



# *Morphologie mathématique 1*

Ecole d'été STIC – Sousse 2008

*Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI*

# Morphologie Mathématique pour l'analyse d'images : Concepts et Algorithmes

La *morphologie mathématique* est une théorie de traitement *non linéaire* de l'information apparue en France dans les années 60 (G. Matheron & J. Serra, Ecole des Mines de Paris), et qui est aujourd'hui très largement utilisée en *analyse d'images*.

Contrairement au traitement linéaire des images, la morphologie mathématique ne repose pas sur le traitement du signal, mais sur la *théorie des ensembles*, ce qui en fait une discipline relativement « auto-contenue », qui peut s'appuyer sur un bagage théorique très limité.

L'objectif de ce cours est de fournir les concepts de base de la morphologie mathématique pour l'analyse d'images, mais aussi de présenter les techniques récentes en analyse morphologique d'images. On mettra l'accent chaque fois que possible sur les aspects algorithmiques et les problèmes d'implantation numérique.

Le cours s'accompagne d'exercice pour se familiariser avec les manipulations géométrique et algébrique, ainsi que de travaux pratiques, pour expérimenter et programmer des opérateurs morphologiques.

# Morphologie Mathématique : Plan du cours

## Chapitre 1 : Introduction et premiers opérateurs (*A. Manzanera*)

Fondements algébriques : treillis complet, adjonction.

Fondements géométriques : opérateurs intégraux, érosion dilatation ensemblistes.

Érosion et dilatation fonctionnelles.

Premiers opérateurs résiduels ou composés : gradients, ouvertures, top-hats, opérateurs de contraste.

Introduction aux opérateurs géodésiques.

## Chapitre 2 : Géométrie discrète et approche algorithmique (*A. Manzanera*)

Pavages et maillages. Topologie et métrique dans la maille cubique.

Transformées en distance. Algorithmes : parallèle ou séquentiel, Danielsson-Leymarie.

Application à l'érosion ensembliste. Érosion numérique et algorithme de Van Herk.

Reconstruction géodésique et files d'attente.

## Chapitre 3 : Filtrage morphologique (*A. Manzanera*)

Ouverture algébrique. Granulométries et spectre morphologique.

Semi-groupes de Matheron. Filtres alternés séquentiels.

Reconstruction numérique et F.A.S par reconstruction. Espaces d'échelles morphologiques.

## Chapitre 4 : Ligne de partage des eaux (LPE) (*J. Serra*)

Notion de bassins versants, et ses différentes acceptions.

Deux algorithmes de LPE : 1/ par seuillages successifs, 2/ par amincissement des arêtes.

LPE conditionnée par swamping.

Segmentation par LPE d'une fonction et de sa dérivée, choix de marqueurs.

## Chapitre 5 : Segmentation connective (*J. Serra*)

Connexion ensembliste. Exemples : connexion lisse, connexion par sauts. Partition optimale et critères connectifs.

Théorème de la segmentation connective.

Treillis des critères connectifs, combinaisons par sup, inf, et produit de composition. Permanence des classes.

Comparaison des segmentations par zones plates, et par LPE.

Filtres connexes, hiérarchies d'opérateurs.

# Morphologie Mathématique : Chapitre 1

## *INTRODUCTION ET PREMIERS OPERATEURS*

I Introduction : *approche morphologique du TI*

II Opérateurs de base : *Dilatation et Erosion*

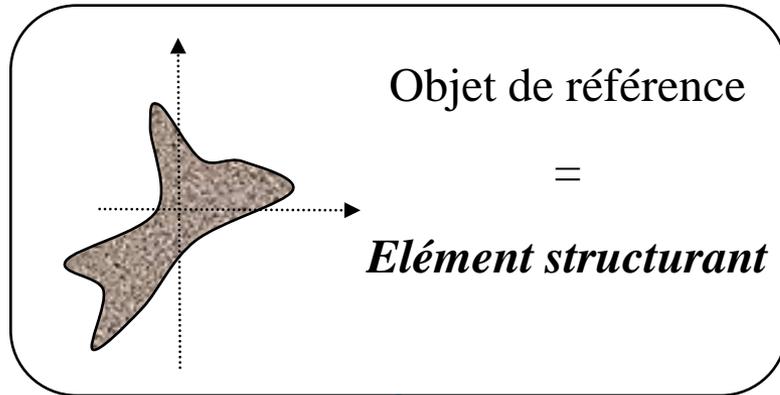
- (a) Opérations ensemblistes
- (b) Opérations fonctionnelles
- (c) Premiers opérateurs composés

III Filtres de base : *Ouverture et Fermeture*

- (a) Définition et propriétés
- (b) Seconds opérateurs composés

III Opérateurs géodésiques : *Reconstruction*

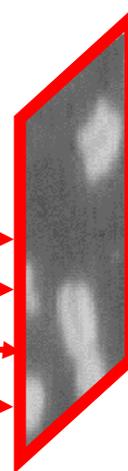
# L'approche morphologique du traitement d'images



Le principe de base de l'analyse morphologique est d'extraire de la connaissance de l'image à partir des réponses fournies à différents tests (transformations).

*Transformations  
non linéaires*

An orange arrow points from the top box to this box. Four red arrows point from the bottom of this box to the image in the next step.



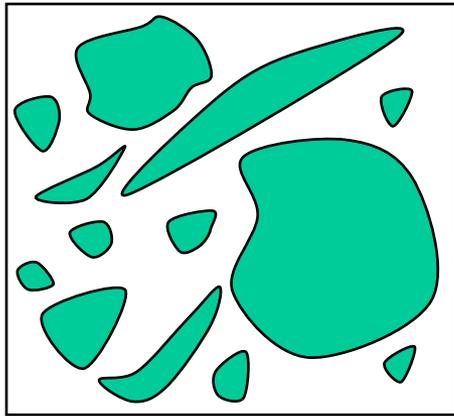
Critères de :

A green arrow points from this text to the list of criteria on the right.

- ✓ *taille*
- ✓ *forme*
- ✓ *orientation*
- ✓ *connexité*
- ✓ *.../...*

# L'approche morphologique du traitement d'images

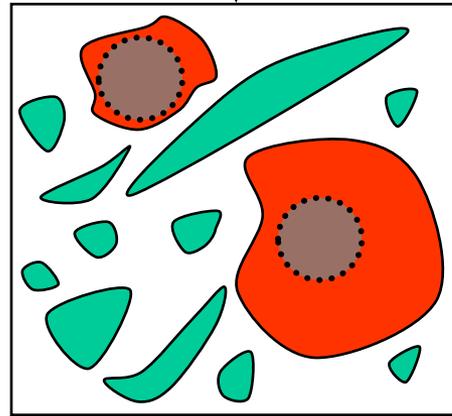
*Exemple :*



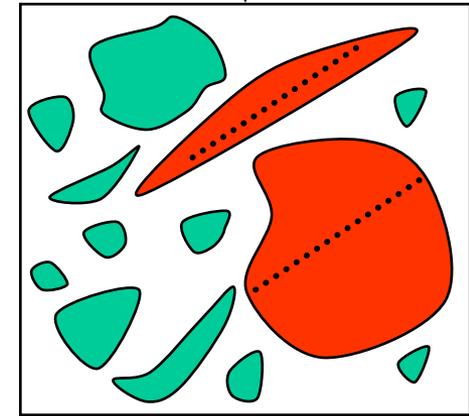
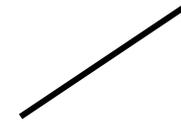
Elément  
structurant 1



Test : « contient »



Elément  
structurant 2



Taille, forme, orientation,...

Analyse quantitative, spatiale,...

# Morphologie mathématique : structure fondamentale

La structure fondamentale de la morphologie mathématique est celle de *treillis complet*.

structure  
de base

## TREILLIS COMPLET

(1) Ensemble ordonné  $(E, \leq)$

$$\leq \begin{cases} \text{REFLEXIVE} & x \leq x \\ \text{ANTI-SYMETRIQUE} & x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y \\ \text{TRANSITIVE} & x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

(2) Toute partie  $P$  de  $E$  admet :  $\begin{cases} \bullet \text{ une borne sup} \\ \bullet \text{ une borne inf} \end{cases}$

Sup : plus petit des majorants  $\vee P$

Inf : plus grand des minorants  $\wedge P$

# Morphologie mathématique : opérateurs de base

opérateurs  
de base

Ceux qui préservent la structure...

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$$

CROISSANCE

...et commutent avec les lois de base :

sup  $\rightarrow$   $\Phi(\vee \{x_i\}) = \vee \{\Phi(x_i)\}$

inf  $\rightarrow$   $\Psi(\wedge \{x_i\}) = \wedge \{\Psi(x_i)\}$

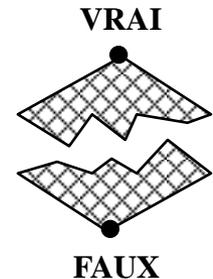
*DILATATION*

*EROSION*

# Exemples de treillis complets

## Treillis des formules booléennes

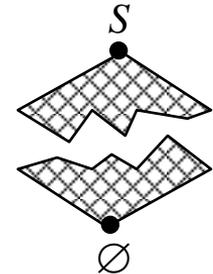
- *éléments* : formules booléennes  $f, g, h$
- *relation d'ordre* : implication  $f \rightarrow g$



- *sup* : OU logique
- *inf* : ET logique
- *éléments extrêmes* :

## Treillis ensembliste

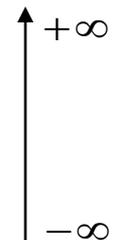
- *éléments* : les parties d'un ensemble  $S$
- *relation d'ordre* : inclusion  $\subset$



- *sup* : Union  $\cup$
- *inf* : Intersection  $\cap$
- *éléments extrêmes* :

## Treillis des nombres

- *éléments* : nombres réels (ou nombres entiers)
- *relation d'ordre* :  $\leq$  (ordre total)



- *sup* : max
- *inf* : min
- *éléments extrêmes* :

# Exemples de treillis complets

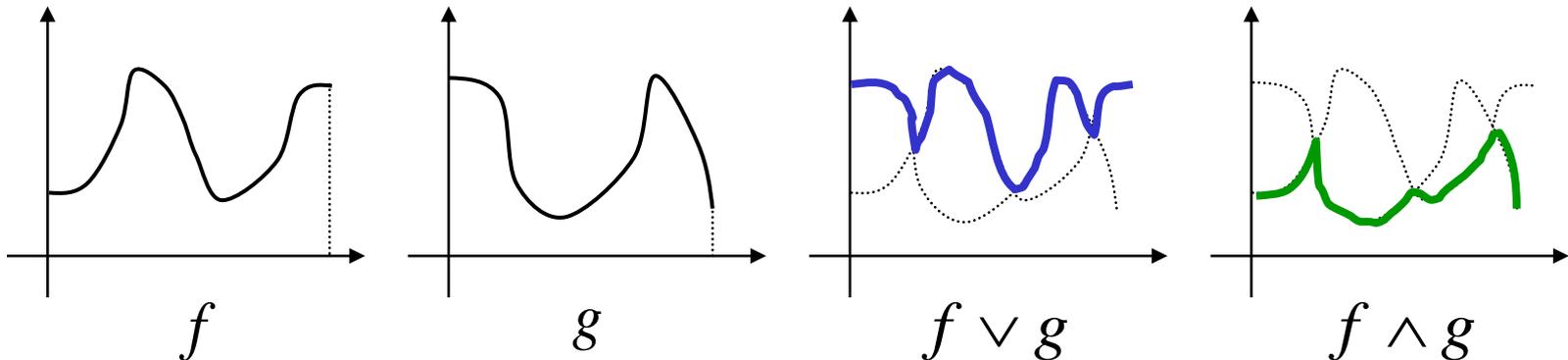
## Treillis des fonctions

• *éléments* : les fonctions réelles ou numériques :  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$   
ou  $S \rightarrow \mathbf{Z}$

• *relation d'ordre* :  $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in S, f(x) \leq g(x)$

• *sup* :  $\vee \{f_i\}$   
• *inf* :  $\wedge \{f_i\}$

définies par : 
$$\begin{cases} (\vee \{f_i\})(x) = \vee \{f_i(x)\} \\ (\wedge \{f_i\})(x) = \wedge \{f_i(x)\} \end{cases}$$



# Le principe de dualité

Dans un treillis, les lois *Sup* et *Inf* jouent des rôles symétriques.

