Morphologie mathématique 3

Ecole d'été STIC – Sousse 2008

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

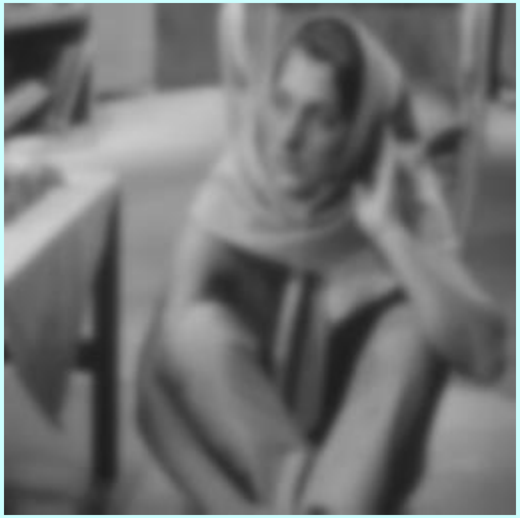
Chapitre 3 : **Filtrage morphologique – analyse granulométrique**

- Filtres morphologiques.
- Ouvertures et fermetures algébriques.
- Analyse granulométrique.
- Filtres alternés séquentiels.
- Pyramides et espaces d’échelles morphologiques.
- Filtres connexes et F.A.S par reconstruction

L’approche morphologique du filtrage

En traitement linéaire des images, filtrer, c’est *éliminer* certaines *composantes fréquentielles* des images.

Filtrage = Convolution



En morphologie mathématique, filtrer, c’est *simplifier* l’image en supprimant certaines structures géométriques (en général implicitement définies par un ou plusieurs éléments structurants).

Le filtre morphologique simplifie l’image en préservant la structure, mais il perd en général de l’information (→ Croissance).

Le filtre morphologique est stable et possède une classe d’invariance connue (→ Idempotence).

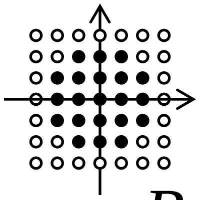
Rappel : ouvertures et fermetures morphologiques

l'ouverture morphologique de X par B.

$$\boxed{\gamma_B(X) = X \circ B = \delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(X)) = \left(X \ominus \breve{B}\right) \oplus B}$$

la fermeture morphologique de X par B.

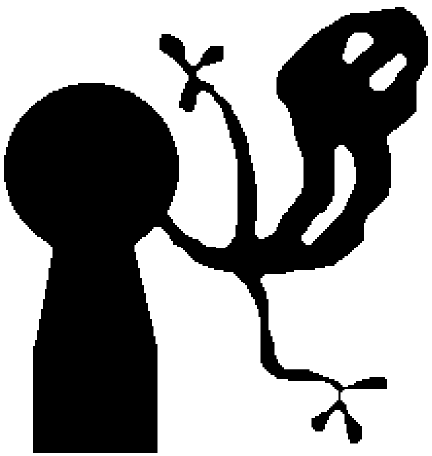
$$\boxed{\varphi_B(X) = X \bullet B = \varepsilon_{\breve{B}}(\delta_B(X)) = \left(X \oplus \breve{B}\right) \ominus B}$$



B

X

$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

IDEMPOTENCE

$$\gamma_B(\gamma_B(x)) = \gamma_B(x)$$

$$\varphi_B(\varphi_B(x)) = \varphi_B(x)$$

EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive : $\gamma_B(x) \leq x$

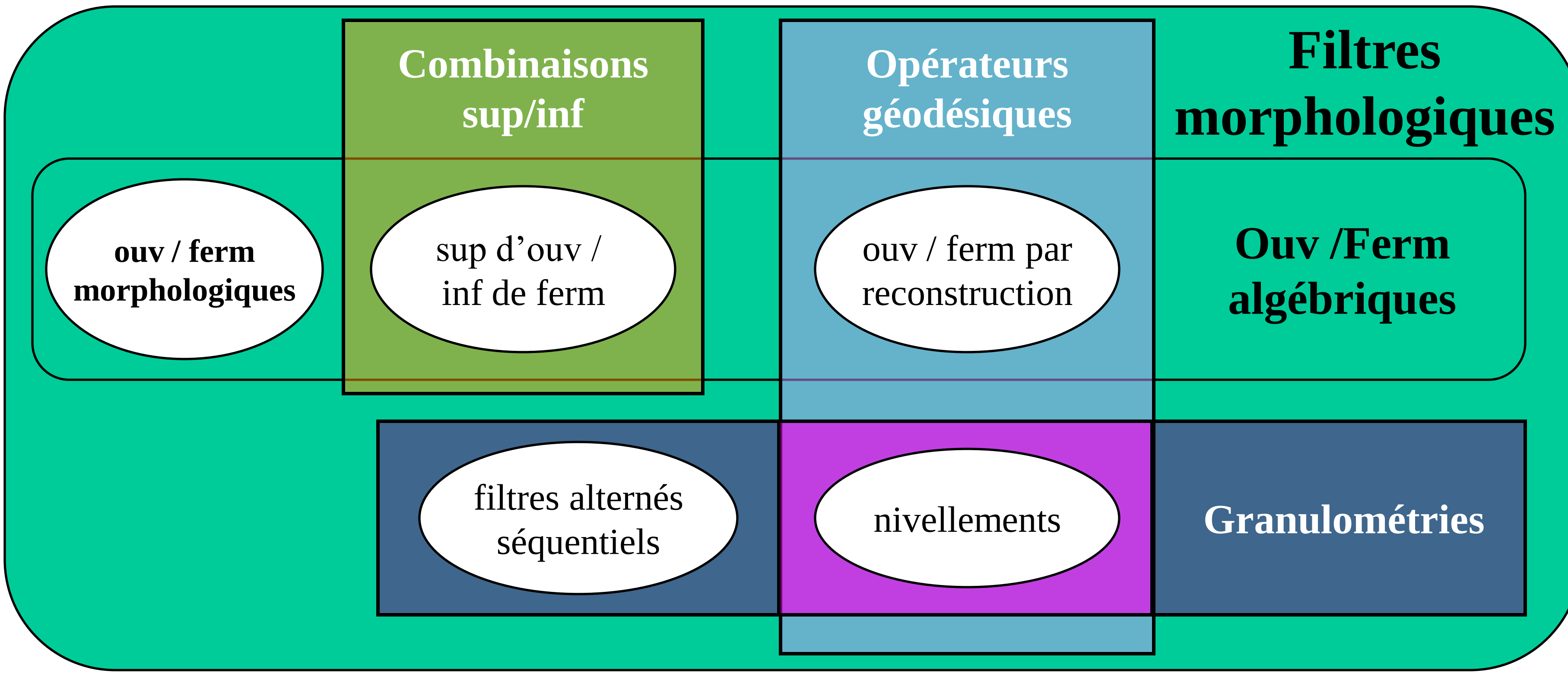
La fermeture est extensive : $x \leq \varphi_B(x)$

Filtres morphologiques

Un *filtre morphologique* est un opérateur ψ *croissant* et *idempotent* :

$$x \leq y \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(y) \qquad \psi(\psi(x)) = \psi(x)$$

On peut construire différentes familles de filtres morphologiques à partir des filtres de base, l'ouverture et la fermeture morphologiques :



Ouvertures et fermetures algébriques

Les ouvertures et fermetures algébriques généralisent
les ouvertures et fermetures morphologiques.

