ENSTA PARIS

AUT202 – AUTOMATIQUE : DYNAMIQUE ET CONTROLE DES SYSTEMES

TRAVAUX PRATIQUES MATLAB N°2

8 MARS 2023 – 15 MARS 2023

L'exercice suivant est à réaliser au cours des séances de travaux pratiques MATLAB des 9 et 16 mars 2022 et à compléter par un travail personnel des élèves. Il sera évalué et contribuera à la note finale du cours AUT202 – Automatique : dynamique et contrôle des systèmes.

Il est demandé à chaque élève de rédiger un rapport (format PDF) et de le transmettre par courriel aux personnes suivantes, au plus tard le 19 mars 2023 :

- *Thomas BOUDOT : thomas.boudot@gmail.com*
- *Nicolas PETIT : nicolas.petit@minesparis.psl.eu*
- *Antoine MANZANERA : antoine.manzanera@ensta-paris.fr*
- *Sophie ALFEROFF : sophie.alferoff@ensta-paris.fr*

INTRODUCTION

Propriété – Lagrangien

On considère un système dynamique repéré par des paramètres de position $q_i(t)$. A chaque paramètre de position $q_i(t)$ est associé un paramètre de vitesse $\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} q_i(t)$.

En mécanique classique, on définit le lagrangien $\mathcal{L}$ en fonction de l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système dynamique :

$$\mathcal{L} = E_c - E_p$$

Le lagrangien vérifie alors pour chaque paramètre de position $q_i(t)$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + F_{q_i}$$

avec F_{q_i} la somme des efforts non dérivés d'une énergie potentielle travaillant selon le paramètre de position $q_i(t)$.

Propriété – Placement de pôles

Soit un système dynamique linéaire :

$$(S) \quad \frac{d}{dt} X(t) = A.X(t) + B.U(t) \quad \text{avec} \begin{cases} \dim\big(X(t)\big) = n \\ \dim\big(U(t)\big) = m \end{cases}$$

Si (S) est commandable alors pour tout polynôme unitaire P de degré n, il existe une matrice K de dimension $m \times n$ telle que les valeurs propres de $A - B.K$ soient les racines de P.

En d'autres termes, si un système dynamique linéaire est commandable, avec une commande de la forme $U(t) = -K.X(t)$, on peut choisir librement les valeurs propres en boucle fermée, et en particulier des valeurs propres à partie réelle strictement négative pour que $X(t)$ tende vers 0.

On utilisera la fonction **place** de MATLAB pour calculer le gain K qui permet de placer les valeurs propres de $A - B.K$ sur les valeurs propres désirées :

```
K = place(A, B, P);
```

où P est un vecteur contenant les valeurs propres désirées.

Théorème – Commande linéaire quadratique

Soit un système dynamique linéaire :

$$\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$$

On cherche une commande $U(t)$ qui minimise le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2}.\int_0^{\infty}\left(X^T(t).R.X(t) + U^T(t).Q.U(t)\right).dt$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(a) (A, B) est commandable
(b) R est symétrique positive
(c) Q est symétrique définie positive
(d) Il existe une racine de R telle que $(A, \sqrt{R})$ est observable (remarque : cette hypothèse est vérifiée si R est symétrique définie positive)

Alors il existe une commande $U(t)$ qui stabilise le système et minimise le critère quadratique :

$$U(t) = -K.X(t) \quad \text{avec} \quad K = Q^{-1}.B^T.S$$

où S est l'unique solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati algébrique :

$$S.A + A^T.S - S.B.Q^{-1}.B^T.S + R = 0$$

La valeur du critère associée est :

$$J = X^T(0).S.X(0)$$

On utilisera la fonction **lqr** de MATLAB pour calculer le gain K qui minimise le critère J défini par les matrices R et Q :

```
K = lqr(A, B, R, Q, zeros(n, m));
```

où $n = dim\big(X(t)\big)$ et $m = \dim\big(U(t)\big)$.

Propriété – Placement de pôles

Soit un système dynamique linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t) \\ Y(t) = C.X(t) \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} \dim\big(X(t)\big) = n \\ \dim\big(U(t)\big) = m \\ \dim\big(Y(t)\big) = p \end{cases}$$

Si (S) est observable alors pour tout polynôme unitaire P de degré n, il existe une matrice L de dimension $n \times p$ telle que les valeurs propres de $A - L.C$ soient les racines de P.