On appelle *involution* l'opérateur  $\bar{\cdot} : E \rightarrow E$

qui permet d'échanger leur rôle :

$$\wedge \bar{P} = \overline{\vee P} \quad \text{et} \quad \vee \bar{P} = \overline{\wedge P}$$

On dit que deux opérateurs  $\Phi$  et  $\Phi^*$  sont *duaux* pour l'involution  $\bar{\cdot}$ .

si :

$$\boxed{\Phi(\bar{x}) = \overline{\Phi^*(x)}}$$

# Exemples d'involutions

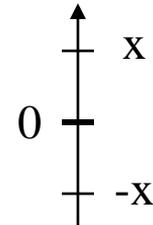
## Treillis des formules booléennes

*NON logique :*

<b>g</b>	<b><math>\neg g</math></b>
<b>0</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>0</b>

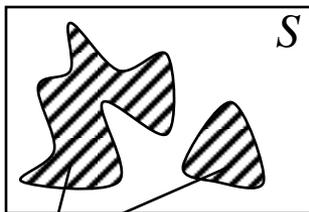
## Treillis des nombres

*opposé :*



## Treillis ensembliste

*Complémentaire :*

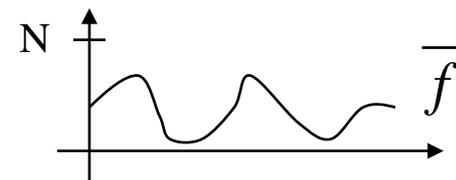
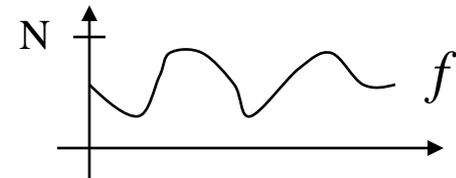


**X**

**$X^c = S \setminus X$**

## Treillis des fonctions dans $[0, N]$

*$\bar{f} = N - f$  :*



# Propriétés des opérateurs : quelques définitions

$$\Phi : E \rightarrow E$$

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y) \quad \textit{Croissance}$$

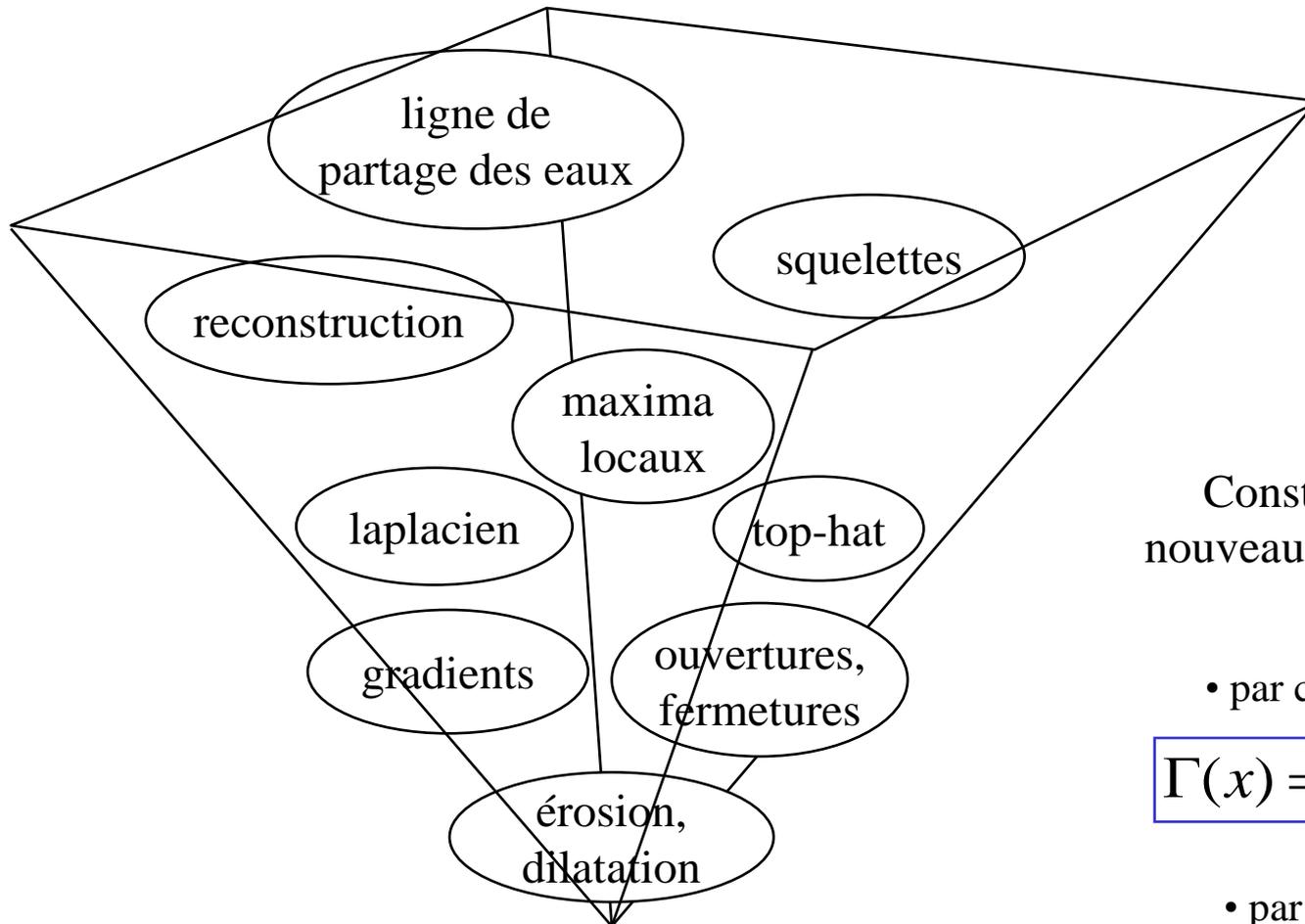
$$x \leq \Phi(x) \quad \textit{Extensivité}$$

$$\Phi(x) \leq x \quad \textit{Anti-extensivité}$$

$$\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x) \quad \textit{Idempotence}$$

# Construction des opérateurs de la morphologie mathématique

↑  
complexité,  
richesse des  
propriétés



Construction de nouveaux opérateurs :

- par composition

$$\Gamma(x) = \Phi(\Psi(x))$$

- par différence

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

# Opérations de Minkowski dans $\mathbf{R}^n$

## Définitions préliminaires

On se place ici dans  $E$  : l'ensemble des parties de  $\mathbf{R}^n$

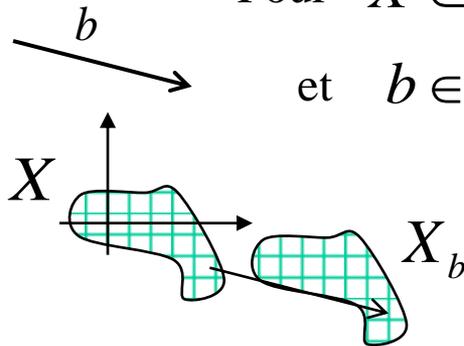
Pour  $X \subset \mathbf{R}^n$

et  $b \in \mathbf{R}^n$

on note

$$X_b = \{x + b; x \in X\}$$

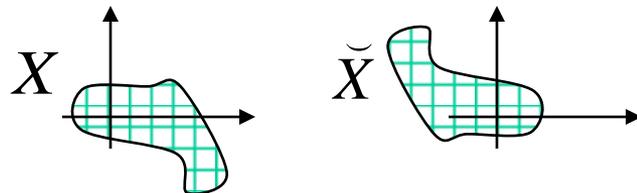
le *translaté* de  $X$  par  $b$ .



et on note

$$\check{X} = \{-x; x \in X\}$$

le *transposé* de  $X$ .

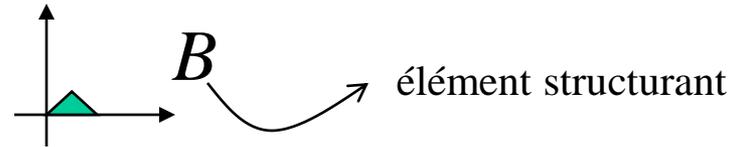


Rq: si  $X$  est symétrique alors  $X = \check{X}$

# L'addition de Minkowski

L'addition de Minkowski de  $X$  et  $B$  est définie par :

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$$



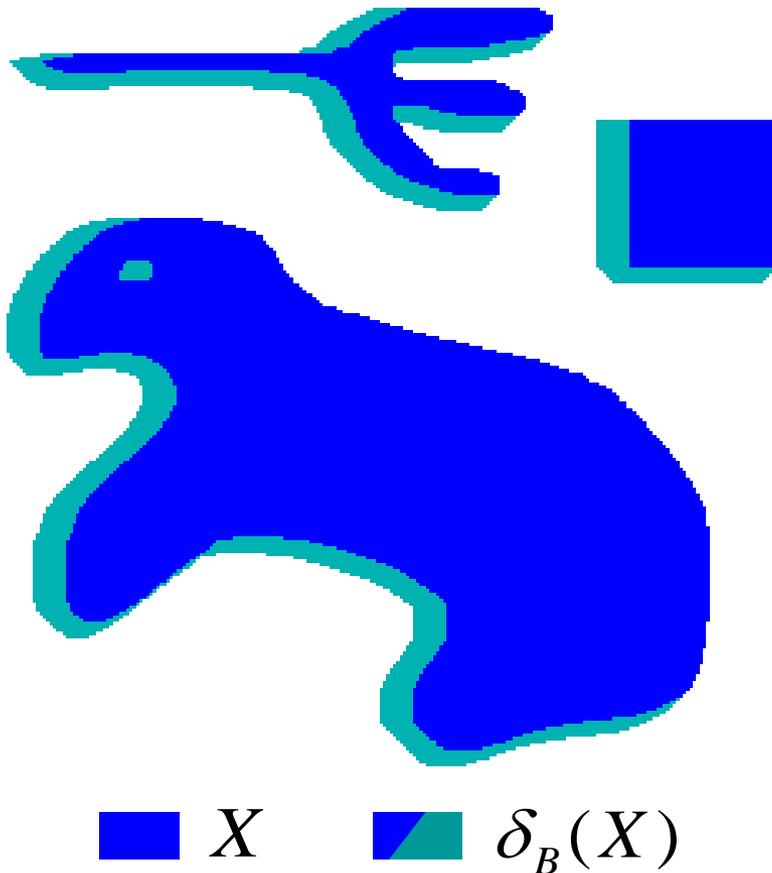
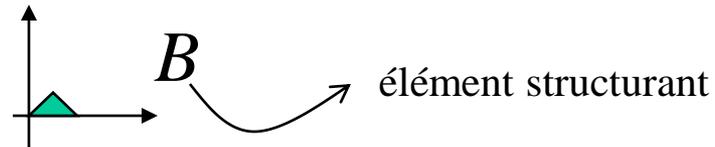
Rq :  $X \oplus B = B \oplus X$

C'est le lieu géométrique des points de  $B_x$  lorsque  $x$  parcourt  $X$



# La dilatation morphologique

La dilatation morphologique de  $X$  par  $B$  est définie par :  $\delta_B(X) = X \oplus \check{B}$



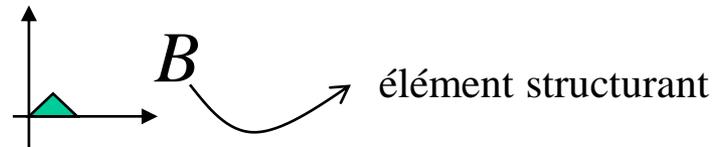
$$\begin{aligned} \delta_B(X) &= X \oplus \check{B} = \bigcup_{b \in \check{B}} X_b \\ &= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B; z = x - b\} \\ &= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B; z + b = x\} \\ &= \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

$$\delta_B(X) = \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

C'est le lieu géométrique  
des points  $z$  tels que  $B_z$   
intersecte  $X$

# L'érosion morphologique

L'érosion morphologique de  $X$  par  $B$  est définie par le principe de dualité :  $\varepsilon_B(\overline{X}) = \overline{\delta_B(X)}$



$$\varepsilon_B(X) = \overline{\delta_B(\overline{X})} = \overline{\overline{X} \oplus \check{B}}$$

$$= \overline{\bigcup_{b \in \check{B}} \overline{X}_b} = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b$$

$$= X \ominus \check{B}$$

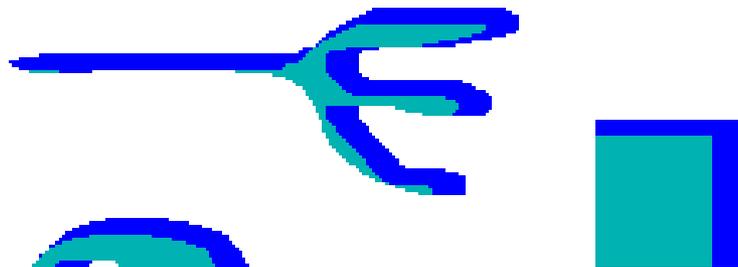
Soustraction de Minkowski

$$\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b = \{z / \forall b \in B, \exists x \in X; z + b = x\}$$

$$= \{z / B_z \subset X\}$$

$$\varepsilon_B(X) = \{z / B_z \subset X\}$$

C'est le lieu géométrique des points  $z$  tels que  $B_z$  est inclus dans  $X$



# Propriétés algébriques des opérateurs de base

## **CROISSANCE**

La dilatation et l'érosion sont des opérateurs *croissants*

$$X \subset Y \Rightarrow \delta_B(X) \subset \delta_B(Y)$$

$$X \subset Y \Rightarrow \varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y)$$