- Une ouverture algébrique est un filtre morphologique anti-extensif.
- Une fermeture algébrique est un filtre morphologique extensif.

PROPRIETE

- Un sup d'ouvertures morphologiques est une ouverture algébrique
- Un inf de fermetures morphologiques est une fermeture algébrique

ex :

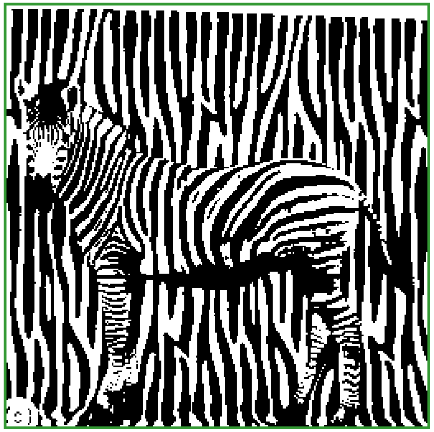
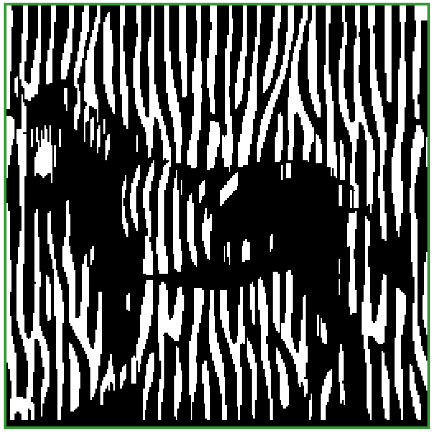


Image originale



Ouverture morpholoqique par un segment vertical

Ouverture morpholoqique par un segment horizontal

Ouverture algébrique par union des deux ensembles

Granulométries

L'analyse granulométrique est l'étude de la taille des objets fondée sur le principe du *tamisage* : sélection des objets par un ensemble de tamis de différentes tailles.

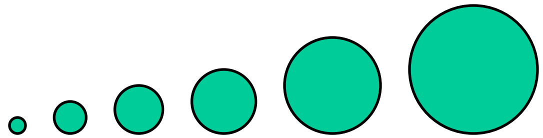
Formellement, une granulométrie peut être définie par une famille d'ouvertures :

$$(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0} \qquad \text{telle que :}$$

$$0 \leq \lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_\lambda \gamma_{\lambda'} = \gamma_{\lambda'} \gamma_\lambda = \gamma_{\lambda'}$$

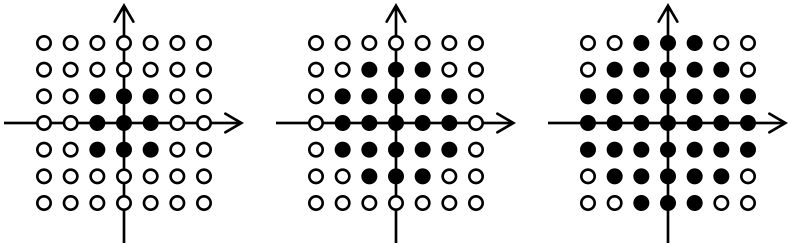
ex1 : $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}^+}$

Ouvertures par des boules euclidiennes de rayon λ



ex2 : $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$

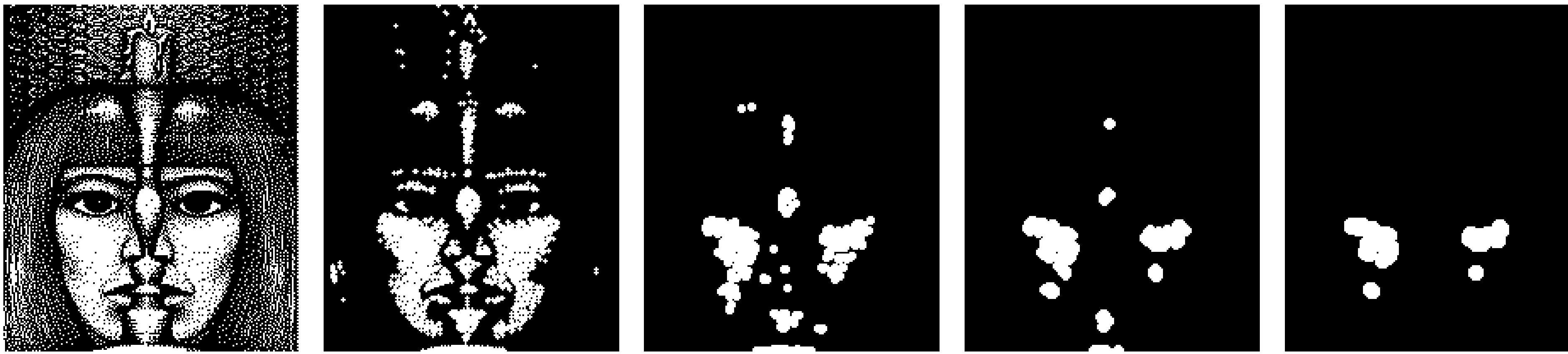
Ouvertures par une suite croissante de boules discrètes



