins de succès... Il y en a eu par contre beaucoup moins qui ont été analysées et pour lesquelles on dispose d'estimations d'erreur ou de convergence. Avant de voir plus en détail la méthode de Mazari qui a proposé une formulation ayant l'avantage d'être posée dans un cadre variationnel qui se prête bien à l'analyse numérique, nous nous contenterons de décrire deux des méthodes qui semblent avoir été parmi les plus populaires malgré, comme on va le voir, les problèmes d'instabilité numériques qu'elles génèrent.

La méthode de Hallen. Cette méthode est basée sur la formulation (4.11) qui comme on l'a vu précédemment est équivalente à l'équation de Pocklington pourvu de bien choisir les constantes A et B . Cette méthode consiste alors à écrire le terme de gauche sous la forme :

$$h(z)I(z) - \mathcal{H}(I)$$

où $\mathcal{H}(I)$ est défini par

$$\mathcal{H}(I) = h(z)I(z) - \int_{-1}^1 I(z')K(z-z')dz'$$

et la fonction h est choisie de telle manière que $\mathcal{H}(I)$ soit “petit”. L’équation s’écrit alors

$$(4.13) \quad h(z)I(z) = g(z) + \mathcal{H}(I)$$

et peut être résolue par une méthode itérative de Neumann. Une première difficulté de cette méthode est le choix de h pour que $\mathcal{H}(I)$ ou plus exactement $\mathcal{H}(I)/h$ soit “petit” (ce qui détermine la vitesse de convergence) et plusieurs choix ont été proposés [18, 25, 17, 38, 24]. Sur le plan numérique, des instabilités ont été observées et elles ont parfois été attribuées au caractère mal posé de (4.11), mais les résultats d’existence et d’unicité établis par Jones [22] et Rynne [37] montrent que cette explication n’est pas valable. Ces auteurs ont proposé d’autres explications. Jones fait remarquer que si au niveau continu il est équivalent de considérer (4.3)-(4.5) ou (4.11), il faut être plus prudent au niveau numérique : en particulier la détermination numérique des constantes A et B est délicate car si elles ne sont pas déterminées de façon exacte, le courant peut exploser aux extrémités! cette explication est reprise et complétée par Rynne qui explique que la solution est stable par rapport à la donnée f mais pas par rapport à n’importe quelle perturbation du second membre, ce qui numériquement pose évidemment des problèmes.

La méthode des moments de Harrington. Cette méthode doit son succès à sa simplicité d’implémentation. Elle consiste à se dire qu’on ne commet pas une grande erreur en considérant que le courant est situé non pas sur le fil mais sur son axe, puisque le rayon a est petit. Ce qui revient à écrire la condition aux limites en un point $x = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$ situé sur le fil et à évaluer le courant au point $y = (0, 0, z')$, donc à remplacer $r(u, \theta)$ et $K(u)$ dans (4.4) par

$$(4.14) \quad r(u) = (u^2 + a^2)^{1/2} ; K_2(u) = \frac{e^{ikr(u)}}{r(u)}$$

Evidemment, c’est beaucoup plus simple à évaluer puisque d’une part on a supprimé l’intégration par rapport à l’angle, d’autre part il n’y a plus de singularité, les deux points étant au moins distants de a . L’erreur commise entre les deux noyaux K et K_2 est d’ordre ka sur la “plus grande partie de l’intervalle [-1,1]”, [23]. Mais l’équation intégrale n’est plus du même type que celle de Pocklington : c’est une équation intégrale de première espèce dont le noyau est analytique et l’inversion de telles équations est très délicate car elle est par nature mal posée, [10]. Néanmoins, cette formulation a l’avantage de s’adapter facilement à des géométries d’antennes complexes et est à la base de nombreuses méthodes [28, 20, 8]... Elle s’avère très efficace tant que la longueur des segments discrétisant l’antenne est au moins de l’ordre de 4 ou 5 fois le rayon de l’antenne. Les instabilités apparaissent lorsqu’on raffine le maillage pour obtenir une meilleure précision. Signalons que Mazari a présenté des comparaisons entre cette méthode [8] et celle qu’elle a développé (voir 5) et l’amélioration est spectaculaire.

5 La méthode de Mazari

Nous présentons dans cette section une équation intégrale originale proposée et analysée par Mazari [27]. Initialement, son travail a démarré pour répondre à une demande de Thomson qui avait besoin de faire des calculs d’antenne assez précis. Ils disposaient d’un code de calcul, le code Magellan [8], basé sur une approximation par éléments finis frontières de la formulation variationnelle de la méthode des moments. Cette méthode s’avère suffisante dans la plupart

des cas pour obtenir le champ rayonné lointain. Cependant, comme on l'a déjà signalé au sujet de la méthode de Harrington, le noyau de l'équation intégrale étant très régulier, elle est mal posée. Pour l'approximation numérique, les ennuis commencent si on cherche à raffiner le maillage, et il faut en pratique considérer un pas de maillage h de l'ordre de $5a$ c'est à dire de 5 fois le rayon du fil pour que ça se passe bien. Pour donner un ordre de grandeur, le champ peut alors être calculé à une distance de l'ordre de $10h$, soit $50a$. Pour prévoir le fonctionnement d'une antenne d'émission, il est nécessaire de calculer d'autres caractéristiques de l'antenne (champ proche, impédance d'entrée, puissance rayonnée...) et la méthode précédente ne suffit plus.