L'érosion est *décroissante* par rapport à l'élément structurant :  $B \subset B' \Rightarrow \varepsilon_B(X) \supset \varepsilon_{B'}(X)$

## **EXTENSIVITE**

Si l'élément structurant  $B$  contient l'origine :

• La dilatation est *extensive*

$$X \subset \delta_B(X)$$

• L'érosion est *anti-extensive*

$$\varepsilon_B(X) \subset X$$

• La dilatation commute avec le *Sup*

$$\delta_B(X \cup Y) = \delta_B(X) \cup \delta_B(Y)$$

• L'érosion commute avec le *Inf*

$$\varepsilon_B(X \cap Y) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_B(Y)$$

On a les égalités :

$$\delta_{B \cup B'}(X) = \delta_B(X) \cup \delta_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_{B \cup B'}(X) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_{B'}(X)$$



Mais  
seulement les  
inclusions :

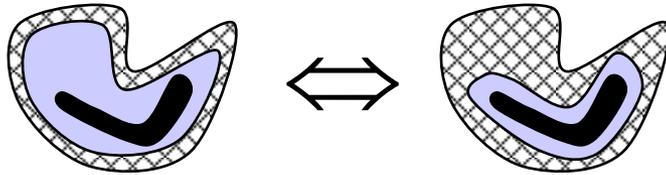
$$\delta_{B \cap B'}(X) \subset \delta_B(X) \cap \delta_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_{B \cap B'}(X) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_B(X \cup Y) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_B(Y)$$

# Propriétés algébriques des opérateurs de base

## PROPRIETE D'ADJONCTION



$$X \subset \varepsilon_B(Y) \Leftrightarrow \delta_{\bar{B}}(X) \subset Y$$

## CAS DEGENERES

élément structurant vide

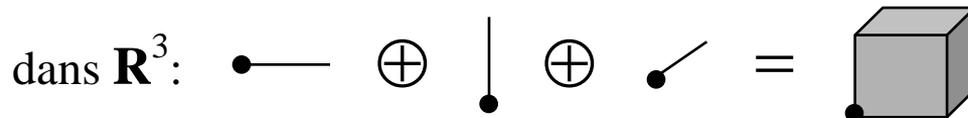
$$\varepsilon_{\emptyset}(X) = \mathbf{R}^n$$

$$\delta_{\emptyset}(X) = \emptyset$$

## ASSOCIATIVITE DE LA DILATATION

Application : Polyèdres de Steiner dans  $\mathbf{R}^n$ :

ex:



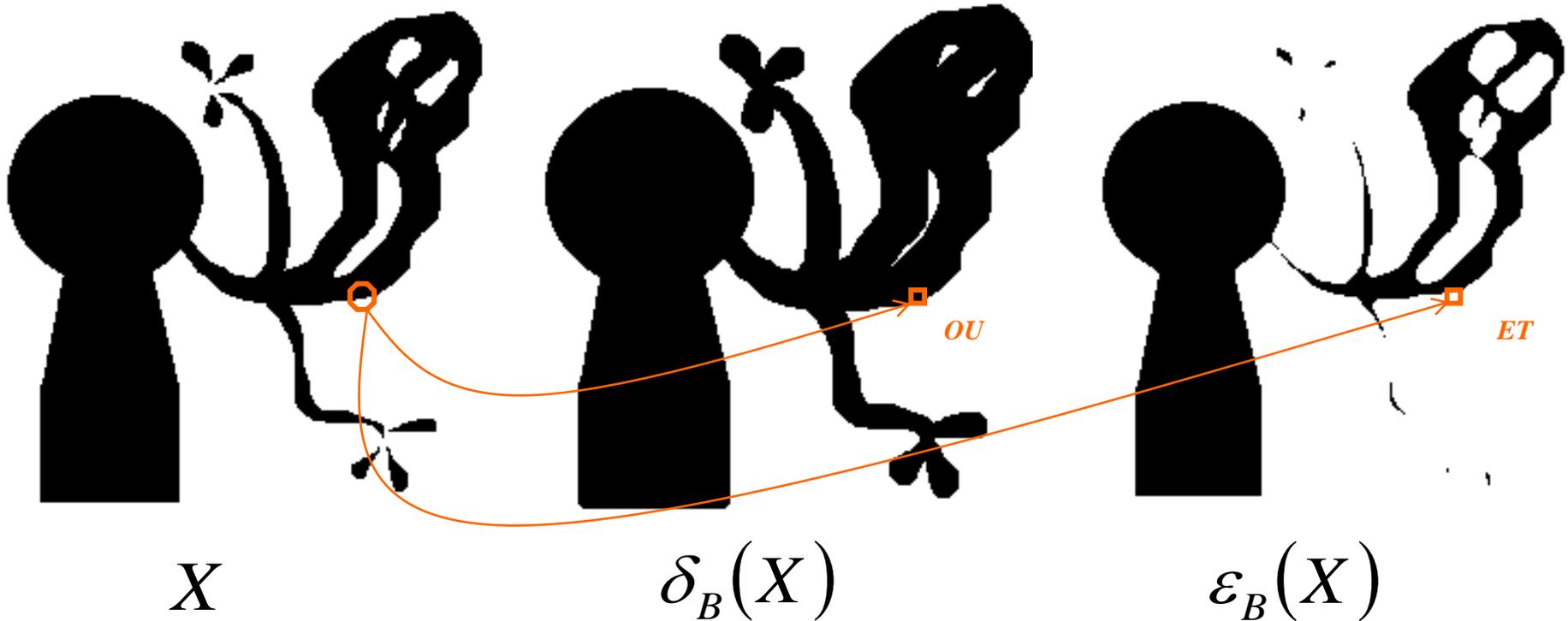
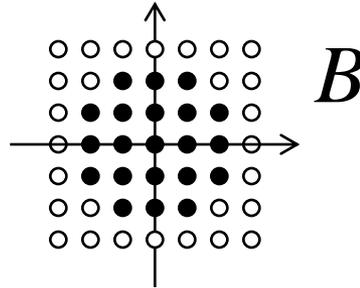
$$\delta_{B'}(\delta_B(X)) = \delta_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

$$\varepsilon_{B'}(\varepsilon_B(X)) = \varepsilon_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

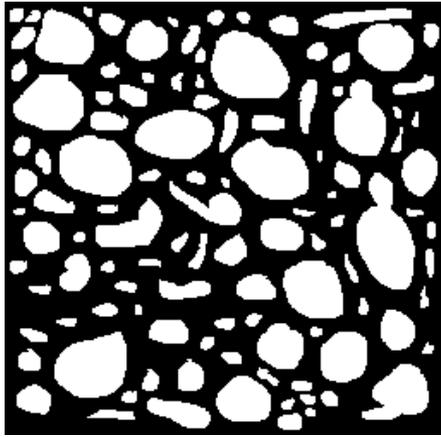
Décomposition des  
éléments structurants  
convexes en sommes  
de segments

# Application aux images binaires

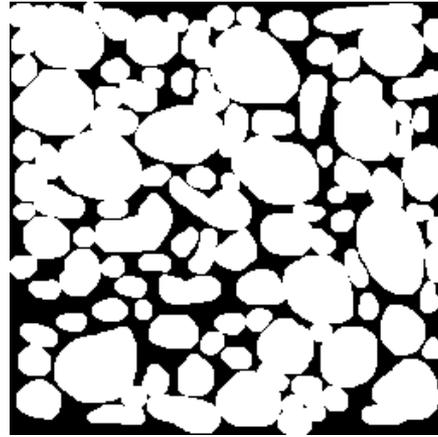
Le treillis est l'ensemble  
des parties de  $\mathbf{Z}^2$



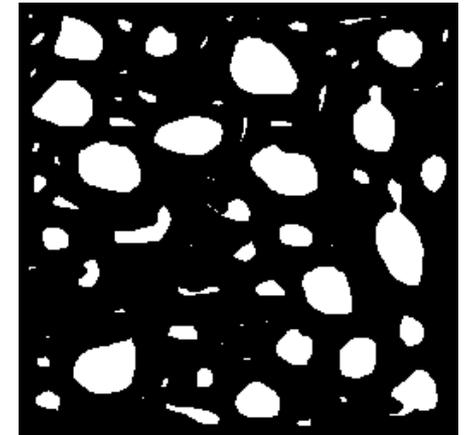
# Conclusions sur les opérateurs de base



Originale



Dilatée



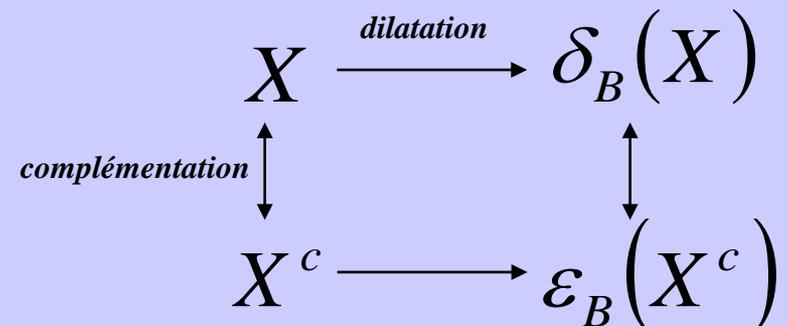
Erodée

- *La dilatation fait disparaître les petits trous et les petits détroits, et fait grossir les objets.*
- *L'érosion fait disparaître les petits objets et les petits isthmes, et amincit les objets restants.*



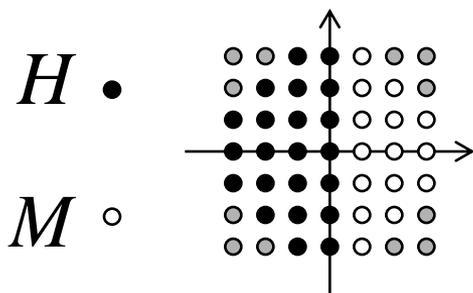
Dilatation et érosion sont des opérations *non réversibles*.

Dilatation et érosion sont des opérations *duales, pas inverses* !



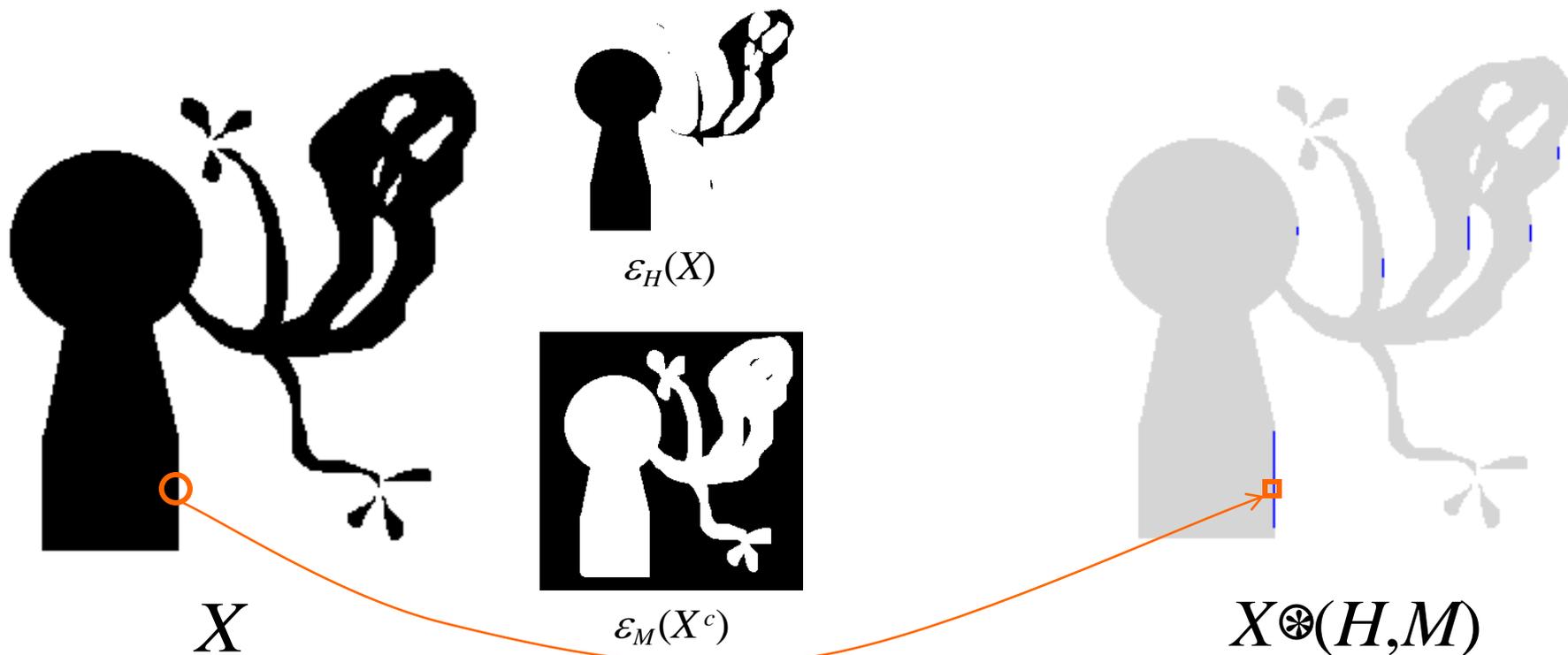
# Transformées en tout-ou-rien

Les transformées en tout-ou-rien (*Hit-or-Miss Transform*) unifient et généralisent érosions et dilatations.