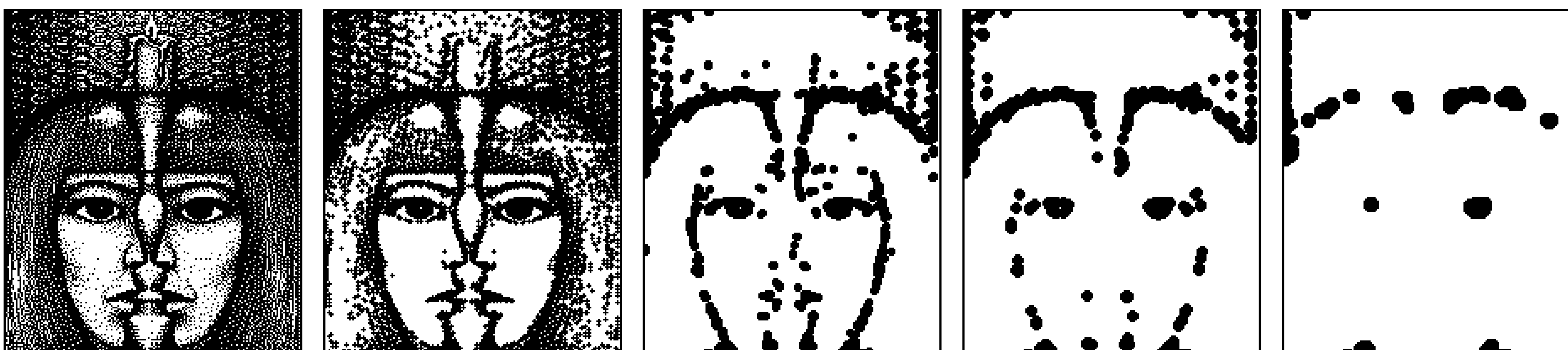
Granulométrie et anti-granulométrie

La famille des opérateurs duaux (fermetures de taille croissante) est une anti-granulométrie :

granulométrie



anti-granulométrie

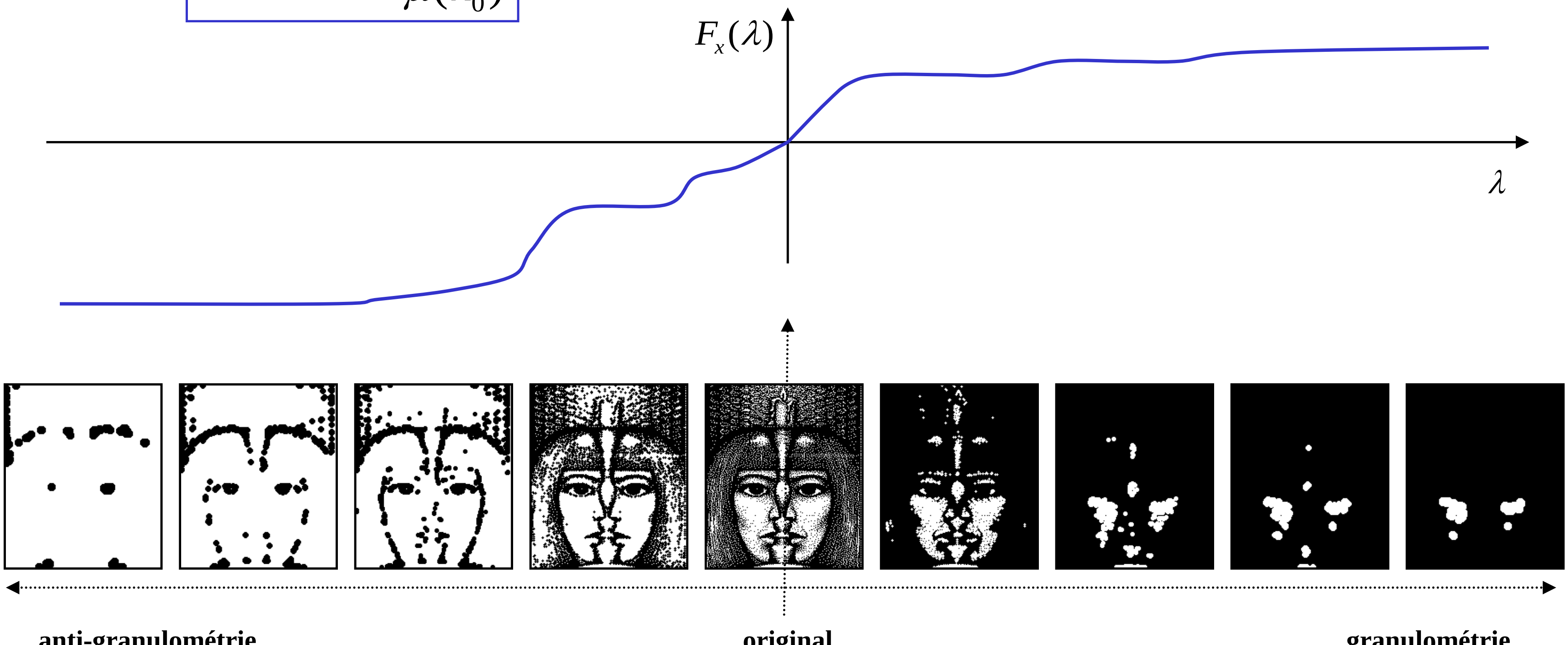


Fonction de distribution granulométrique

Soit μ une mesure bornée sur un treillis E (aire, intégrale…)

Pour $x \in E$, on note x_λ (resp. $x_{-\lambda}$) l'image de x par l'opérateur de granulométrie (resp.d'anti-granulométrie) d'indice λ.

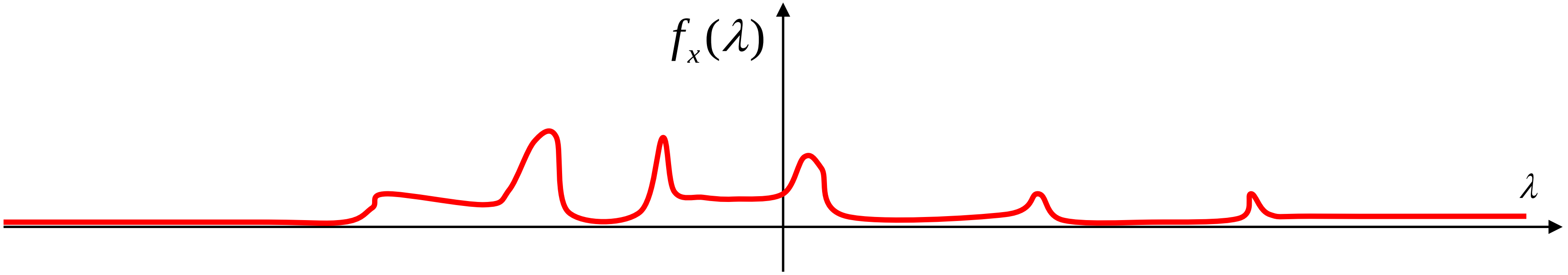
On note $\boxed{F_x(\lambda) = 1 - \dfrac{\mu(x_\lambda)}{\mu(x_0)}}$ la fonction de distribution sur x de la granulométrie $(\gamma_\lambda)_\lambda$