La nouvelle approximation filaire proposée par Mazari est obtenue à partir de l'équation de Pocklington, en faisant une approximation du noyau. Un des intérêts de cette nouvelle formulation est qu'elle garde un noyau singulier, ce qui est crucial pour obtenir un problème bien posé. D'autre part elle est définie dans un cadre fonctionnel qui permet une analyse tant sur le plan théorique que sur le plan numérique. C'est en particulier la seule approche à notre connaissance qui apporte des estimations d'erreur sur ce problème.

5.1 Nouvelle approche de l'équation de Pocklington

Tout d'abord, on peut remarquer qu'en suivant la démarche qu'on a suivie pour obtenir l'équation de Pocklington, mais sans faire l'hypothèse (4.2), et en considérant la valeur moyenne de la condition aux limites sur une section, c'est à dire

$$(5.1) \quad \int_0^{2\pi} E^s(x(a, \theta, z)) \cdot \tau d\theta = - \int_0^{2\pi} E^i(x(a, \theta, z)) \cdot \tau d\theta$$

on obtient une équation similaire à Pocklington :

$$(5.2) \quad \begin{cases} k^2 \int_{-1}^1 I(z') K(z - z') dz' + \frac{d}{dz} \int_{-1}^1 K(z - z') \frac{dI}{dz}(z') dz' = f(z), \quad \forall z \in]-1, 1[\\ I(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

où K est toujours défini par (4.4), $f(z) = 4i\pi\omega\varepsilon \int_0^{2\pi} E^i \cdot \tau d\theta$ et où la nouvelle inconnue scalaire I est la valeur moyenne de la composante tangentielle suivant l'axe du courant sur une section du fil :

$$(5.3) \quad I(z) = \int_0^{2\pi} j(x(a, \theta, z)) \cdot \tau a d\theta$$

Le problème n'est alors à symétrie de révolution que si le champ incident l'est. On retrouve bien sûr le lien classique entre I et j (4.2) lorsqu'on fait l'hypothèse de Pocklington que j ne dépend que de z et qu'il est porté par la direction τ de l'axe du fil.

Notons que la connaissance du courant scalaire I ne permet évidemment pas de reconstituer tout le champ. On peut seulement récupérer la projection du champ sur l'axe du fil et seulement pour des points "pas trop proches" du fil. En effet, si on reprend la représentation intégrale du champ (4.7), par définition de I , la seule chance de le faire apparaître est de multiplier scalairement par τ . Mais on voit que ce n'est pas suffisant car il y a toujours une dépendance par rapport à l'angle dans l'expression de $|x - y|$. Par contre, si on suppose que le point d'évaluation du champ $x(r, \theta, z)$ est assez éloigné du fil, on peut approcher la distance

de x à un point $y(a, \theta', z')$ situé sur le fil par la distance à la projection de y sur l'axe du fil, c'est à dire

$$|x - y|^{ap} = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$$

qui elle est bien indépendante de θ' . Dans ce cas, on a $(\nabla \cdot \tau = \frac{\partial}{\partial z})$

$$E^s(x) \cdot \tau = \frac{i}{\omega \varepsilon} \left(k^2 \int_{-1}^1 G(|x - y|^{ap}) I(z') dz' + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^1 G(|x - y|^{ap}) \int_0^{2\pi} \operatorname{div}_\Gamma j(y) a d\theta' dz' \right)$$

et compte tenu de l'expression de la divergence surfacique donnée par la première égalité de (4.8) on voit que le terme $\frac{\partial}{\partial \theta} (j \cdot e_\theta)$ disparaît dans l'intégration donc il reste finalement l'expression suivante pour la composante z du champ :

$$(5.4) \quad E_z^s(x) = \frac{i}{\omega \varepsilon} \left(k^2 \int_{-1}^1 G(|x - y|^{ap}) I(z') dz' + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^1 G(|x - y|^{ap}) I'(z') dz' \right)$$

5.2 Vers une autre approximation filaire...

La démarche. Le problème (5.2) s'écrit encore :

$$(5.5) \quad \begin{cases} \text{Trouver } I \text{ tel que } I(\pm 1) = 0 \text{ et} \\ (\mathcal{A}(\varepsilon)I)(z) = f(z), \quad \forall z \in]-1, 1[\end{cases}$$

où $\varepsilon = ka \ll 1$ et $\mathcal{A}(\varepsilon)$ est l'opérateur intégral défini par :

$$(5.6) \quad (\mathcal{A}(\varepsilon)I)(z) = k^2 \int_{-1}^1 I(z') K(z - z') dz' + \frac{d}{dz} \int_{-1}^1 K(z - z') \frac{dI}{dz}(z') dz'$$

On a déjà mentionné qu'aucune analyse d'une approximation de (5.5) n'existait (discrétisation bien posée, estimations d'erreur...). De plus, le noyau K est assez difficile à manipuler numériquement.