$$X \circledast (H, M) = \varepsilon_H(X) \cap \varepsilon_M(X^c)$$

Application : Recherche de configurations



# Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

On se place à présent dans le cadre des fonctions :  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

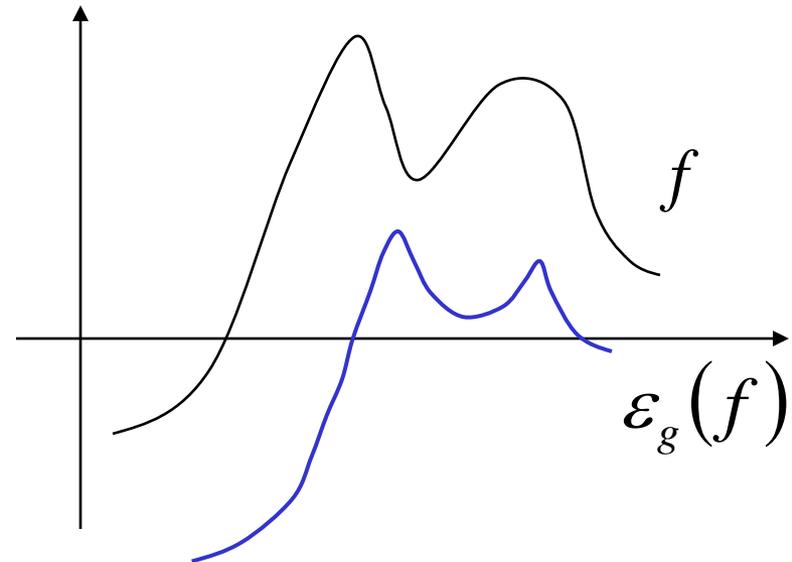
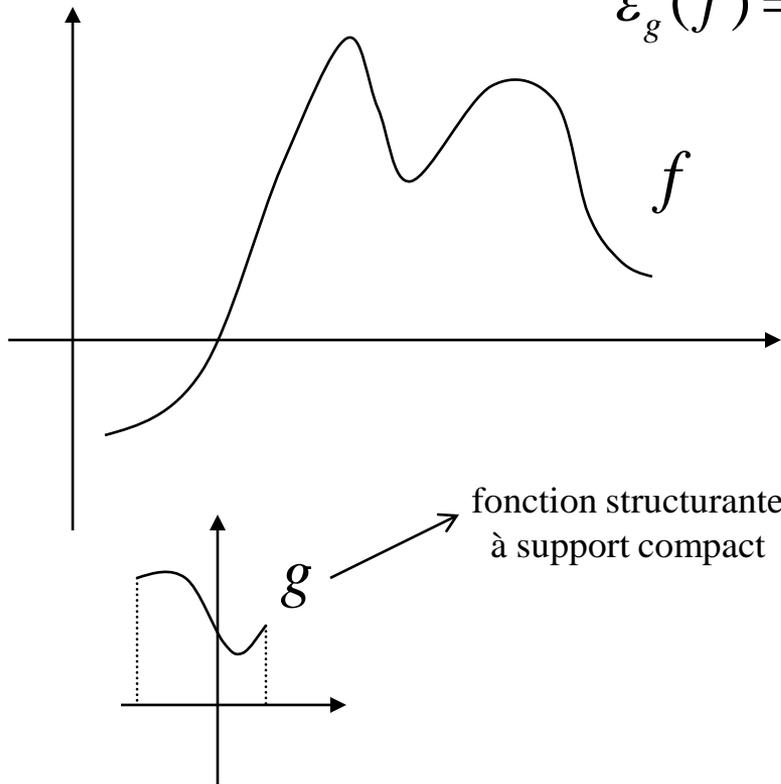
La dilatation et l'érosion fonctionnelles sont respectivement définies par :

$$\delta_g(f) = f \oplus \check{g}$$

$$\varepsilon_g(f) = f \ominus \check{g}$$

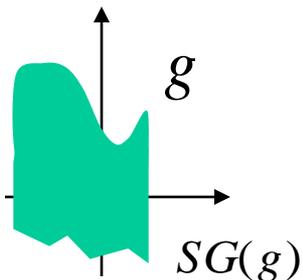
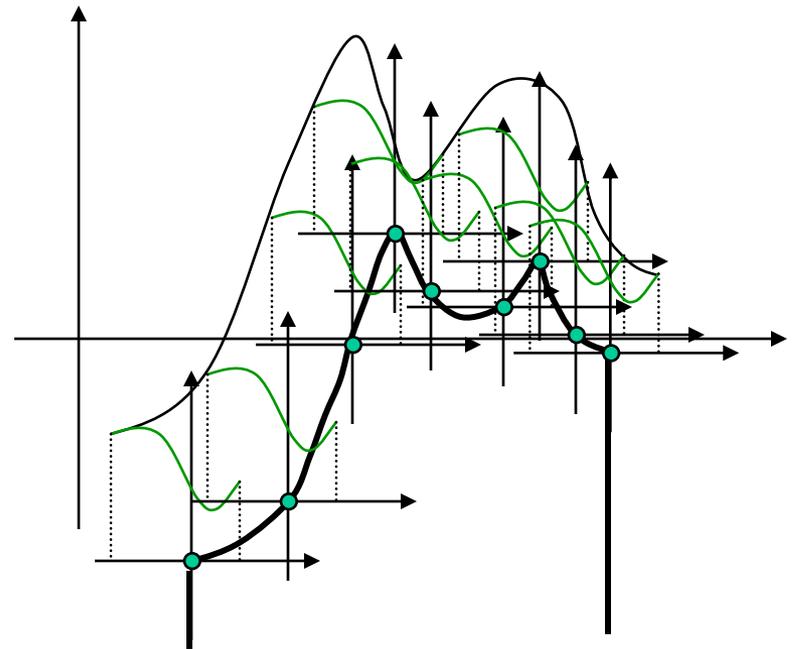
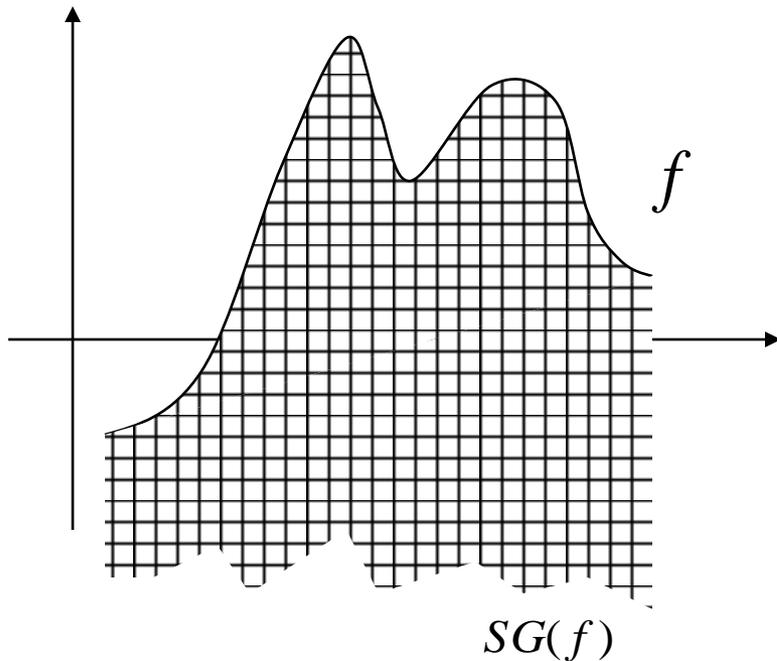
$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) + g(y - x)\}$$

$$\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) - g(y - x)\}$$



# Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

A toute fonction  $f$  on associe son *sous-graphe* :  $SG(f) = \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{R}} / t \leq f(x)\}$



# Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

*Interprétation ensembliste :*

$$SG(\varepsilon_g(f)) = \mathbf{\epsilon}_{SG(g)}(SG(f))$$

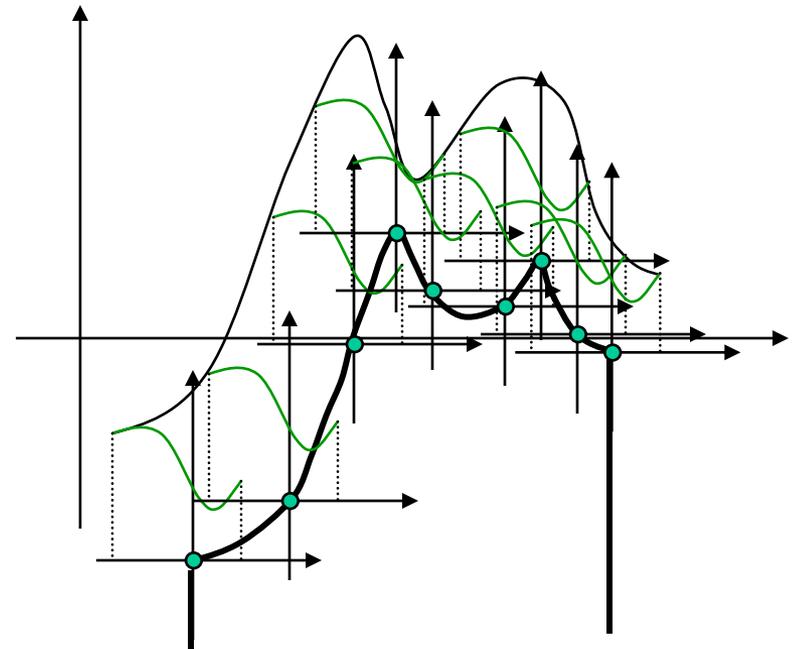
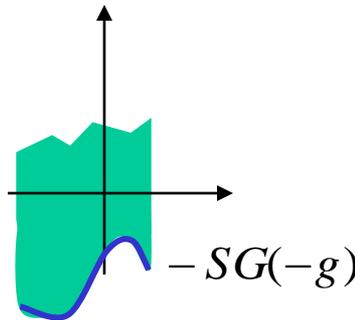
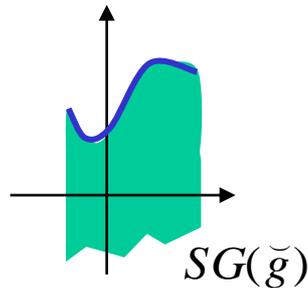
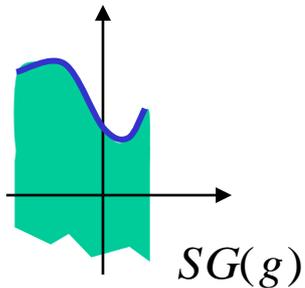
$$SG(\delta_g(f)) = \mathbf{\delta}_{-SG(-g)}(SG(f))$$

fonctionnel

ensembliste

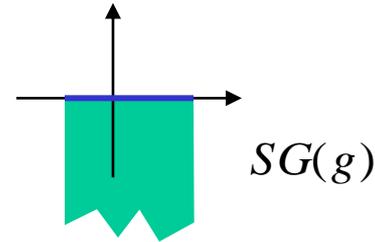


$$-g \neq \check{g}$$



# Cas des éléments structurants plans

Élément structurant plan =  
fonction structurante nulle sur un  
support compact K

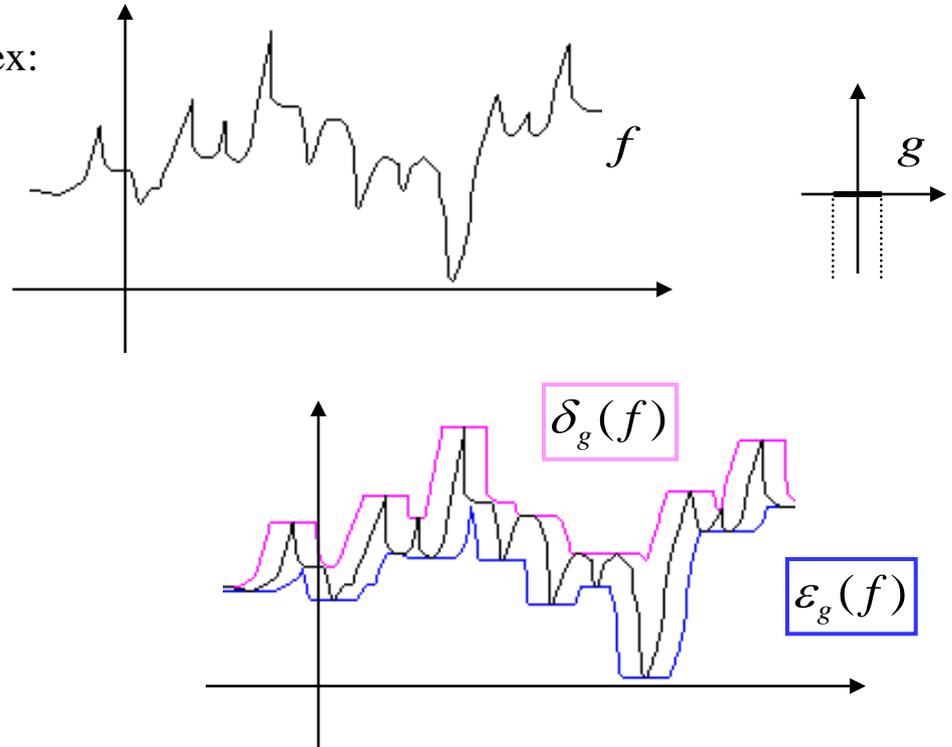


L'expression algébrique des  
opérateurs de base devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_g(f)(x) &= \inf_{\substack{y \in \mathbf{R}^n \\ y-x \in K}} \{f(y)\} \\ &= \inf_{y \in K_x} \{f(y)\} \end{aligned}$$