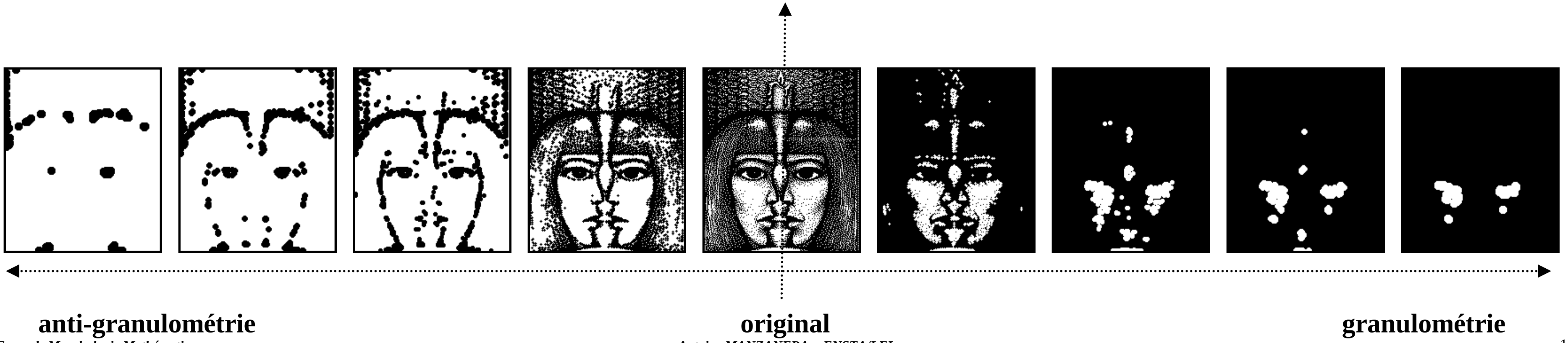


Spectre granulométrique

Le spectre granulométrique est la dérivée de la fonction de distribution granulométrique :

$$\boxed{f_x(\lambda) = F'_x(\lambda)}$$





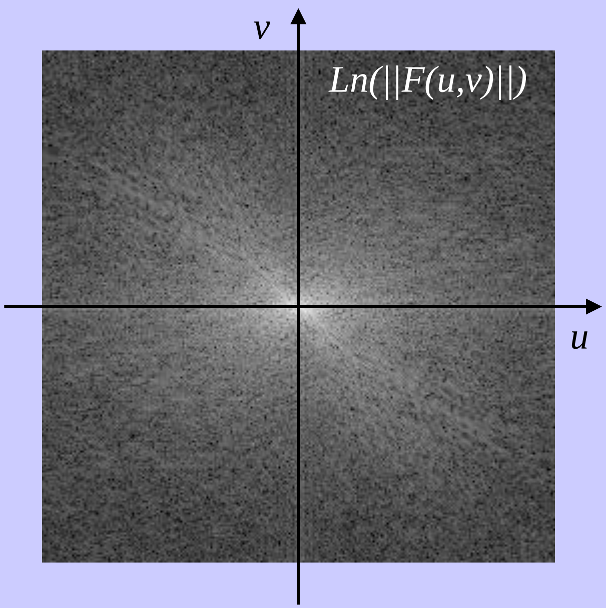
L'analyse granulométrique

→ Etude quantitative des images par la mesure de la contribution de chaque composante à l'image globale :

Traitement linéaire :

Transformée de Fourier

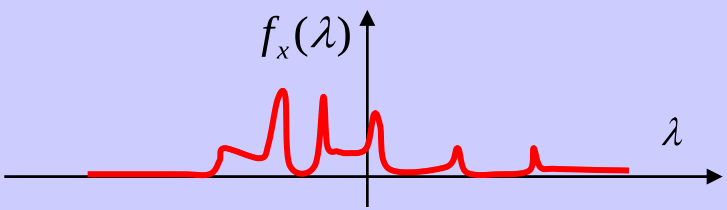
Composantes = sinusoïdes complexes



Morphologie mathématique :

Analyse granulométrique

Composantes = famille de boules

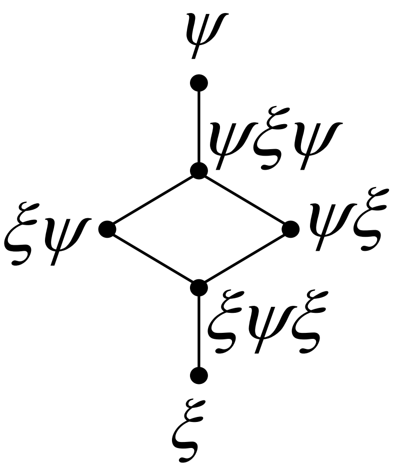


Historiquement : une des premières application de la morphologie mathématique était l'étude quantitative des sols poreux par analyse granulométrique de coupes microscopiques.

Construction des filtres alternés

L'ensemble des filtres sur un treillis complet E forme un treillis $\mathfrak{I}$

Théorème Soients $\xi, \psi \in \mathfrak{I}$ tels que $\xi \leq \psi$



- L'ensemble ci-contre est un sous-treillis de $\mathfrak{I}$:
- De plus, on a l'équivalence :

$$\psi\xi \leq \xi\psi \Leftrightarrow \psi\xi\psi = \xi\psi \Leftrightarrow \xi\psi\xi = \psi\xi$$

Matheron 1988

dem : (1) filtres (idempotence) : $\xi\psi = \xi\xi\xi\psi \leq \xi\psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi\psi = \xi\psi$

$$\xi\psi\xi = \xi\xi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\psi\psi\psi\xi = \xi\psi\xi$$

(2) ordres :

$$\xi = \xi\xi\xi \leq \xi\psi\xi \leq \begin{matrix} \psi\psi\xi = \psi\xi = \psi\xi\xi \\ \xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \end{matrix} \leq \psi\xi\psi \leq \psi\psi\psi = \psi$$

(3) plus petit majorant :

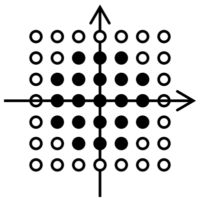
soit ζ un filtre tel que $\zeta \geq \xi\psi$ et $\zeta \geq \psi\xi$ alors $\zeta = \zeta\zeta \geq \psi\xi\xi\psi = \psi\xi\psi$