L'idée de Mazari est de remplacer le noyau K par un noyau approché, ce qui revient à développer :

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = A + \varepsilon B(\varepsilon)$$

où $B(\varepsilon)$ est un opérateur borné. Elle approche alors le problème (5.5) par le problème analogue où $\mathcal{A}(\varepsilon)$ est remplacé par A . Dans un cadre fonctionnel bien choisi ($H_0^{1/2}(-1, 1)$), elle montre que l'opérateur A peut se décomposer en la somme d'un opérateur coercif et d'un opérateur compact ce qui permet d'appliquer l'alternative de Fredholm pour étudier le problème. Le cadre variationnel, bien adapté à l'analyse numérique, lui permet de définir un problème approché pour lequel elle montre des estimations d'erreur.

Approximation du noyau. Tout repose donc sur l'approximation du noyau K par un noyau plus sympathique. Pour cela, l'idée, par ailleurs souvent utilisée en équations intégrales, est d'extraire la singularité en décomposant le noyau par exemple comme la somme du noyau statique et d'un reste régulier :

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r} + \frac{e^{ikr} - 1}{r}$$

ce qui donne :

$$K(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(u, \theta)} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr(u, \theta)} - 1}{r(u, \theta)} d\theta$$

avec $r(u, \theta) = \sqrt{u^2 + 4a^2 \sin^2(\theta/2)}$. Mazari montre alors que :

- la partie singulière s'exprime :

$$(5.7) \quad \begin{cases} K_s(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(u, \theta)} d\theta = \frac{1}{\pi a} p_a(u) F\left(\frac{\pi}{2}, p_a^2(u)\right) \\ p_a(u) = \frac{2a}{\sqrt{u^2 + 4a^2}} \end{cases}$$

où $F\left(\frac{\pi}{2}, m\right)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce (cf par exemple [1, 16]...).

- la partie régulière peut être approchée à l'ordre ka :

$$(5.8) \quad K_r(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr(u, \theta)} - 1}{r(u, \theta)} d\theta = \frac{e^{ik|u|} - 1}{|u|} + O(ka)$$

L'approximation flaire de Mazari. Le modèle de Mazari consiste à remplacer le noyau K par son approximation définie plus haut et que nous noterons

$$(5.9) \quad \begin{cases} \mathcal{G}(u) = K_s(u) + \frac{e^{ik|u|} - 1}{|u|} = \frac{1}{\pi a} p_a(u) F\left(\frac{\pi}{2}, p_a^2(u)\right) + \frac{e^{ik|u|} - 1}{|u|} \\ p_a(u) = \frac{2a}{\sqrt{u^2 + 4a^2}} \end{cases}$$

La nouvelle formulation s'écrit :

$$(5.10) \quad \begin{cases} \text{Trouver } I \text{ tel que } I(\pm 1) = 0 \text{ et} \\ (AI)(z) = f(z), \quad \forall z \in]-1, 1[\\ \text{avec } (AI)(z) = k^2 \int_{-1}^1 I(z') \mathcal{G}(z - z') dz' + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^1 \mathcal{G}(z - z') \frac{dI}{dz}(z') dz' \end{cases}$$

Propriétés de l'intégrale elliptique et singularité du noyau. L'intégrale elliptique $F\left(\frac{\pi}{2}, m\right)$ a une singularité pour m proche de 1 et pour isoler cette singularité, on peut utiliser le développement suivant, [16] :

$$(5.11) \quad F\left(\frac{\pi}{2}, m\right) = \ln\left(\frac{4}{1-m}\right) + F_1(m)$$

où F_1 est régulière et définie par la série :

$$(5.12) \quad \begin{cases} F_1(m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n (1-m) \left(\ln\left(\frac{1}{1-m}\right) + \beta_n \right) \\ \alpha_n = \prod_{j=1}^n \left(\frac{2j-1}{2j} \right)^2 < 1, \quad \beta_n = \ln 4 - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(2j-1)} \end{cases}$$

En reportant cette expression dans le noyau, on obtient :

$$(5.13) \quad \mathcal{G}(u) = \frac{p_a(u)}{\pi a} \ln \left(\frac{4}{1 - p_a^2(u)} \right) + \frac{p_a(u)}{\pi a} F_1(p_a^2(u)) + \frac{e^{ik|u|} - 1}{|u|}$$