$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in K_x} \{f(y)\}$$

ex:



# Propriétés des opérateurs de base dans le cadre fonctionnel

Identiques au cas ensembliste, en remplaçant :

$$\subset \rightarrow \leq$$

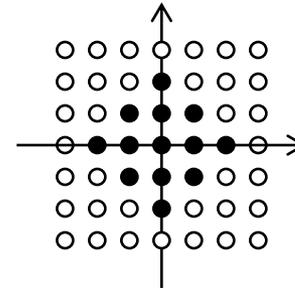
$$\cup \rightarrow \vee$$

$$\cap \rightarrow \wedge$$

$f \leq f' \Rightarrow \delta_g(f) \leq \delta_g(f')$ $f \leq f' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \leq \varepsilon_g(f')$ $g \leq g' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \geq \varepsilon_{g'}(f)$	<p>Si <math>O \in \text{Supp}(g)</math>:</p> $f \leq \delta_g(f)$ $\varepsilon_g(f) \leq f$	$\delta_g(f \vee f') = \delta_g(f) \vee \delta_g(f')$ $\varepsilon_g(f \wedge f') = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_g(f')$
$\delta_{g \vee g'}(f) = \delta_g(f) \vee \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \vee g'}(f) = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_{g'}(f)$		$\delta_{g \wedge g'}(f) \leq \delta_g(f) \wedge \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \wedge g'}(f) \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_{g'}(f)$ $\varepsilon_g(f \vee f') \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_g(f')$
$f \leq \varepsilon_g(f') \Leftrightarrow \delta_g(f) \leq f'$		$\delta_{g'}(\delta_g(f)) = \delta_{\delta_{g'}(g)}(f)$ $\varepsilon_{g'}(\varepsilon_g(f)) = \varepsilon_{\delta_{g'}(g)}(f)$

# Application aux images numériques

Le treillis est l'ensemble  
des fonctions de  $\mathbf{Z}^2$  dans  
 $\mathbf{Z}$

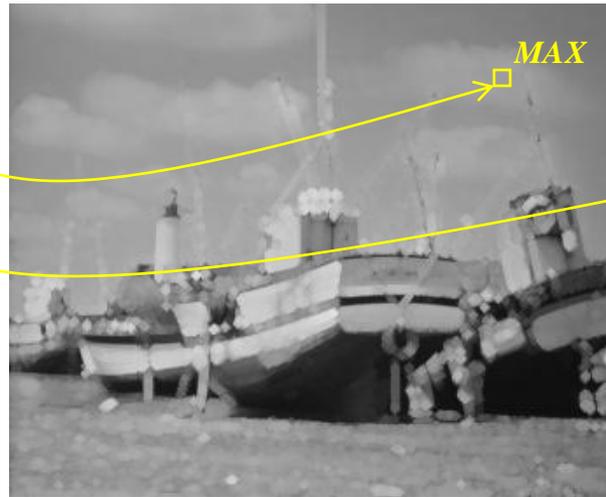


$B$

élément  
structurant plan  
 $\cong$   
ensemble



$X$



$\delta_B(X)$



$\varepsilon_B(X)$

# Premiers opérateurs par différence

*Opérateur par différence :*

Cas ensembliste

$$\Lambda(X) = \Phi(X) \setminus \Psi(X)$$

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

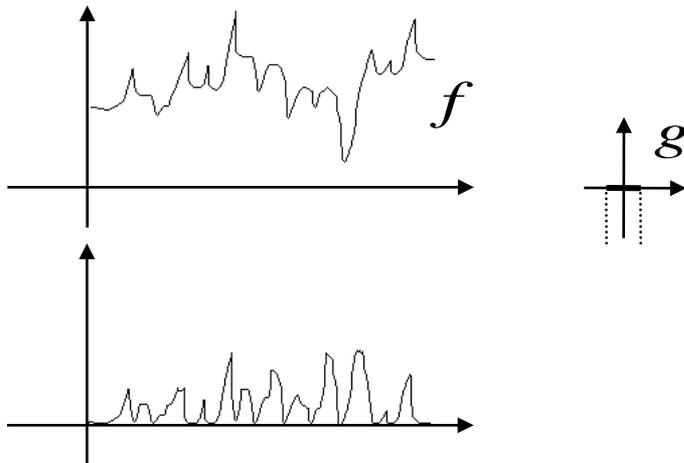
Cas fonctionnel

$$\Lambda(f) = \Phi(f) - \Psi(f)$$

**Gradient intérieur**

$$g_y^-(x)$$

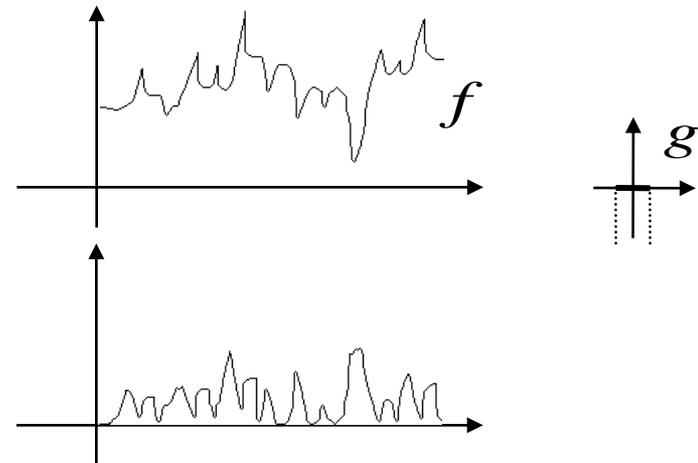
$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



**Gradient extérieur**

$$g_y^+(x)$$

$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = x$$

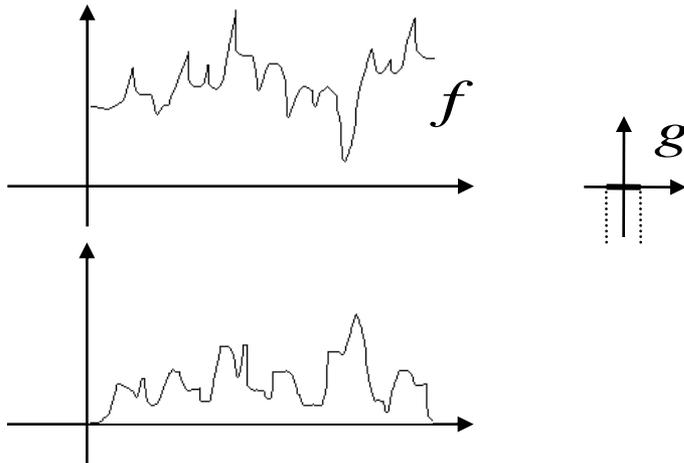


# Premiers opérateurs par différence

## Gradient morphologique (symétrisée)

$$g_y^m(x)$$

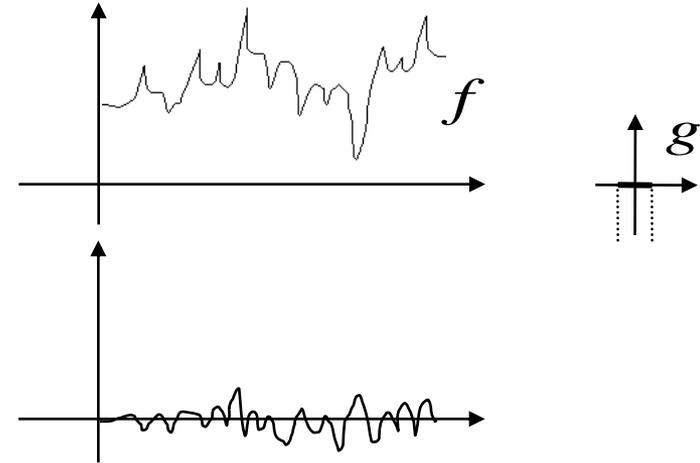
$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



## Laplacien morphologique

$$\lambda_y(x)$$

$$\Phi(x) = g_y^+(x) \quad \Psi(x) = g_y^-(x)$$

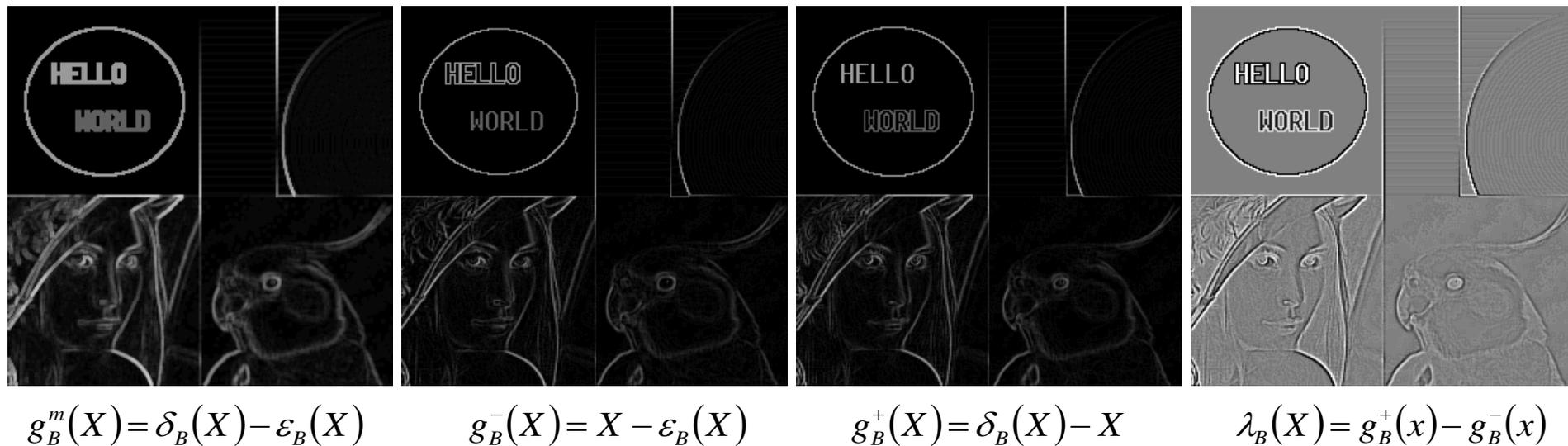
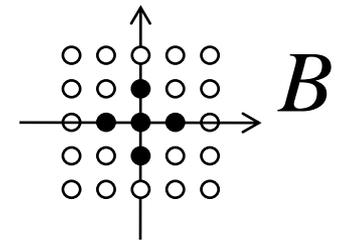
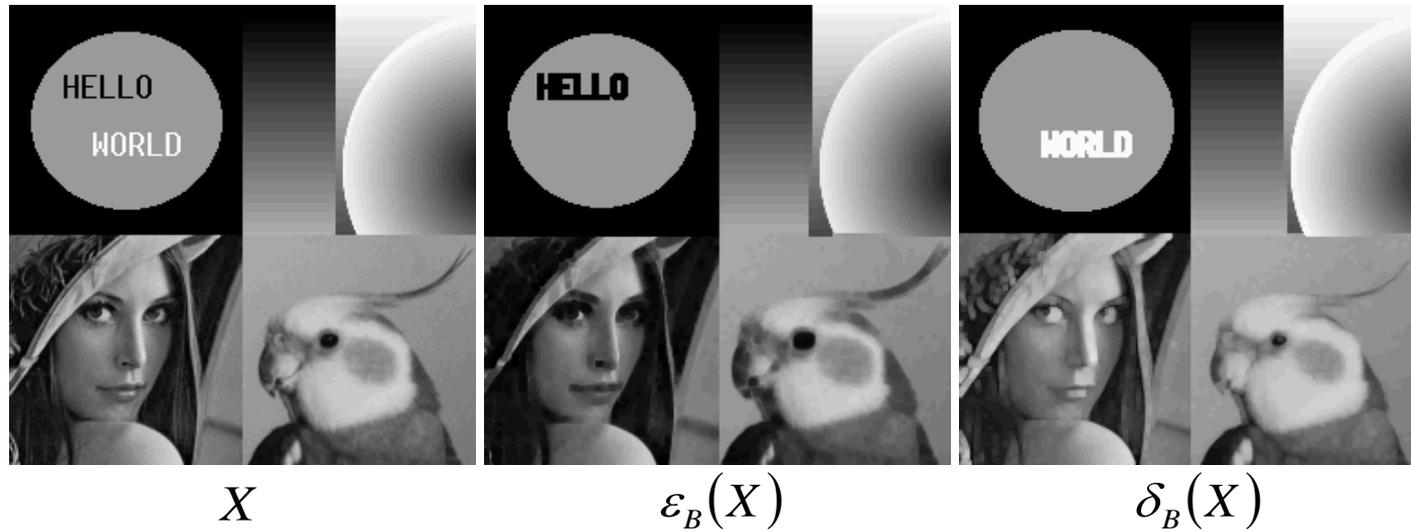


