ENSTA PARIS

AUT202 – AUTOMATIQUE : DYNAMIQUE ET CONTROLE DES SYSTEMES

PETITE CLASSE N°3

2 MARS 2022

INTRODUCTION – Commande optimale

Théorème – Commande optimale (état final contraint)

Soit un système dynamique :

$$\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$$

On cherche une commande $U(t)$ pour $t \in [0, T]$ qui minimise le critère :

$$J = \int_0^T L\big(X(t), U(t)\big).dt$$

On impose enfin la condition initiale et la condition finale :

$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ X(T) = X_T \end{cases}$$

On introduit le multiplicateur de Lagrange $\lambda(t)$ associé à la contrainte $\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$.

Les conditions d'optimalités sont alors données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big) \\ \dfrac{d}{dt}\lambda(t) = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial X}\right)^T_{(X(t),U(t))}.\lambda(t) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial X}\right)^T_{(X(t),U(t))} \\ 0 = \left(\dfrac{\partial L}{\partial U}\right)_{(X(t),U(t))} + \lambda(t)^T.\left(\dfrac{\partial f}{\partial U}\right)_{(X(t),U(t))} \end{cases}$$

avec comme condition au bord :

$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ X(T) = X_T \end{cases}$$

Théorème – Commande optimale (état final libre)

Soit un système dynamique :

$$\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$$

On cherche une commande $U(t)$ pour $t \in [0, T]$ qui minimise le critère :

$$J = l\big(X(T)\big) + \int_0^T L\big(X(t), U(t)\big).dt$$

On impose enfin la condition initiale :

$$X(0) = X_0$$

On introduit le multiplicateur de Lagrange $\lambda(t)$ associé à la contrainte $\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$.

Les conditions d'optimalités sont alors données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big) \\ \dfrac{d}{dt}\lambda(t) = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial X}\right)^T_{(X(t),U(t))} . \lambda(t) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial X}\right)^T_{(X(t),U(t))} \\ 0 = \left(\dfrac{\partial L}{\partial U}\right)_{(X(t),U(t))} + \lambda(t)^T . \left(\dfrac{\partial f}{\partial U}\right)_{(X(t),U(t))} \end{cases}$$

avec comme condition au bord :

$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ \lambda(T) = \left(\dfrac{\partial l}{\partial X}\right)_{X(T)} \end{cases}$$

<u>Théorème – Commande linéaire quadratique</u>

Soit un système dynamique linéaire :

$$\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$$

On cherche une commande $U(t)$ qui minimise le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2} . \int_0^\infty \big(X^T(t).R.X(t) + U^T(t).Q.U(t)\big).dt$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(a) (A, B) est commandable
(b) R est symétrique positive
(c) Q est symétrique définie positive
(d) Il existe une racine de R telle que $(A, \sqrt{R})$ est observable (remarque : cette hypothèse est vérifiée si R est symétrique définie positive)

Alors il existe une commande $U(t)$ qui stabilise le système et minimise le critère quadratique :

$$U(t) = -K.X(t) \quad \text{avec} \quad K = Q^{-1}.B^T.S$$

où S est l'unique solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati algébrique :

$$S.A + A^T.S - S.B.Q^{-1}.B^T.S + R = 0$$

La valeur du critère associée est :

$$J = X^T(0).S.X(0)$$

EXERCICE 1 – Stabilisation d'un pendule

On s'intéresse à la stabilisation d'un pendule vertical satisfaisant aux équations (normalisées) :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t) + u(t)$$

où $u(t)$ est une commande librement choisie.

On souhaite qu'en temps infini il rejoigne le point d'équilibre $x^{eq} = 0$. On se propose de calculer une commande réalisant cet objectif par la méthode LQR.

Q1/ Mettre le système sous forme d'état. Quelles sont les valeurs propres du système en boucle ouverte ? Comment se comporte-t-il ?

On cherche la commande u qui minimise le critère quadratique suivant :

$$J = \frac{1}{2} . \int_0^\infty \left(\left(x(t)\right)^2 + \left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(u(t)\right)^2 \right) . dt$$

Q2/ Former l'équation de Riccati algébrique correspondante.

Q3/ Résoudre cette équation. Donner l'expression du contrôle optimal.

On considère maintenant le problème un peu plus général de minimisation du critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2} . \int_0^\infty \left(\left(x(t)\right)^2 + \left(\dot{x}(t)\right)^2 + q . \left(u(t)\right)^2 \right) . dt$$

Q4/ Que se passe-t-il si q est grand ? si q est petit ?

EXERCICE 2 – Placement de pôles

On considère un système dynamique linéaire :

$$\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$$

Ce système est supposé commandable. On cherche à placer ses pôles en boucle fermée dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}(z) < -\alpha \leq 0$.

On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \bar{X}(t) = \exp(\alpha.t)\,.X(t) \\ \bar{U}(t) = \exp(\alpha.t)\,.U(t) \end{cases}$$

Q1/ Quelles sont sous forme d'état les équations satisfaites par $\left(\bar{X}(t), \bar{U}(t)\right)$?

Q2/ Le système obtenu est-il commandable ?

Q3/ Proposer une commande stabilisante par la méthode LQR. Quelle est l'équation de Riccati algébrique associée ?

Q4/ En déduire une loi de commande stabilisant le système original $\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$ et garantissant que les pôles en boucle fermée sont dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}(z) < -\alpha \leq 0$.