En pratique c'est cette expression qu'on utilise pour calculer le noyau. Pour l'analyse, on préfère isoler la singularité logarithmique, ce qui est possible grâce à la relation suivante :

$$(5.14) \quad \frac{p_a(u)}{\pi a} \ln \left(\frac{4}{1 - p_a^2(u)} \right) = \frac{1}{\pi a} \ln \frac{1}{|u|} + N_r(u)$$

où N_r est une fonction assez régulière, $N_r \in H^2(-1, 1)$. Finalement le noyau peut donc s'écrire

$$(5.15) \quad \mathcal{G}(u) = \frac{1}{\pi a} \ln \frac{1}{|u|} + \mathcal{G}_r(u)$$

où

$$(5.16) \quad \mathcal{G}_r(u) = N_r(u) + \frac{p_a(u)}{\pi a} F_1(p_a^2(u)) + \frac{e^{ik|u|} - 1}{|u|}$$

n'a plus de singularité.

Remarque 6 *On peut noter la ressemblance de cette décomposition avec la décomposition (4.12) établie par Jones pour le noyau de Pocklington, ce qui n'est pas surprenant puisque \mathcal{G} est une approximation de K , et ils ont donc la même singularité.*

Décomposition de l'opérateur A. Il est naturel pour obtenir une décomposition en coercif + compact d'extraire de A un opérateur singulier et on est guidé par le développement du noyau (5.15)-(5.16). On définit les opérateurs :

$$(5.17) \quad \begin{cases} SI(z) = \frac{1}{\pi a} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z - z'|} \frac{dI}{dz}(z') dz' \\ RI(z) = k^2 \int_{-1}^1 I(z') \mathcal{G}(z - z') + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^1 \mathcal{G}_r(z - z') \frac{dI}{dz}(z') dz' \end{cases}$$

Cadre fonctionnel. C'est l'opérateur S qui va fixer le bon cadre fonctionnel. Cet opérateur est analogue au potentiel de double couche qui intervient dans les problèmes de fissures en dimension 2, et il a été établi par de nombreux auteurs ([31, 15, 19, 3, 12, 4]...) que l'espace fonctionnel adapté à son analyse est l'espace de Sobolev $V = H_{00}^{1/2}(-1, 1)$, [26]. Notons \mathcal{J} l'intervalle $\mathcal{J} =] - 1, 1[$, on peut caractériser $H_{00}^{1/2}(\mathcal{J})$ de plusieurs manières. C'est un espace de fonctions $H^{1/2}(\mathcal{J})$ qui "s'annulent sur $\partial\mathcal{J}$ d'une certaine façon" et plus précisément :

$$V = H_{00}^{1/2}(\mathcal{J}) = \left\{ \psi \in H^{1/2}(\mathcal{J}), \rho^{-1/2} \psi \in L^2(\mathcal{J}) \right\}$$

où ρ est une fonction définie sur \mathcal{J} , positive, C^∞ , nulle sur $\partial\mathcal{J}$ et du même ordre que la distance à $\partial\mathcal{J}$. Il est muni de la norme naturelle :

$$\|\psi\|_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{J})} = \left(\|\psi\|_{H^{1/2}(\mathcal{J})}^2 + \|\rho^{-1/2} \psi\|_{L^2(\mathcal{J})}^2 \right)$$

C'est aussi l'espace des fonctions de $H^{1/2}(\mathcal{J})$ qui quand on les prolonge par 0 à \mathbb{R} tout entier restent dans $H^{1/2}(\mathbb{R})$. On voit tout de suite l'intérêt de cette caractérisation qui va permettre

de passer en Fourier ce qui sera très commode comme on va tout de suite le voir... Pour une fonction $\psi \in H_{00}^{1/2}(\mathcal{J})$, si on note $\tilde{\psi} \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ son prolongé par 0, on peut définir une norme équivalent à la précédente :

$$\|\psi\|_{H_{00}^{1/2}(\mathcal{J})} = \|\tilde{\psi}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{1/2} |\tilde{\psi}|^2(\xi) d\xi \right)^{1/2}$$

Dans toute la suite, pour simplifier les notations nous noterons $\hat{\psi}$ la transformée de Fourier de $\tilde{\psi}$. On peut enfin caractériser $H_{00}^{1/2}(\mathcal{J})$ comme l'interpolation d'ordre 1/2 entre $H_0^1(\mathcal{J})$ et $L^2(\mathcal{J})$.