Rq : dans le cas de fonctions de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$ , en prenant pour élément structurant une boule euclidienne centrée sur l'origine, le gradient morphologique et le laplacien morphologique tendent respectivement vers le module du gradient et le laplacien euclidiens lorsqu'ils sont définis, quand le rayon de la boule tend vers zéro :

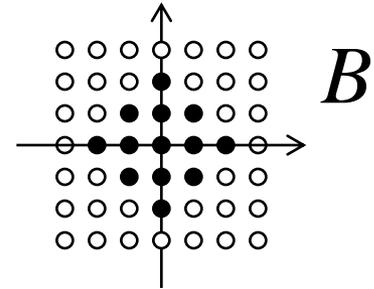
$$\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}(u, v)\right)^2}$$

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(u, v) + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(u, v)$$

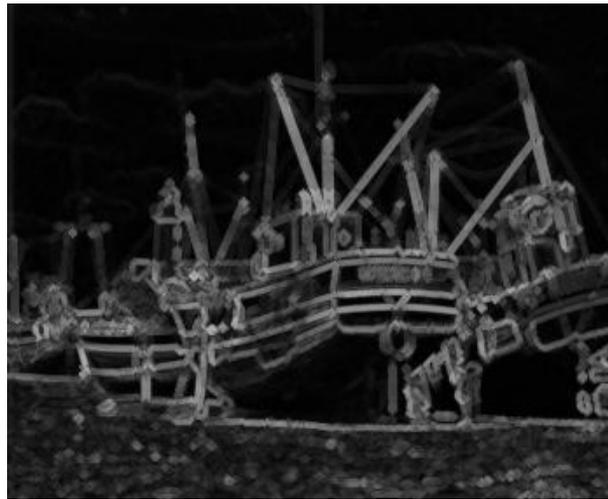
# Gradients et laplacien : images numériques



# Gradients et laplacien : images numériques



$X$



$g_B^m(X)$

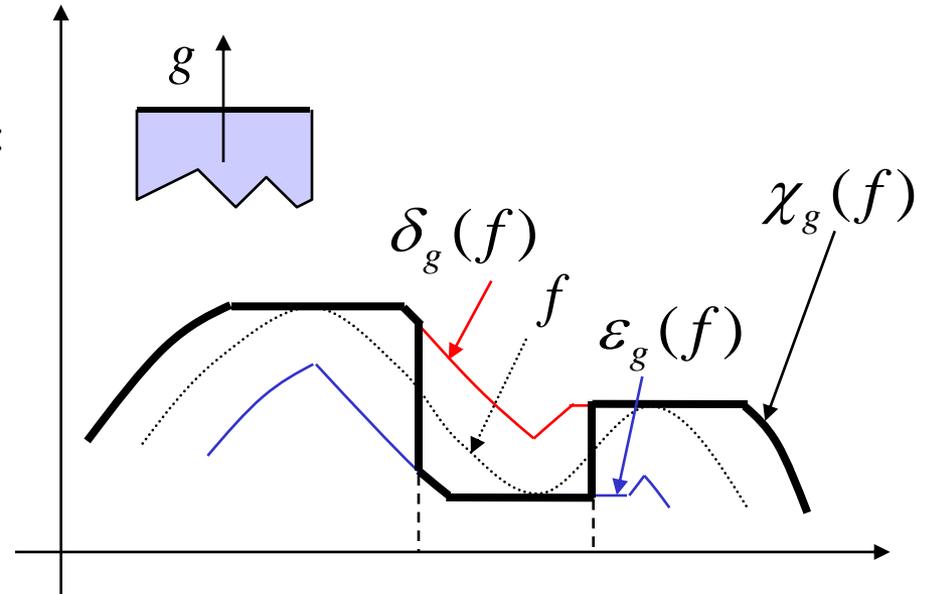


$\lambda_B(X)$

# Augmentation de contraste morphologique

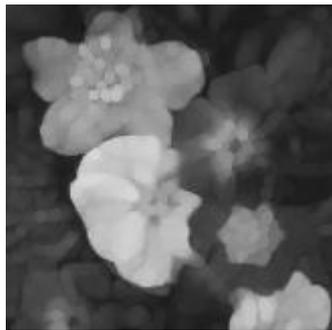
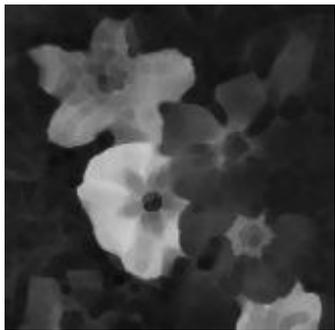
Le filtre rehausseur de contraste est défini par :

$$\begin{cases} \chi_g(f) = \delta_g(f) \text{ si } (\delta_g(f) - f) < (f - \varepsilon_g(f)) \\ \chi_g(f) = \varepsilon_g(f) \text{ si } (\delta_g(f) - f) > (f - \varepsilon_g(f)) \end{cases}$$



*erodé*

*dilaté*



$\varepsilon_g(f)$

$\delta_g(f)$

*image originale*

*image rehaussée*

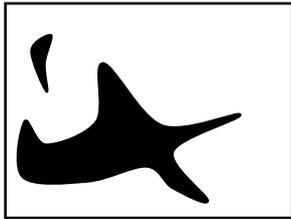


$f$

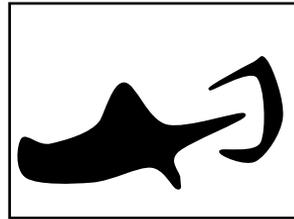
$\chi_g(f)$

# Ouvertures et fermetures morphologiques

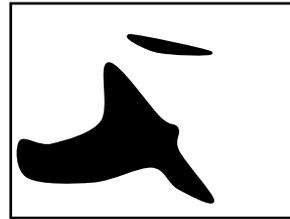
Problème Min/Max : étant donné  $Y \in E$ ,  $B \in E$ ,  
trouver le plus petit  $X \in E$  tel que :  $Y = \varepsilon_B(X)$



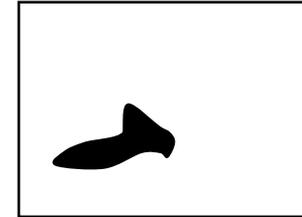
$X_1$



$X_2$



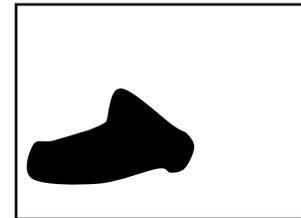
$X_3$



$$\begin{aligned} Y &= \varepsilon_B(X_1) \\ &= \varepsilon_B(X_2) \\ &= \varepsilon_B(X_3) \end{aligned}$$

**REPONSE :** C'est le dilaté de  $Y$  par le transposé de  $B$ :

$$\delta_{\check{B}}(Y) = Y \oplus B$$



On note :  $\gamma_B(X) = X \circ B = \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \check{B}) \oplus B$

l'ouverture morphologique de  $X$  par  $B$ .

et son dual :  $\varphi_B(X) = X \bullet B = \varepsilon_{\check{B}}(\delta_B(X)) = (X \oplus \check{B}) \ominus B$

la fermeture morphologique de  $X$  par  $B$ .

# Propriétés algébriques des ouvertures et fermetures

## CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

## IDEMPOTENCE

$$\gamma_B(\gamma_B(x)) = \gamma_B(x)$$

$$\varphi_B(\varphi_B(x)) = \varphi_B(x)$$

dém:  $\delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x)) \leq x \leq \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(x))$

donc  $\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B \leq id_E \leq \varepsilon_{\bar{B}}\delta_B$

↓

$\varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B \leq \varepsilon_B$

et  $\delta_B\varepsilon_{\bar{B}} \leq id_E \leq \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}$

↓

$\varepsilon_B \leq \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B$

donc  $\varepsilon_B = \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B$

et donc  $\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B = \delta_{\bar{B}}\varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B$

## EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive :  $\gamma_B(x) \leq x$

La fermeture est extensive :  $x \leq \varphi_B(x)$

dém: Dans la propriété d'adjonction :  
 $x \leq \varepsilon_B(y) \Leftrightarrow \delta_{\bar{B}}(x) \leq y$   
 $x = \varepsilon_B(y)$  donne  $\delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(y)) \leq y$   
 et  $y = \delta_B(x)$  donne  $x \leq \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(x))$

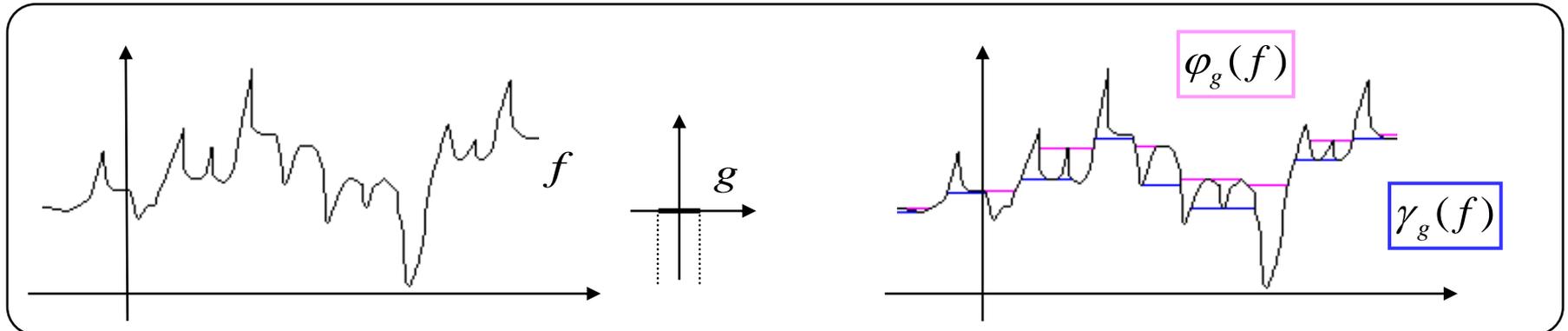
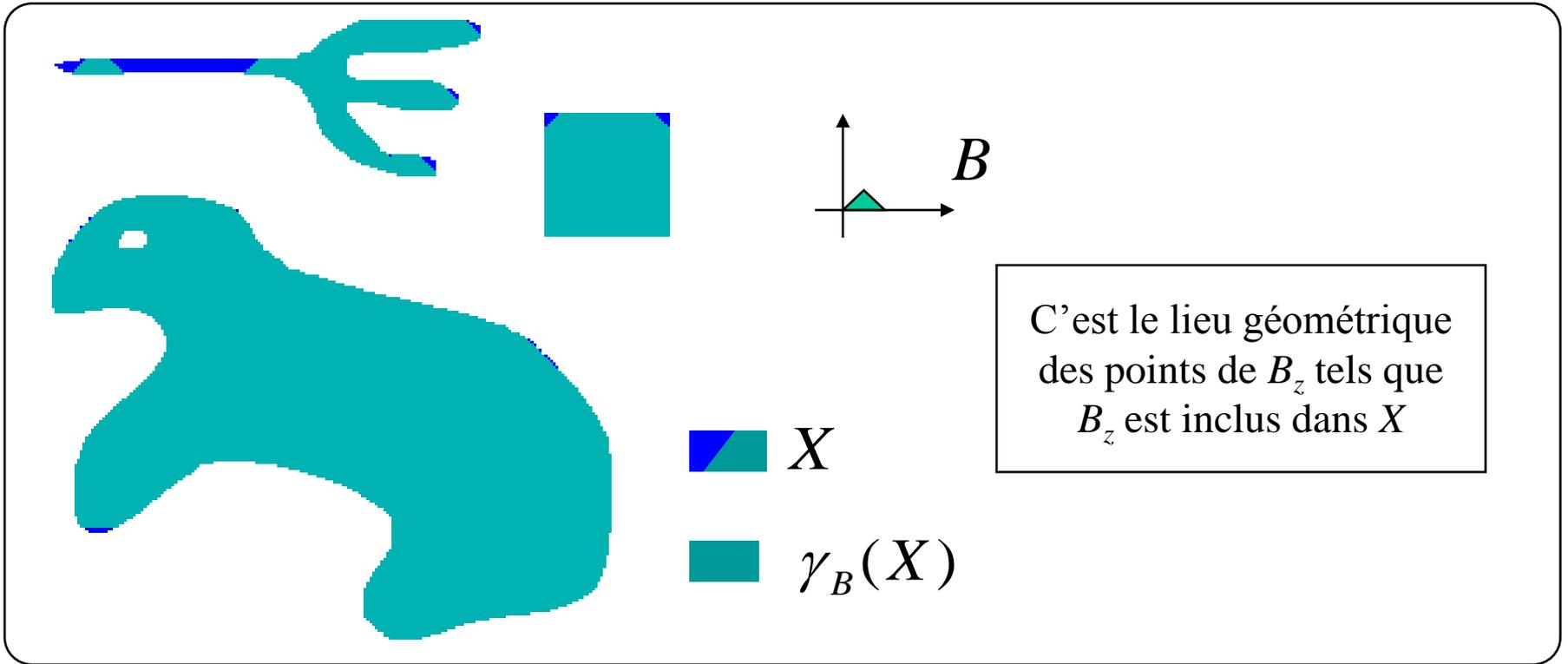
## PROPRIETE MIN/MAX