(4) équivalence : $\xi\psi = \psi\xi\psi \Rightarrow \xi\psi \geq \psi\xi\xi = \psi\xi$

et $\psi\xi \leq \xi\psi \Rightarrow \psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \leq \psi\xi\psi$

Exemple de filtres alternés

On prend : $\xi = \gamma$ (ouverture morphologique) $\psi = \varphi$ (fermeture morphologique)



élément structurant

I

γ

φ

$\varphi\gamma\varphi$

$\varphi\gamma$

$\gamma\varphi$

$\gamma\varphi\gamma$

Filtres alternés séquentiels

Soit $(\gamma_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ une granulométrie, et $(\gamma_\lambda^* = \varphi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$

l'anti-granulométrie associée

Alors les opérateurs suivants :

$$\boxed{\Theta_\lambda = \varphi_\lambda\gamma_\lambda\ldots\varphi_2\gamma_2\varphi_1\gamma_1}$$

$$\boxed{\Xi_\lambda = \gamma_\lambda\varphi_\lambda\ldots\gamma_2\varphi_2\gamma_1\varphi_1}$$

sont des filtres, dits *filtres alternés séquentiels* associés à la granulométrie $(\gamma_\lambda)_{\lambda\geq 0}$

Propriétés d'absorption :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \begin{cases} \Theta_{\lambda'}\Theta_\lambda = \Theta_{\lambda'} & \text{mais} \quad \Theta_\lambda\Theta_{\lambda'} \leq \Theta_{\lambda'} \\ \Xi_{\lambda'}\Xi_\lambda = \Xi_{\lambda'} & \text{mais} \quad \Xi_\lambda\Xi_{\lambda'} \leq \Xi_{\lambda'} \end{cases}$$

Serra 1988

Filtres alternés séquentiels : démonstration des propriétés

Filtre morphologique (idempotence) :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_{\lambda'} \leq \gamma_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda'} \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda} \geq \gamma_{\lambda}\gamma_{\lambda} = \gamma_{\lambda} \geq \gamma_{\lambda'} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda} \geq \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}\gamma_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}$$

et $$(*) \Rightarrow \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda}\varphi_{\lambda} = \varphi_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda'} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'}\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}$$

donc $$\lambda \leq \lambda' \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}$$

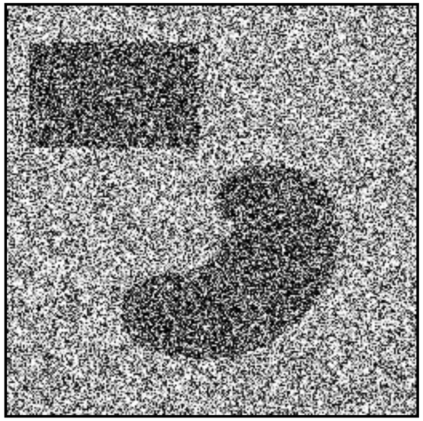
d'où $$\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1} \geq \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1} = \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}$$

et $$\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1} \leq \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1} = \varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}$$

Propriétés d'absorption :

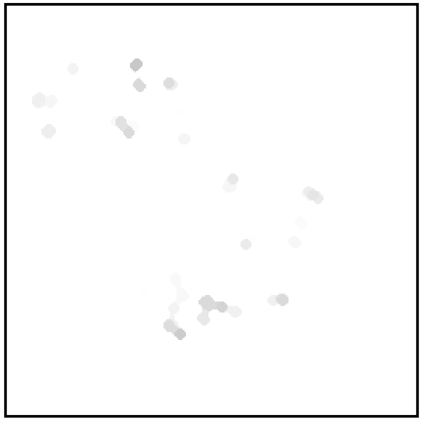
$$\begin{aligned}
\Theta_{\lambda'}\Theta_{\lambda} &= \left(\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}\ldots\varphi_{\lambda+1}\gamma_{\lambda+1}\right)\left(\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\right)\left(\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\right) \\
&= \left(\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}\ldots\varphi_{\lambda+1}\gamma_{\lambda+1}\right)\left(\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\right) = \Theta_{\lambda'} \\
\Theta_{\lambda}\Theta_{\lambda'} &= \left(\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\right)\left(\varphi_{\lambda'}\gamma_{\lambda'}\ldots\varphi_{\lambda+1}\gamma_{\lambda+1}\right)\left(\varphi_{\lambda}\gamma_{\lambda}\ldots\varphi_{2}\gamma_{2}\varphi_{1}\gamma_{1}\right) \\
&\leq \Theta_{\lambda'}
\end{aligned}$$

Application à la réduction du bruit

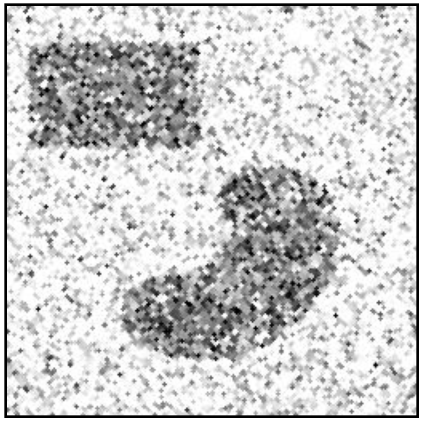


Original

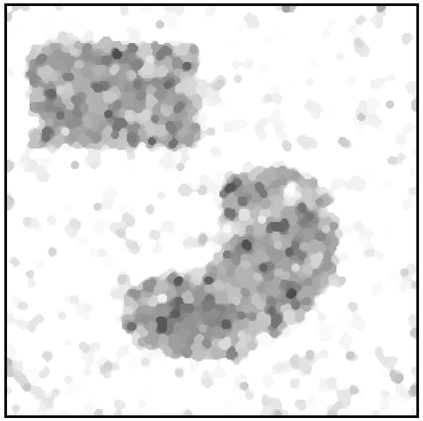
Les filtres alternés séquentiels conduisent à une bonne réduction du bruit grâce à une élimination progressive des pics et des creux de faible surface.