Nous allons voir que c'est très pratique de pouvoir passer en Fourier, notamment pour établir des propriétés de l'opérateur S . Pour montrer par exemple que S est un opérateur linéaire continu de V dans son dual V' , on considère une fonction $\varphi \in V$, $S\varphi$ est alors la distribution définie par (5.17) ou encore par

$$S\varphi = \frac{1}{\pi a} \frac{\partial}{\partial z} L\varphi' \quad \text{où on note} \quad L\varphi = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z - z'|} \varphi(z') dz'$$

On a donc pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{J})$

$$(5.18) \quad \langle S\varphi, \psi \rangle = - \langle L\varphi', \psi' \rangle = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z - z'|} \varphi'(z') \overline{\psi}'(z) dz' dz$$

et on peut passer aux prolongements :

$$\langle S\varphi, \psi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \ln \frac{1}{|z - z'|} \tilde{\varphi}'(z') \overline{\tilde{\psi}}'(z) dz' dz$$

On reconnaît alors un opérateur de convolution : si on note $k(u) = \ln \frac{1}{|u|}$, on a

$$\langle S\varphi, \psi \rangle = - \langle k \star \tilde{\varphi}', \tilde{\psi}' \rangle = - \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{k} i\xi \widehat{\varphi}, i\xi \widehat{\psi} \rangle$$

la deuxième égalité provenant de l'égalité de Parseval. Or on a $\mathcal{F}\left(\ln \frac{1}{|u|}\right)(\xi) = \frac{\pi}{|\xi|}$ d'où

$$(5.19) \quad \langle S\varphi, \psi \rangle = - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\xi| \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}}(\xi) d\xi$$

Sur cette expression, il est facile de voir (en remarquant que $|\xi| < (1 + \xi^2)^{1/2}$) qu'on peut prolonger $S\varphi$ en une forme linéaire continue sur V , et le crochet \langle, \rangle devient le crochet de dualité V', V . On note alors $-b$ la forme bilinéaire associée, c'est à dire d'après (5.18) et (5.19), $\forall \varphi, \psi \in V$:

$$(5.20) \quad \left\{ \begin{aligned} b(\varphi, \psi) &= - \langle S\varphi, \psi \rangle_{V', V} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z - z'|} \varphi'(z') \overline{\psi}'(z) dz' dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\xi| \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}}(\xi) d\xi \end{aligned} \right.$$

On vient de voir que c'est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$:

$$(5.21) \quad |b(\varphi, \psi)| \leq C \|\varphi\|_V \|\psi\|_V$$

La coercivité découle également de (5.19), en effet on a

$$b(\psi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\xi| |\widehat{\psi}|^2(\xi) d\xi$$

La différence par rapport à la norme de ψ dans V est que le poids $(1 + \xi^2)^{1/2}$ est remplacé par $|\xi|$, les comportements à l'infini sont donc identiques, ce qui pourrait changer ce sont les comportements en 0. En fait on peut montrer que b définit bien une norme équivalente à la norme de V , c'est à dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$(5.22) \quad b(\psi, \psi) \geq \alpha \|\psi\|_V^2, \quad \forall \psi \in V$$

Analyse de la formulation (5.10). Nous nous contentons ici d'énoncer les résultats concernant l'analyse de la formulation de Mazari et nous renvoyons à [27] pour les démonstrations. Comme on l'avait annoncé, en se plaçant dans l'espace $V = H_{00}^{1/2}(\mathcal{J})$, elle montre que l'opérateur A se décompose en $A = S + R$, les opérateurs S et R (définis par (5.17)) étant respectivement coercif et compact. L'alternative de Fredholm permet d'affirmer que soit il y a unicité de la solution du problème homogène et dans ce cas il en est de même pour la solution du problème (5.10), soit le problème homogène a un noyau de dimension n et dans ce cas (5.10) admet des solutions à la condition que f soit dans l'orthogonal du noyau. L'étude du noyau de A lui permet de conclure que :

Théorème 4 *Le problème homogène admet une solution unique ce qui permet de conclure que le problème (5.10) admet aussi une solution unique dans V .*

Remarque 7 *On avait remarqué dans la section 2, qu'en partant d'un problème coercif (le Laplacien), l'approximation filaire admettait une solution unique seulement en dehors d'une infinité dénombrable de valeurs du rayon du fil. Il est étonnant de constater qu'ici ce n'est pas le cas, l'approximation filaire est toujours bien posée.*

5.3 Analyse numérique

Le cadre fonctionnel dans lequel s'était placé Jones (fonctions intégrables) n'était pas adapté à l'analyse numérique. Se placer dans un espace de Sobolev permet de ramener la formulation à sa forme variationnelle et de l'approcher à l'aide d'une méthode d'éléments finis, [9, 34]. On bénéficie en particulier de tous les outils qui ont été développés sur les éléments finis frontières, [30, 14, 11].