Soient  $x, x'$ , et  $y$  tels que :

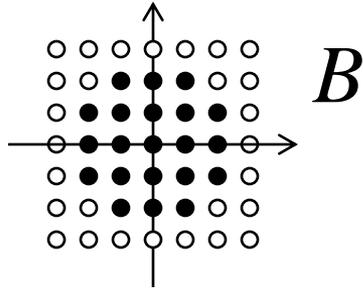
$$\begin{cases} y = \varepsilon_B(x) = \varepsilon_B(x') \\ \text{et} \\ x = \delta_{\bar{B}}(y) \end{cases}$$

alors  $x = \delta_{\bar{B}}(y) = \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x))$   
 $= \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x')) = \gamma_B(x') \leq x'$

# Ouvertures et fermetures : ensembles et fonctions



# Ouvertures et fermetures : images binaires



- l'ouverture élimine les petites composantes, et ouvre les petits isthmes.
- la fermeture bouche les petites trous, et ferme les petits détroits.



$X$

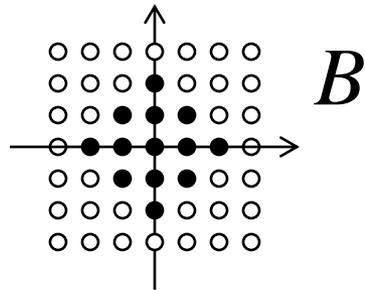


$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

# Ouvertures et fermetures : images numériques



$\varepsilon_B(X)$



$\delta_B(X)$



$X$



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

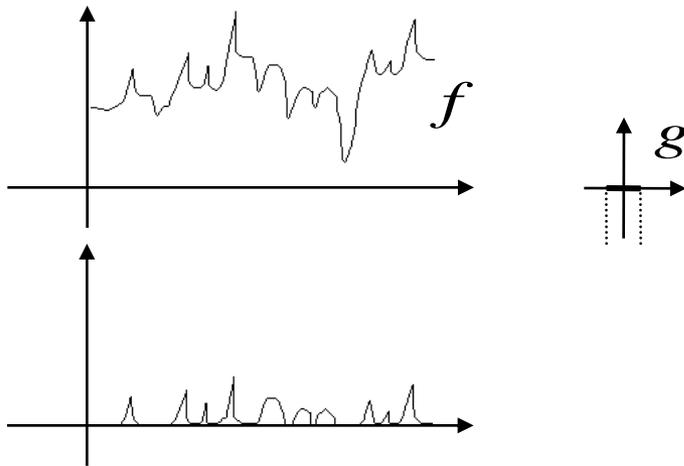
# Opérateurs obtenus par différence d'ouvertures et fermetures

*Opérateur par différence :*

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

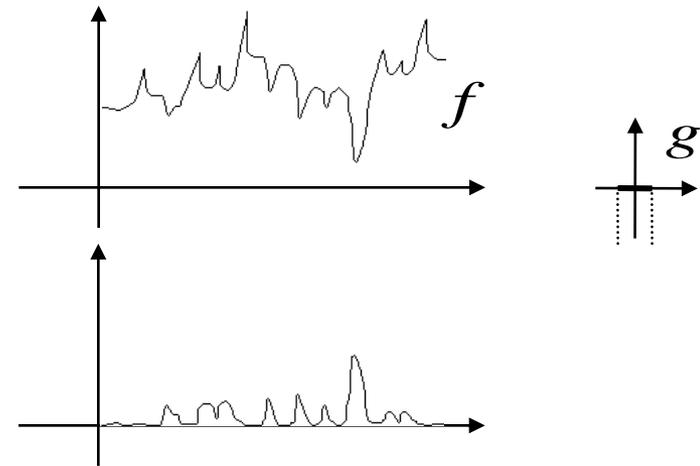
**Top-hat**

$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \gamma_y(x)$$

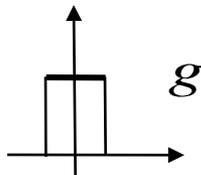


**Top-hat conjugué**

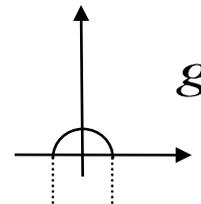
$$\Phi(x) = \varphi_y(x) \quad \Psi(x) = x$$



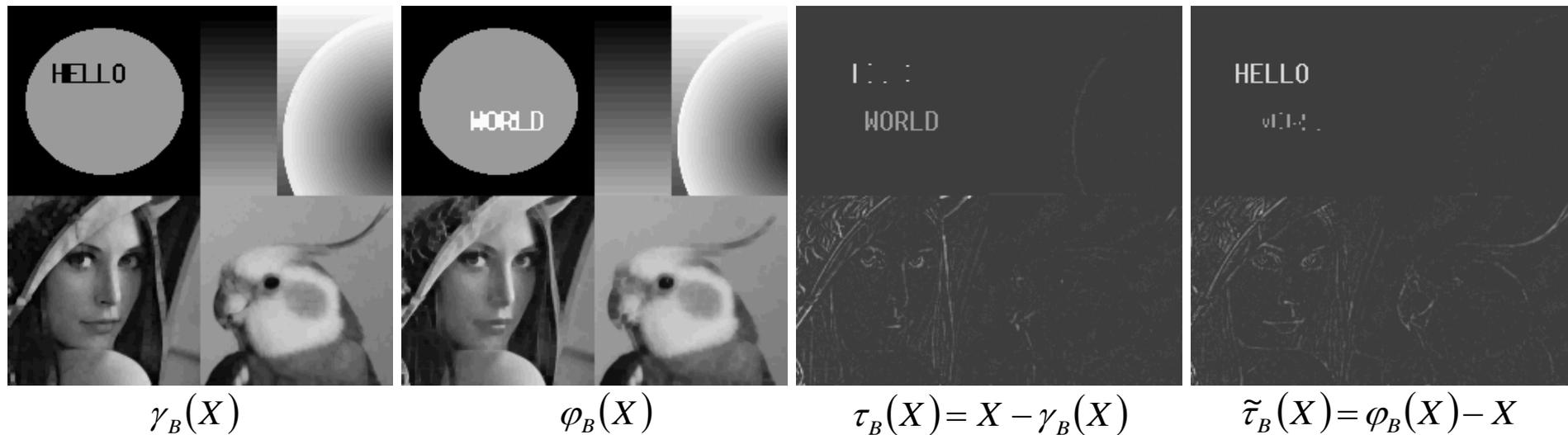
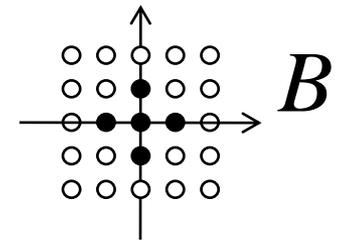
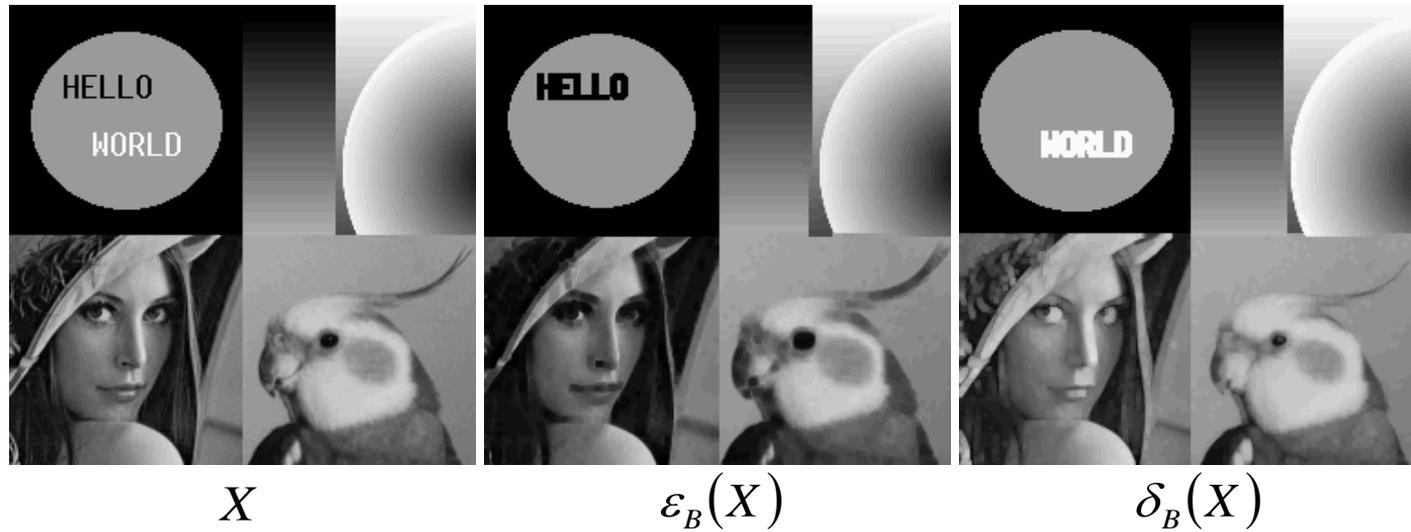
Top-hat



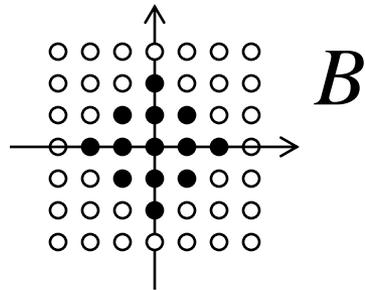
Rolling ball



# Top Hat : images numériques



# Top Hat : images numériques



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$



$X$



$\tau_B(X)$



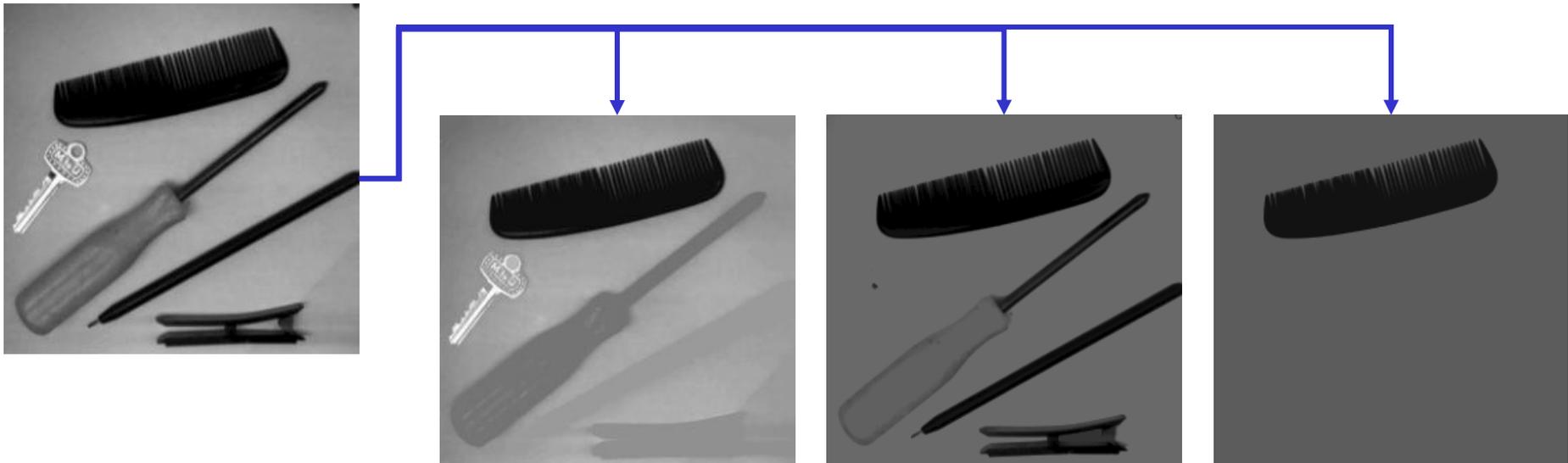
$\tilde{\tau}_B(X)$

# Introduction aux opérations géodésiques

Objectif sous-jacent : l'analyse individuelle des « objets » d'une image.