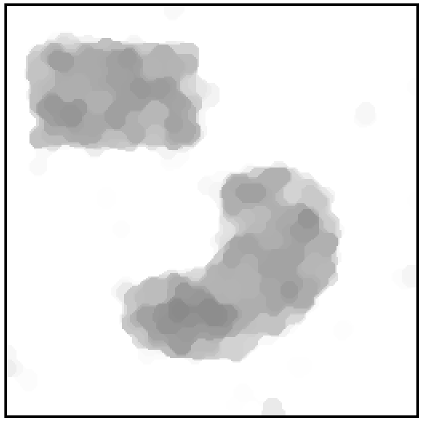
Application directe du filtre alterné $\gamma_4 \phi_4$



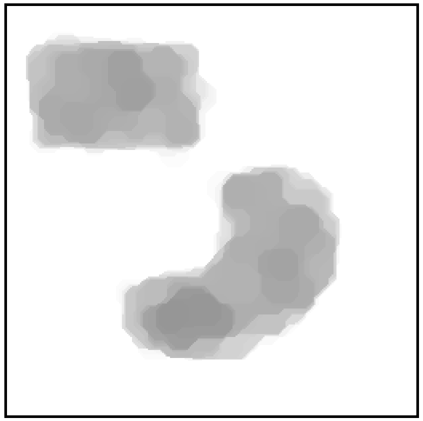
Ξ_1



Ξ_2



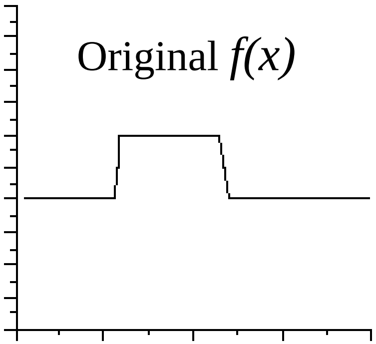
Ξ_5



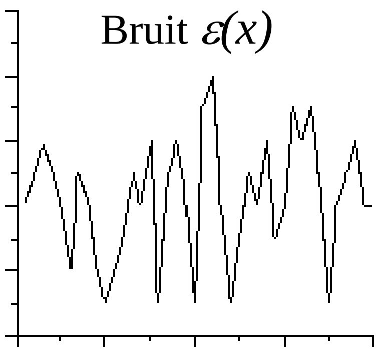
Ξ_8

Application à la réduction du bruit

Original $f(x)$

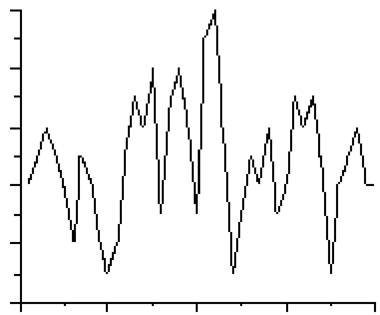


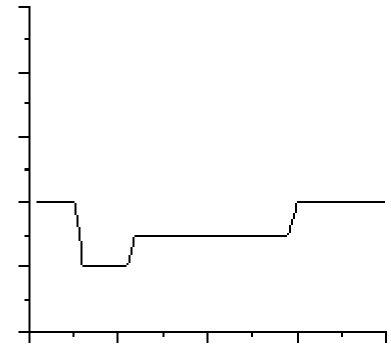
Bruit $\varepsilon(x)$



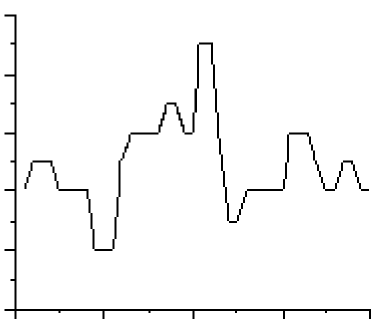
…en 1d :

Somme $f(x)+\varepsilon(x)$



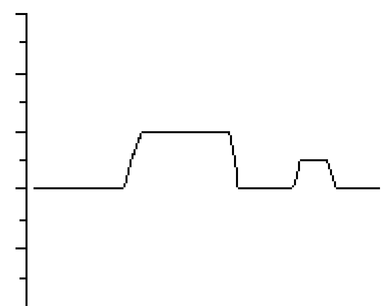


Application directe du filtre alterné $\phi_5\,\gamma_5$

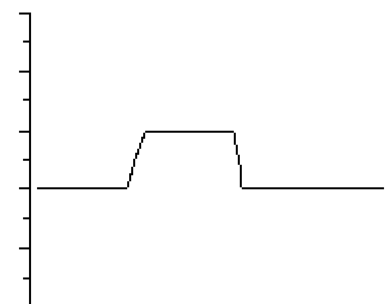


Θ_2

Θ_3



Θ_4



Θ_5

Espace d'échelle morphologique

Une granulométrie induit un *espace d'échelle* (scale-space), qui fournit une représentation des images à différents niveaux de détail.

Ouvertures et fermetures par reconstruction

La reconstruction géodésique est un filtre morphologique :

$$x \le y \Rightarrow E^r(x) \le E^r(y) \qquad\qquad E^r\left(E^r(x)\right) = E^r(x)$$

Si ξ (resp. ψ) est un opérateur anti-extensif (resp. extensif)

alors l'opérateur : $E^x\left(\xi(x)\right)$ (resp. $\left(E^{x^c}\left((\psi(x))^c\right)\right)^c$)

est une ouverture (resp. fermeture) algébrique.

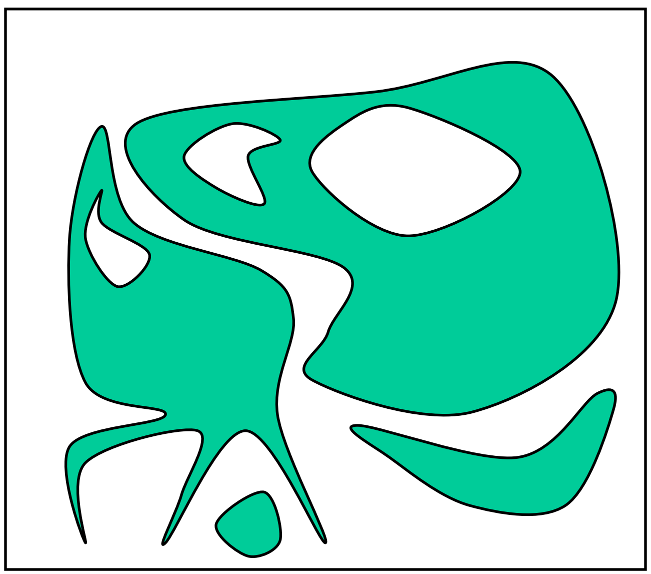
Cas particulier important : $\xi = \gamma$ (ouverture) et $\psi = \phi$ (fermeture) :

ouverture par reconstruction : $\boxed{E^x\left(\gamma(x)\right)}$

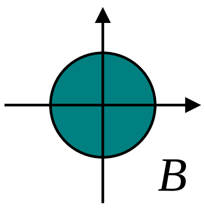
fermeture par reconstruction : $\boxed{\left(E^{x^c}\left((\varphi(x))^c\right)\right)^c}$