Formulations variationnelles continue et approchée. La formulation variationnelle de (5.10) peut s'écrire sous la forme suivante (toujours en utilisant la décomposition (5.17) et en notant $V = H_{00}^{1/2}(\mathcal{J})$) :

$$(5.23) \quad \text{Trouver } I \in V \text{ t.q. } a(I, \psi) = \ell(\psi), \quad \forall \psi \in V$$

avec

$$(5.24) \left\{ \begin{array}{l} a(I, \psi) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z - z'|} I'(z') \overline{\psi}'(z) dz' dz + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathcal{K}(z - z') I(z') \overline{\psi}(z) dz dz' \\ \ell(\psi) = \langle f, \psi \rangle_{V', V} = \int_{-1}^1 f(z) \overline{\psi}(z) dz \end{array} \right.$$

On introduit $V_h \subset V$ un sous-espace de dimension finie n de V . La discrétisation de (5.23) consiste simplement à poser le même problème dans V_h , c'est à dire :

$$(5.25) \quad \text{Trouver } I_h \in V_h \text{ t.q. } a(I_h, \psi_h) = \ell_h(\psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h$$

où on suppose que le champ incident a été approché par f_h et $\ell_h(\psi_h) = \int_{-1}^1 f_h(z) \overline{\psi}(z) dz$. Si on considérait un fil de forme quelconque, il faudrait introduire une approximation du fil, et donc considérer des formes approchées $a_h(\cdot, \cdot), \tilde{\ell}_h(\cdot)$.

On utilise une approximation par éléments finis de Lagrange d'ordre m : l'intervalle $[-1, 1]$ est découpé en $N + 1$ éléments $K_i = [z_{i-1}, z_i], i = 1, N + 1$, avec $z_0 = -1, z_{N+1} = 1, z_i = z_{i-1} + h_i$. On note $h = \max_i h_i$. L'espace V est approché par

$$V_h^m = \left\{ \psi_h \in C^0(\mathcal{J}), \psi_h|_{K_i} \in P^m, \forall i, \psi_h(\pm 1) = 0 \right\}$$

où P^m est l'espace des polynômes de degré m . On peut facilement vérifier que $V_h^m \subset V, \forall m \leq 1$. On note $(a_i^K), i = 1, m + 1$ Les degrés de liberté d'un élément K (points du segment K), et p_j^K la fonction de base associée au degré de liberté a_j^K de l'élément K , c'est à dire la fonction de P^m telle que $p_j^K(a_i^K) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, m + 1$. On notera sans indice K les degrés de liberté et fonctions de bases globales $(a_i, p_i, i = 1, n)$.

Estimation d'erreur. Des estimations d'erreur ont été établies pour un problème abstrait où l'opérateur se décompose en coercif + compact (cf [13], [30]). En vérifiant qu'on se trouve bien dans les conditions d'application de ces résultats, Mazari montre que

Théorème 5 *Le problème approché (5.25) admet une solution unique $I_h \in V_h$. De plus, si $I \in V$ est la solution de (5.23) et si $I \in H^{s+1}(\mathcal{J})$, pour $0 \leq s \leq m$, alors on a :*

$$(5.26) \quad \|I - I_h\|_V \leq C \left(h^{s+1/2} \|I\|_{H^{s+1}(\mathcal{J})} + \|f - f_h\|_{V'} \right)$$

Pour savoir quel ordre de convergence on peut espérer il faut donc avoir une idée de la régularité de la solution. Sans hypothèse supplémentaire sur le second membre, elle montre qu'on ne pas espérer mieux que $I \in H^{1-\varepsilon}(\mathcal{J}), \forall \varepsilon > 0$. Mais par ailleurs on a aussi une estimation de stabilité

$$\|I - I_h\|_V \leq C \|I\|_V$$

qui permet d'obtenir (par interpolation), pour $I \in H^{1-\varepsilon}(\mathcal{J}) \cap V$

$$(5.27) \quad \|I - I_h\|_V \leq C \left(h^{1/2-\varepsilon} \|I\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{J})} + \|f - f_h\|_{V'} \right)$$

5.4 Mise en oeuvre numérique

Calcul du courant I . En pratique, on utilise des éléments finis P^1 . Les degrés de liberté correspondent donc aux valeurs du courant aux noeuds du maillage, nous les notons $I_i, i = 0, N + 1$. Les conditions aux limites sont traduites par

$$I_0 = I_{N+1} = 0$$

Les fonctions de base sont les fonctions chapeaux, pour $i = 1, N$:

$$p_i(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{i-1}}{h_i} & \text{si } z \in [z_{i-1}, z_i] \\ \frac{z_{i+1} - z}{h_{i+1}} & \text{si } z \in [z_i, z_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le courant approché se représente par :

$$(5.28) \quad I_h(z) = \sum_{i=1}^N I_i p_i(z)$$

et on le calcule comme la solution de

$$(5.29) \quad \sum_{i=1}^N I_i a(p_i, p_j) = \ell(p_j), \quad \forall j = 1, N$$

ce qui revient à résoudre le système linéaire

$$(5.30) \quad \mathbf{A}_h \mathbf{I}_h = F_h$$

où \mathbf{I}_h est le vecteur des I_i et

$$(5.31) \quad \begin{cases} (\mathbf{A}_h)_{ij} = a(p_i, p_j) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathcal{G}(z - z') (k^2 p_i(z) p_j(z') - p_i'(z) p_j'(z')) dz dz', \\ (F_h)_j = \ell(p_j) = \int_{-1}^1 f_h(z) p_j(z) dz \end{cases}$$