En l'absence de données de plus haut niveau sémantique, l'objet dans une image est associé à une particule, correspondant en général à une composante connexe.

L'analyse individuelle des objets nécessite donc l'utilisation d'opérateurs (filtres) connexes, c'est-à-dire qui préserve les objets (une composante connexe est soit préservée, soit intégralement éliminée).



# Opérations géodésiques

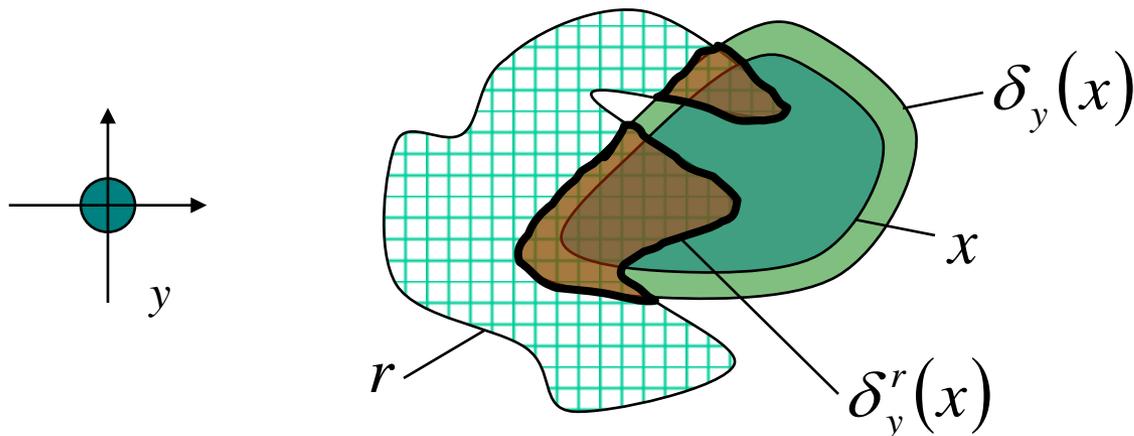
Les opérations géodésiques sont celles qui sont conditionnées par un élément de référence  $r$  du treillis. Elles sont définies à partir des opérations géodésiques de base :

la *dilatation géodésique* et la *reconstruction géodésique*.

Dans les opérations géodésiques, l'élément structurant représente le "voisinage élémentaire" de l'origine ; et définit donc la topologie sous-jacente.

La dilatation géodésique dans  $r$  :

$$\delta_y^r(x) = \delta_y(x) \wedge r$$



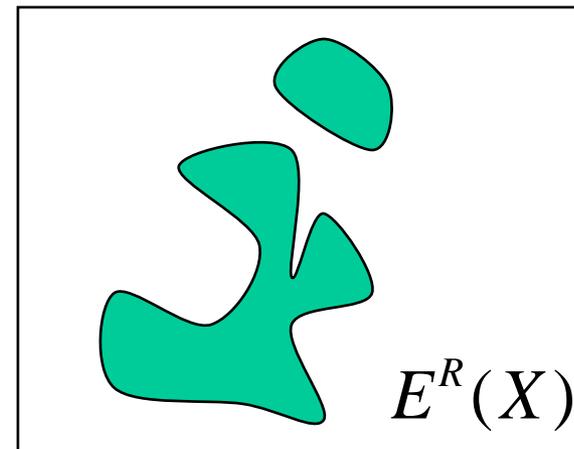
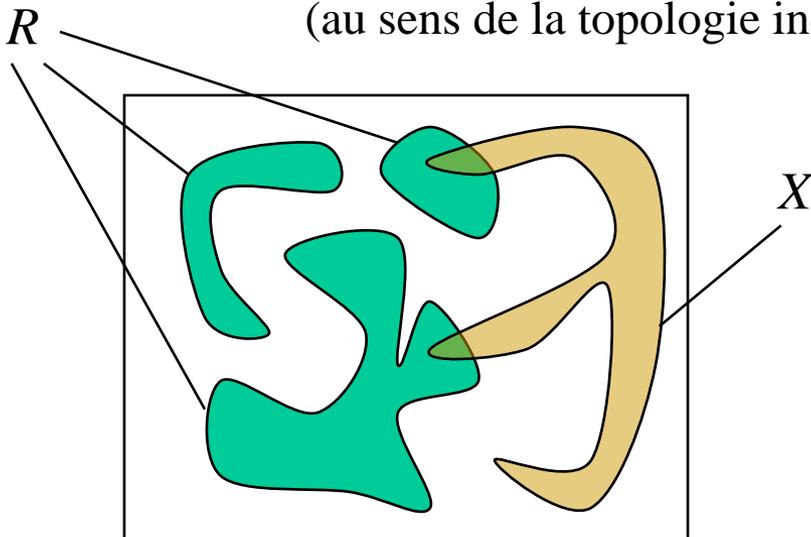
# La reconstruction géodésique

posons 
$$\begin{cases} (\delta_{B_1}^R)^0(X) = X \\ (\delta_{B_1}^R)^n(X) = \delta_{B_1}^R((\delta_{B_1}^R)^{n-1}(X)) \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$

La reconstruction géodésique de  $X$  dans  $R$  est définie par :

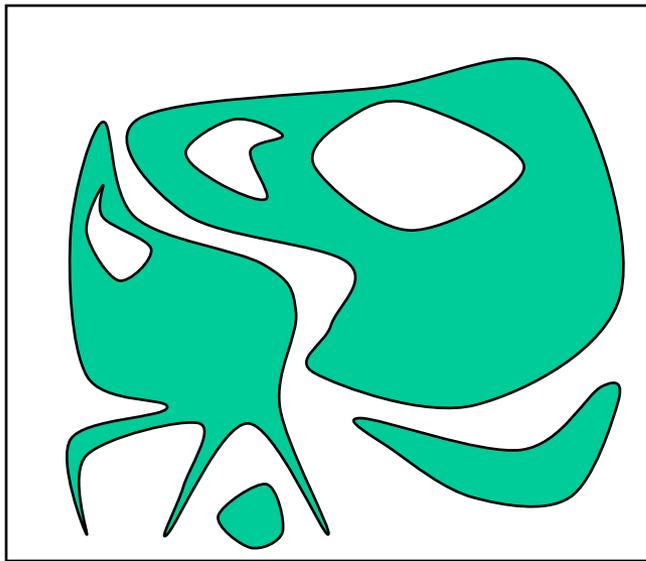
$$E_{B_1}^R(X) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_{B_1}^R)^n(X) \}$$

Dans le cadre ensembliste, c'est l'ensemble des composantes connexes (au sens de la topologie induite par  $B_1$ ) de  $R$  qui intersectent  $X$  :

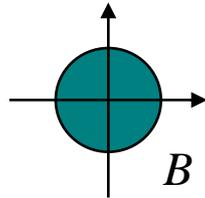


# Ouvertures et fermetures par reconstruction

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :

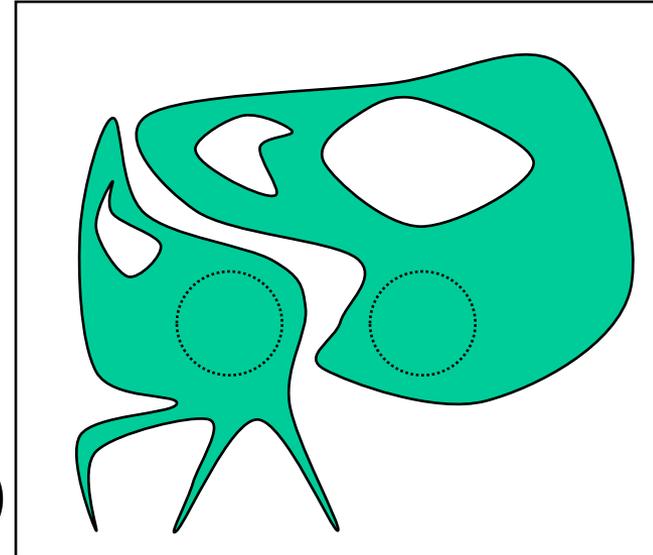


$X$



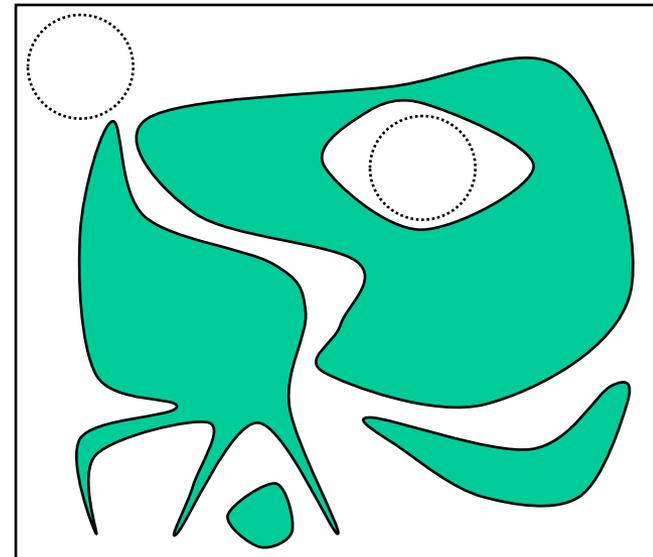
ouverture par reconstruction

$$E^X(\gamma_B(X))$$



fermeture par reconstruction

$$\left( E^{X^c} \left( \left( \varphi_B(X) \right)^c \right) \right)^c$$

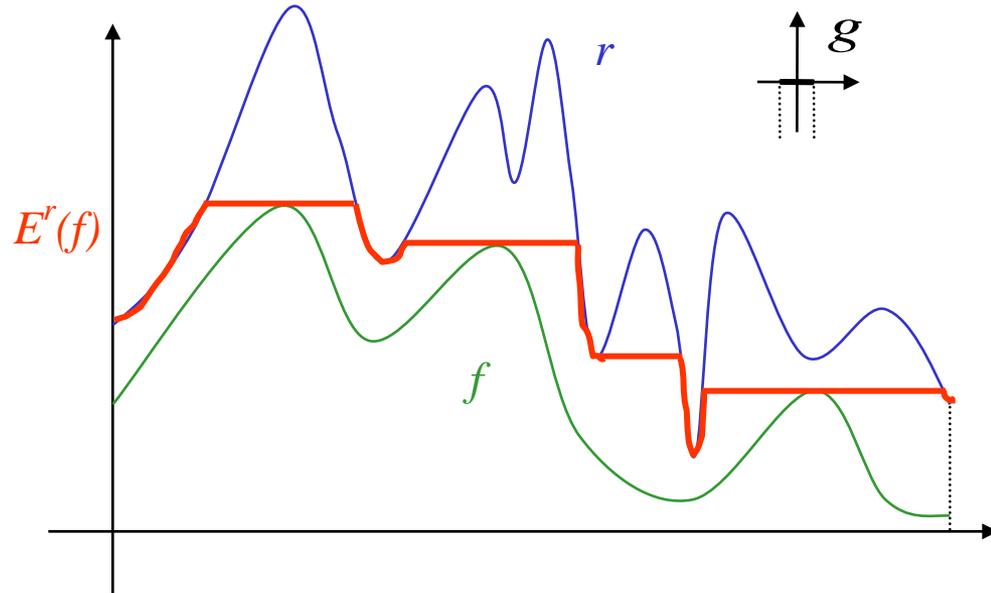


La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

# Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de  $f$  dans  $r$  :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



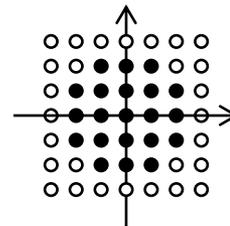
La reconstruction géodésique de  $f$  dans  $r$  :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_g^r)^n(f) \}$$

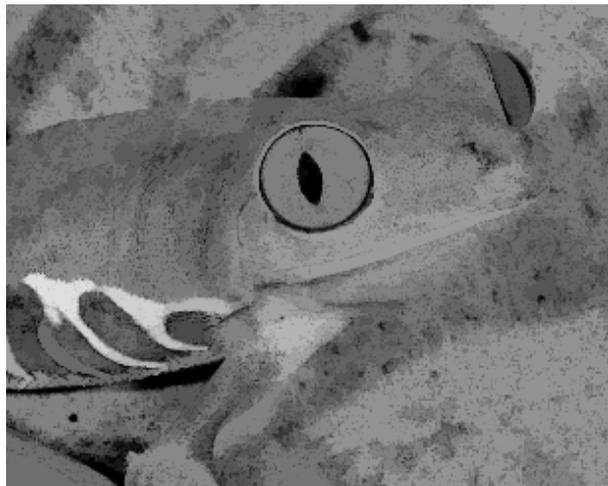
# Ouvertures et fermetures par reconstruction

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction élimine les structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant  
de l'ouverture  
morphologique :



original



ouverture par reconstruction



fermeture par reconstruction