En d'autres termes, si un système linéaire est observable, on peut choisir librement les valeurs propres de l'observateur $\frac{d}{dt}\hat{X}(t) = A.\hat{X}(t) + B.U(t) + L.\big(Y(t) - C.\hat{X}(t)\big)$, et en particulier des valeurs propres à partie réelle strictement négative pour que l'erreur d'estimation $\hat{X}(t) - X(t)$ tende vers 0.

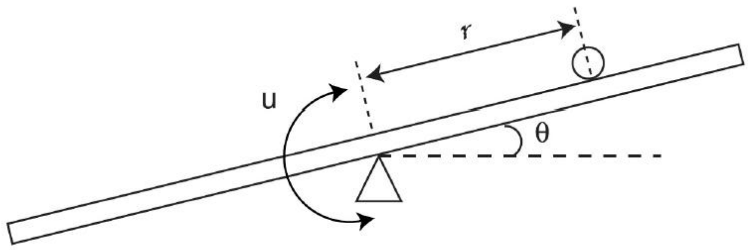
On utilisera la fonction **place** de MATLAB pour calculer le gain L qui permet de placer les valeurs propres de $A - L.C$ sur les valeurs propres désirées :

```
L = place(A', C', P)';
```

où P est un vecteur contenant les valeurs propres désirées.

PARTIE 1 – Equation de Lagrange (partie non évaluée)

On s'intéresse à la stabilisation d'une balle libre de rouler sur un plateau pivotant.



Il s'agit d'un système à deux degrés de liberté : l'angle $\theta(t)$ que fait le plateau par rapport à l'horizontale et le position $r(t)$ de la balle qui roule sans glisser sur ce plateau.

Ce système est équipé d'un seul moteur. Fixé sur l'axe de rotation du plateau, ce moteur délivre un couple $u(t)$.

On note :

- J le moment d'inertie du plateau par rapport à son axe de rotation ;
- m la masse de la balle ;
- R le rayon de la balle ;
- J_b le moment d'inertie de la balle par rapport à son centre ;
- g l'accélération de l apesanteur.

On remarque enfin que l'inertie de la balle peut s'écrire :

$$J_b = \sigma.m.R^2$$

avec $0 < \sigma \leq 1$ dépendant de la densité en fonction du rayon.

On souhaite concevoir un algorithme de contrôle qui, à partir des capteurs de position $r(t)$ et $\theta(t)$, puisse stabiliser la balle sur une position r_{ref} .

Q1/ Montrer que l'énergie cinétique du système est :

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}.J.\left(\dot{\theta}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}.m.\left(\left(\dot{r}(t)\right)^2 + \left(r(t)\right)^2.\left(\dot{\theta}(t)\right)^2\right) + \frac{1}{2}.J_b.\left(\frac{\dot{r}(t)}{R}\right)^2}$$

On négligera dans l'énergie cinétique de rotation de la balle sur elle-même, l'effet de la rotation de la barre $\dot{\theta}(t)$.

Q2/ Calculer l'énergie potentielle E_p en fonction de $r(t)$ et $\theta(t)$. On supposera que l'axe de rotation est au niveau du centre de gravité du plateau.

Q3/ Déduire de ce qui précède les équations de Lagrange suivantes :

$$\boldsymbol{\begin{cases} (1+\sigma).\dfrac{d}{dt}\dot{r}(t) = r(t).\left(\dot{\theta}(t)\right)^2 - g.\sin\left(\theta(t)\right) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\left(J + m.\left(r(t)\right)^2\right).\dot{\theta}(t)\right) = -m.g.r(t).\cos\left(\theta(t)\right) + u(t) \end{cases}}$$

PARTIE 2 – Modélisation, équilibre, linéarisé tangent, stabilité

On pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

Q4/ Montrer que la dynamique du système s'écrit sous forme d'état :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{x_1(t).\left(x_4(t)\right)^2 - g.\sin\left(x_3(t)\right)}{1+\sigma} \\ \frac{d}{dt}x_3(t) = x_4(t) \\ \frac{d}{dt}x_4(t) = \frac{u(t) - m.g.x_1(t).\cos\left(x_3(t)\right) - 2.m.x_1(t).x_2(t).x_4(t)}{J + m.\left(x_1(t)\right)^2} \end{cases}$$