Pour le calcul de la matrice \mathbf{A}_h on utilise l'expression (5.13) du noyau, et on tronque la somme (5.12) à $n = 4$ (le reste est estimé inférieur à 2.10^{-8} , [1]). La matrice \mathbf{A}_h est une matrice complexe symétrique (non hermitienne). Le calcul des coefficients de la matrice \mathbf{A}_h se fait en utilisant une méthode d'assemblage standard : à chaque degré de liberté j on associe deux segments K_j^\pm qui supportent la fonction de base associée, et on écrit

$$(\mathbf{A}_h)_{ij} = \sum_{\varepsilon_j = \pm} \sum_{\varepsilon_i = \pm} \int_{K_j^{\varepsilon_j}} \int_{K_i^{\varepsilon_i}} \mathcal{G}(z - z') (k^2 p_i(z) p_j(z') - p_i'(z) p_j'(z')) dz dz'$$

On est donc ramené à calculer des contributions élémentaires du type

$$(5.32) \quad M_{ij} = \int_{K_i} \int_{K_j} \mathcal{G}(z - z') \phi(z) \psi(z') dz dz'$$

où ϕ (resp. ψ) est une des deux fonctions de base sur l'élément K_i (resp. K_j).

La difficulté essentielle provient de l'intégration de la singularité du noyau. La méthode est classique en équations intégrales (cf §3.4.1 pour l'équation intégrale complète) : on distingue deux cas suivant que les segments sont adjacents ou confondus.

Dans le premier cas (segments disjoints) il n'y a pas de singularité et on peut utiliser des formules de quadratures (formule de Gauss-Legendre, [1, 39, 40]) pour approcher les intégrales. En pratique, on a intérêt à utiliser un nombre de points de quadrature qui dépend de la distance entre les segments considéré. Mazari propose d'utiliser une formule à N_i points sur K_i , avec $N_i = \max(2, E(\frac{h_i}{d_{ij}}))$ où $d_{ij} = \frac{1}{2}|(z_{i-1} + z_i) - (z_{j-1} + z_j)|$.

Dans le second cas, on isole la singularité du noyau puis on l'intègre une première fois analytiquement (ce qui est rendu possible par des changements de variables qui permettent de se ramener à intégrer simplement des produits de fonctions de base). Il reste alors à intégrer numériquement une fonction du type $\log x f(x)$. Les formules de Gauss Legendre sont très mal adaptées dans ce cas à cause de la singularité logarithmique. On utilise plutôt des formules de quadrature à poids logarithmiques (cf [29]).

5.5 Conclusion

Nous avons vu que la méthode de Mazari présente de nombreux avantages par rapport aux méthodes couramment utilisées, en particulier la méthode des moments. Notamment sa stabilité est un atout considérable puisqu'elle permet d'approcher le courant avec une précision tout à fait raisonnable en raffinant le maillage.

Cependant, cette méthode consiste à calculer non pas le courant sur le fil, mais sa moyenne par rapport à la section du fil. On perd ainsi toute information provenant de la dépendance par rapport à la variable angulaire, ce qui ne rend pas possible le calcul du champ proche du fil. Sur des exemples, Mazari a montré qu'on peut calculer le champ, avec une précision raisonnable, à une distance de environ $\max(10a, h)$. C'est évidemment un gain par rapport à la méthode des moments (qui ne pouvait le calculer qu'à une distance d'environ $50a$), mais c'est quand même une limitation. Pour résoudre cette difficulté, Mazari propose de faire un "effet loupe" : après avoir calculé le courant globalement sous l'hypothèse filaire, elle introduit localement un maillage surfacique sur la partie du fil à proximité de laquelle on veut calculer le champ. Elle résout ensuite l'équation intégrale complète posée sur le maillage local, en utilisant les résultats du calcul global pour déterminer les conditions aux limites.

On peut se demander s'il serait possible, comme pour le Laplacien, d'obtenir une approximation filaire qui tienne compte de la dépendance par rapport à l'angle, ce qui permettrait de calculer le champ proche sans avoir besoin d'utiliser un code 3D.

Remerciements. Tous mes remerciements à F. Collino pour ses notes personnelles et à A. Mazari qui a répondu patiemment à toutes mes questions filaires...

References

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publication, 1968.
- [2] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.