Ouvertures et fermetures par reconstruction

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :



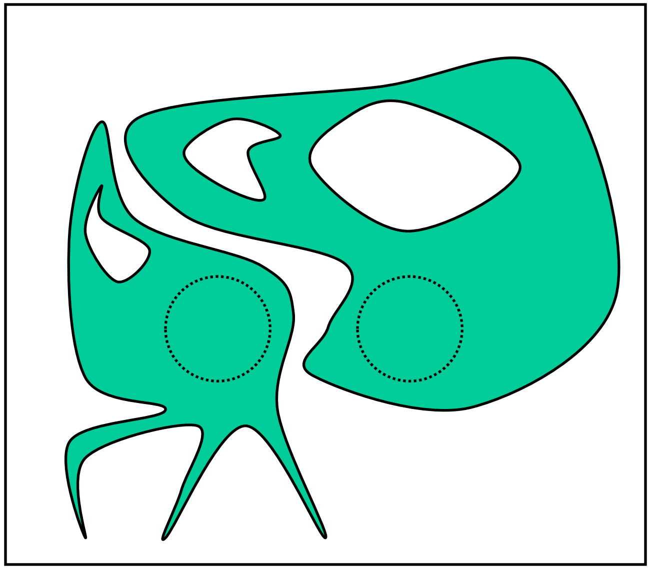
X



B

ouverture par reconstruction

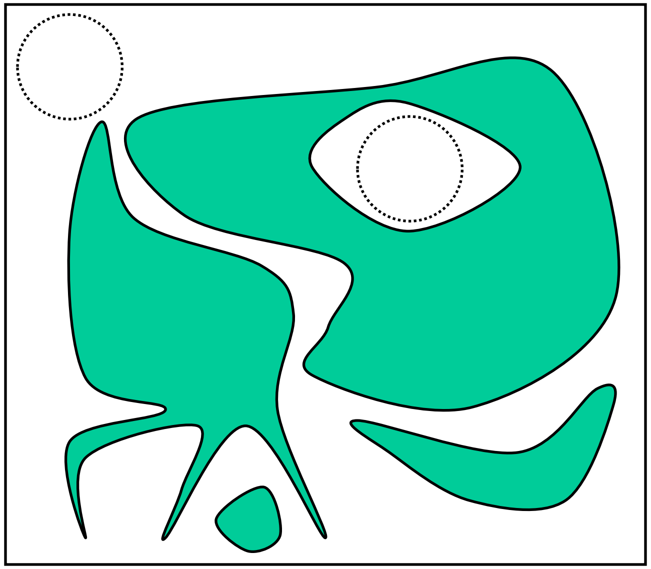
$$E^{X}\left(\gamma_B(X)\right)$$



La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

fermeture par reconstruction

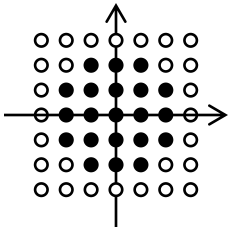
$$\left(E^{X^c}\left(\left(\varphi_B(X)\right)^c\right)\right)^c$$



Ouvertures et fermetures par reconstruction

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction élimine les structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant de l'ouverture morphologique :



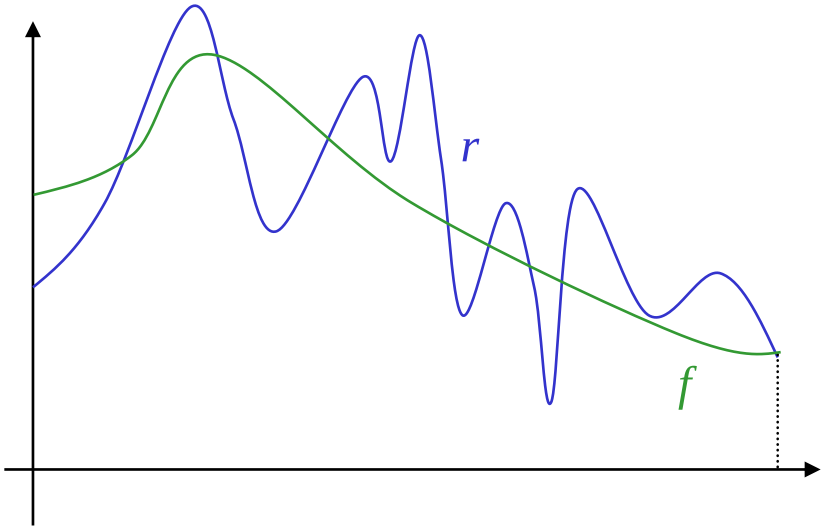
original

ouverture par reconstruction

fermeture par reconstruction

Nivellements

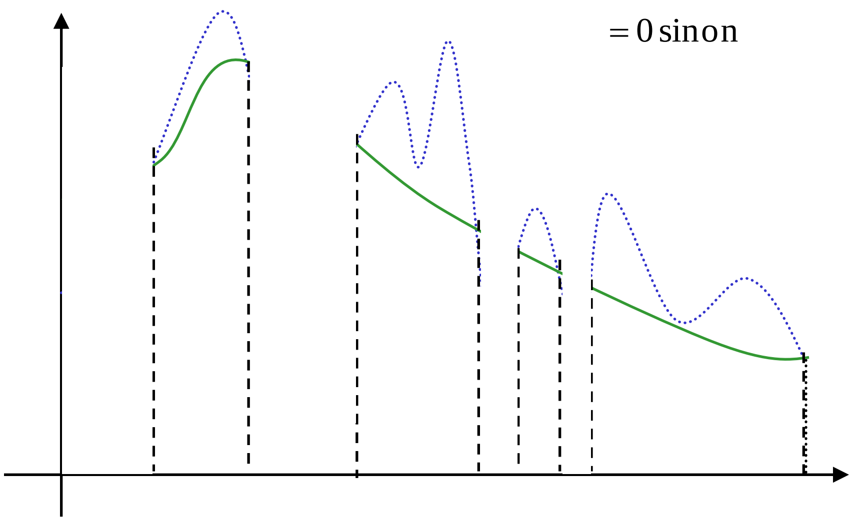
Cas où la fonction marqueur *f* et la fonction de référence *r* ne sont pas ordonnées