Q5/ Modéliser le système dans le module Simulink de MATLAB. On prendra les valeurs suivantes pour les paramètres du système :

$$\begin{cases} J = 0,02\ kg.m^2 \\ m = 0,6\ kg \\ \sigma = 0,8 \\ g = 9,81\ m.s^{-2} \end{cases}$$

Q6/ Simuler la dynamique du système avec une commande nulle pour différentes conditions initiales. Que constate-t-on ?

Q7/ Quels sont les points d'équilibre du système ? Peut-on stabiliser la balle sur n'importe quelle position r_{ref} ? Exprimer l'état d'équilibre et la commande d'équilibre en fonction de la position r_{ref} sur laquelle on souhaite stabiliser la balle.

Q8/ Ajouter dans le modèle Simulink un bloc permettant de calculer l'état d'équilibre X_{ref} et la commande d'équilibre u_{ref} en fonction de la position r_{ref} sur laquelle on souhaite stabiliser la balle. Vérifier avec le modèle Simulink pour différentes valeurs de r_{ref} que si le système n'est pas initialisé exactement à l'équilibre, les trajectoires divergent.

On note $X(t) = X_{ref} + \delta X(t)$ et $u(t) = u_{ref} + \delta u(t)$ où $\delta X(t)$ et $\delta u(t)$ sont les écarts à l'équilibre.

On s'intéresse désormais à l'équilibre associé à $r_{ref} = 0$ (balle stabilisée sur l'axe de rotation du plateau).

Q9/ Montrer que le linéarisé tangent autour de la position d'équilibre $r_{ref} = 0$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \\ \delta x_3(t) \\ \delta x_4(t) \end{pmatrix}}_{\delta X(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m.g}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \\ \delta x_3(t) \\ \delta x_4(t) \end{pmatrix}}_{\delta X(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}}_{B} . \delta u(t)$$

On pose :

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{m.g^2}{(1+\sigma).J}}$$

Q10/ Calculer les valeurs propres du linéarisé tangent en boucle ouverte en fonction de ω . Le système en boucle ouverte est-il stable ? Vérifier numériquement les valeurs propres en boucle ouverte avec MATLAB.

PARTIE 3 – Contrôleur

Q11/ Le linéarisé tangent est-il commandable ? Vérifier le rang de la matrice de commandabilité avec MATLAB (on pourra également s'assurer que la matrice de commandabilité est bien conditionnée).

On cherche tout d'abord à réaliser un bouclage d'état $\delta u(t) = -K.\delta X(t)$ qui place les valeurs propres en boucle fermée en $-\omega$, $-2.\omega$, $-\omega + i.\omega$ et $-\omega - i.\omega$.

Q12/ Calculer dans MATLAB le gain K qui place les valeurs propres en boucle fermée sur les valeurs voulues (on pourra utiliser la fonction place). Vérifier numériquement les valeurs propres en boucle fermée avec MATLAB.

Q13/ Implémenter dans le modèle Simulink le retour d'état $\delta u(t) = -K.\delta X(t)$ qui place les valeurs propres en boucle fermée sur les valeurs propres voulues. Vérifier que le retour d'état permet bien de stabiliser la balle sur la position $r_{ref} = 0$ (avec un état initial suffisamment proche de l'équilibre pour que le linéarisé tangent reste une approximation valable).

On cherche maintenant à réaliser un bouclage d'état $\delta u(t) = -K.\delta X(t)$ qui minimise le critère :

$$J_{LQ} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\left(\delta x_1(t)\right)^2 + \left(\delta x_2(t)\right)^2 + \left(\delta x_3(t)\right)^2 + \left(\delta x_4(t)\right)^2 + \left(\delta u(t)\right)^2\right).dt$$

Q14/ Montrer que le critère J_{LQ} peut s'écrire sous la forme :

$$J_{LQ} = \frac{1}{2}.\int_0^\infty \left(\delta X^T(t).R.\delta X(t) + \delta u(t).Q.\delta u(t)\right).dt$$

Identifier les matrices R et Q . Montrer que ce problème de commande optimale admet une solution. Rappeler comment est défini le gain optimal K .