- [3] A. Bamberger. Approximation de la Diffraction d'Ondes Elastiques, une Nouvelle Approche (I),(II),(III). Technical report, Ecole Polytechnique, CMAP, 1983. Rapports Internes n° 91, 96, 98.
- [4] E. Bécache and T. Ha Duong. A Space-Time Variational Formulation for the Boundary Integral Equation in a 2D Elastic Crack Problem. *RAIRO, M2AN*, 28,n°2:141–176, 94.
- [5] A. Bendali. *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*. PhD thesis, Paris VI, 1984. Thèse de doctorat d'état.
- [6] A. Bendali. Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic maxwell equations by a boundary element method. part 1: The continuous problem. *Math. Comp.*, 43:29–46, 1984.
- [7] A. Bendali. Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic maxwell equations by a boundary element method. part 2: The discrete problem. *Math. Comp.*, 43:47–68, 1984.
- [8] A. Bendali, C. Devys, J.C. Nédélec, and A. Ziani. Magellan - code de calcul du rayonnement d'une antenne quelconque. Technical report, Rapport DRET, 1986.
- [9] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland, 1978.
- [10] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley and Sons, 1983.
- [11] R. Dautray and J. L. Lion. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, volume 2, chapter XIII. Masson, 1985.
- [12] T. Ha Duong. On the boundary integral equations for the crack opening displacement of flat cracks. *Integr. Equat. Oper. Th.*, 15:427–453, 1992.
- [13] J. Giroire. *Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales*. PhD thesis, Université de Paris 6, 1987. Thèse de doctorat d'état.
- [14] J. Giroire. Mise en oeuvre de méthodes d'éléments finis de frontière. Technical report, Université Paris 6, 1987. Cours de DEA d'Analyse Numérique.
- [15] J. Giroire and J. C. Nédélec. Numerical Solution of an Exterior Neumann Problem using a Double Layer Potential. *Math. Comp.*, 32:973–990, 1978.
- [16] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic Press INC, 1980. 4eme edition.
- [17] M. C. Gray. *J. Appl. Phys.*, 15(61), 1944.
- [18] E. Hallen. *Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsal*, 4(11), 1938.
- [19] M. A. Hamdi. Une formulation variationnelle par équations intégrales pour le résolution de l'équation de helmholtz avec des conditions aux limites mixtes. *C.R. Acad. Sc.*, T 292:17–20, 1981. Série II.
- [20] R. F. Harrington. *Field computation by moment methods*. Macmillan, New York, 1968.

- [21] D. S. Jones. *The Theory of Electromagnetism*. Pergamon, 1964.
- [22] D. S. Jones. Note on the integral equation for a straight wire antenna. *IEEE PROC*, 128(2), April 1981.
- [23] D. S. Jones. *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*. Oxford Science Publications, 1994. second edition.
- [24] R. King. *J. Appl. Phys.*, 24(140), 1953.
- [25] R. King and D. Middleton. *Quart. Appl. Math.*, 3(302), 1946.
- [26] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non Homogènes et Applications*, volume 1. Dunod, 1968,.
- [27] A. Mazari. *Détermination par une méthode d'équations intégrales du champ électromagnétique rayonné par une structure filiforme*. PhD thesis, Université de Paris 6, 1991. Thèse.
- [28] K. K. Mei. On the integral equations of thin wire antennas. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 13(3), 1965.
- [29] Henri Mineur. *Techniques de Calcul Numérique*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1952.
- [30] J. C. Nédélec. Approximation des Equations Intégrales en Mécanique et en Physique. Technical report, Ecole Polytechnique, CMAP, 1977. Cours de l'Ecole d'Eté CEA-EDF-INRIA.
- [31] J. C. Nédélec. Résolution par Potentiel de Double Couche du Problème de Neumann extérieur . *C.R. Acad. Sc.*, T 286:103–106, 1978. série A.
- [32] J.C. Nédélec. Ondes acoustiques et électromagnétiques. equations intégrales. Ecole Polytechnique, 1996. Cours de DEA, à paraître.
- [33] H. C. Pocklington. Electrical oscillations in wires. In *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1897.
- [34] P. A. Raviart and J. M. Thomas. *Introduction l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*. Masson, 1983.
- [35] F. Rogier. *Problèmes Mathématiques et numériques liés à l'approximation de la géométrie d'un corps diffractant dans les équations de l'électromagnétisme* . PhD thesis, Université de Paris 6, 1989. Thèse.
- [36] E. Roubine. Lignes et antennes. *Revue d'optique*, 1954.
- [37] B. P. Rynne. The well-posedness of the integral equations for thin wire antennas. *IMA J. Appl. Math.*, 49:35–44, 1992.
- [38] S. A. Schelkunoff. *Advanced Antenna Theory*, chapter 5. Wiley, New York, 1952.
- [39] G. Strang and G. J. Fix. *An analysis of the finite element method*. Englewood Cliffs Prentice Hall, 1973.

- [40] A. H. Stroud. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice - Hall, 1971.
- [41] I. Terrasse. *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés*. . PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1993. Thèse.