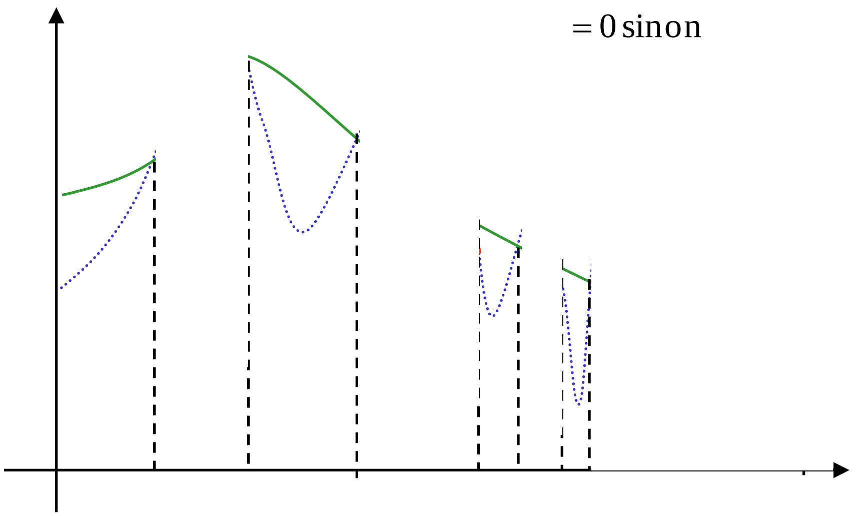
On décompose *f* en deux fonctions :

$$f = f_- + f_+$$
$$= f_- \vee f_+$$

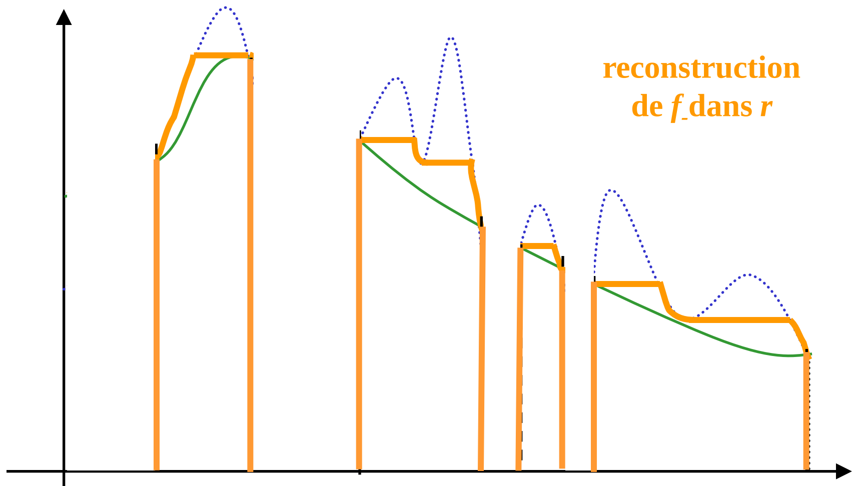
$$f_-(x) = f(x) \text{ si } f(x) \leq r(x)$$
$$= 0 \text{ sinon}$$



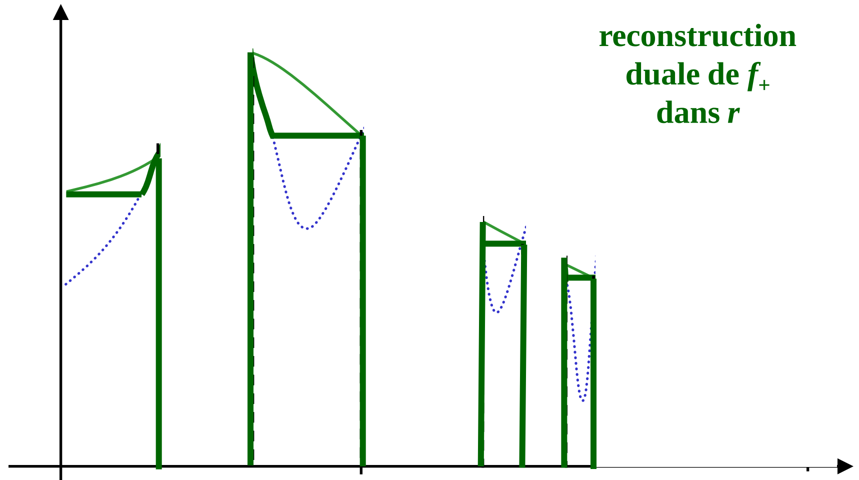
$$f_+(x) = f(x) \text{ si } f(x) > r(x)$$
$$= 0 \text{ sinon}$$



Nivellements

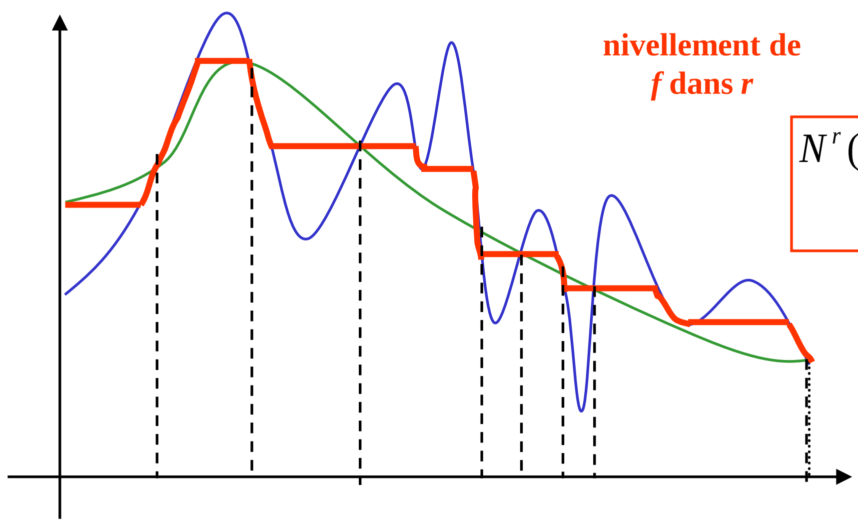


$$N_-^r(f) = E^r(f_-)$$



$$N_+^r(f) = \overline{E^{\bar{r}}(\overline{f_+})}$$

Les *nivellements* définissent des *opérateurs connexes*, qui simplifient l'image par *sélection* des ensembles de niveaux ou de leurs complémentaires :



$$\boxed{\begin{aligned} N^r(f) &= N_+^r(f) + N_+^r(f) \\ &= N_+^r(f) \vee N_+^r(f) \end{aligned}}$$

Exemples de nivellement

original

filtre gaussien

nivellement

filtre médian

nivellement

Nouvel espace d'échelles morphologique

Une granulométrie induit un espace d'échelle via les *filtres alternés séquentiels par reconstruction* (i.e. nivellement des filtres alternés séquentiels) :