Q15/ Calculer dans MATLAB le gain optimal K qui minimise le critère J_{LQ} (on pourra utiliser la fonction lqr). Quels sont les valeurs propres en boucle fermée ?

Q16/ Implémenter dans le modèle Simulink le retour d'état $\delta u(t) = -K.\delta X(t)$ qui minimise le critère J_{LQ} . Vérifier que le retour d'état permet bien de stabiliser la balle sur la position $r_{ref} = 0$ (avec un état initial suffisamment proche de l'équilibre pour que le linéarisé tangent reste une approximation valable).

Q17/ Comparer les résultats obtenus avec les deux méthodes.

PARTIE 4 – Observateur

On ne dispose que de capteurs capables de donner les mesures de position $r(t)$ et $\theta(t)$. On va donc devoir construire un observateur asymptotique pour estimer l'intégralité de l'état.

On pose :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$

On s'intéresse toujours à l'équilibre associé à $r_{ref} = 0$ (balle stabilisée sur l'axe de rotation du plateau).

Q18/ Montrer que le linéarisé tangent du système (avec mesure) autour de la position d'équilibre $r_{ref} = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{g}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{m.g}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{J} \end{pmatrix}}_{B} . u(t) \\ \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}}_{Y(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} \end{cases}$$

Q19/ Le linéarisé tangent est-il observable ? Vérifier le rang de la matrice d'observabilité avec MATLAB (on pourra également s'assurer que la matrice d'observabilité est bien conditionnée).

Q20/ Ecrire les équations de l'observateur asymptotique permettant d'estimer l'état $X(t)$ à partir de la mesure $Y(t)$ et la commande $u(t)$. On notera $\widehat{X}(t)$ l'état estimé et L le gain de l'observateur.

On cherche à placer les valeurs de l'observateur en $-\omega$, $-3.\omega$, $-2.\omega + i.\omega$ et $-2.\omega - i.\omega$.

Q21/ Calculer dans MATLAB le gain L qui place les valeurs propres en boucle fermée sur les valeurs propres voulues (on pourra utiliser la fonction place). Vérifier numériquement les valeurs propres de l'observateur avec MATLAB.

Q22/ Implémenter l'observateur dans le modèle Simulink. Vérifier qu'il permet bien d'estimer l'état au voisinage de la position $r_{ref} = 0$ (avec un état suffisamment proche de l'équilibre pour que le linéarisé tangent reste une approximation valable).

PARTIE 5 – Observateur-contrôleur

On va maintenant utiliser l'état estimé par l'observateur dans le retour d'état. La loi de commande est donc de la forme :

$$u(t) = u_{ref} - K.\underbrace{\left(\hat{X}(t) - X_{ref}\right)}_{=\widehat{\delta X}(t)}$$

On pourra choisir le gain K calculé en plaçant les valeurs propres en boucle fermée ou en minimisant le critère J_{LQ} .

Q23/ Implémenter l'observateur-contrôleur dans le modèle Simulink. Vérifier qu'il permet bien d'estimer l'état et de stabiliser la balle sur la position $r_{ref} = 0$ (avec un état initial suffisamment proche de l'équilibre pour que le linéarisé tangent reste une approximation valable).

On souhaite maintenant stabiliser la balle sur une position $r_{ref} \neq 0$ (mais supposée suffisamment proche de 0 pour que le linéarisé tangent reste une approximation valable).

Q24/ Compléter l'observateur-contrôleur dans le modèle Simulink afin de pouvoir estimer l'état et stabiliser la balle sur n'importe quelle position $r_{ref} \neq 0$ (supposée proche de 0). Vérifier qu'il permet bien d'estimer l'état et de stabiliser la balle sur la position $r_{ref} \neq 0$ (avec un état initial suffisamment proche de l'équilibre pour que le linéarisé tangent reste une approximation valable).

Q25/ L'observateur-contrôleur est-il toujours performant lorsque la balle s'éloigne significativement de la position $r_{ref} = 0$?