ENSTA PARIS

AUT202 – AUTOMATIQUE : DYNAMIQUE ET CONTROLE DES SYSTEMES

PETITE CLASSE N°2

15 FEVRIER 2023

INTRODUCTION – Observabilité

Définition – Observabilité

Un système dynamique $\frac{d}{dt}X(t) = f\big(X(t), U(t)\big)$ avec une mesure $Y(t) = h\big(X(t)\big)$ est observable si pour toute commande $U(t)$ définie sur un intervalle de temps fini $T > 0$, la fonction qui à un état initial X_i associe la mesure $y(t)$ sur cet intervalle de temps est injective.

En d'autres termes, si un système est observable, il est possible de retrouver l'état à partir de la connaissance de l'évolution de la commande et de la mesure.

Propriété – Critère d'observabilité de Kalman

Le système dynamique linéaire $\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$ avec la mesure $Y(t) = C.X(t)$ est observable si et seulement si la matrice d'observabilité $\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ C.A \\ \vdots \\ C.A^{n-1} \end{pmatrix}$ est de rang $n = \dim\big(X(t)\big)$.

Propriété – Placement de pôles

Soit un système dynamique linéaire :

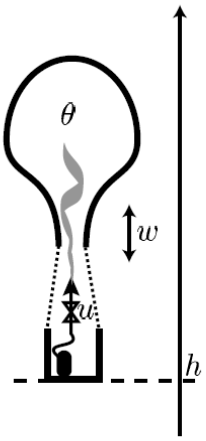
$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t) \\ Y(t) = C.X(t) \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} \dim\big(X(t)\big) = n \\ \dim\big(U(t)\big) = m \\ \dim\big(Y(t)\big) = p \end{cases}$$

Si (S) est observable alors pour tout polynôme unitaire P de degré n, il existe une matrice L de dimension $n \times p$ telle que les valeurs propres de $A - L.C$ soient les racines de P.

En d'autres termes, si un système linéaire est observable, on peut choisir librement les valeurs propres de l'observateur $\frac{d}{dt}\hat{X}(t) = A.\hat{X}(t) + B.U(t) + L.\big(Y(t) - C.\hat{X}(t)\big)$, et en particulier des valeurs propres à partie réelle strictement négative pour que l'erreur d'estimation $\hat{X}(t) - X(t)$ tende vers 0.

EXERCICE – Montgolfière

On cherche à piloter la dynamique verticale d'une montgolfière, la dynamique horizontale étant très peu commandable.



On note $\theta(t)$ l'écart de température par rapport à l'équilibre dans le ballon, $v(t)$ la vitesse ascensionnelle et $h(t)$ l'altitude. Un premier modèle simple est donné par les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}h(t) = v(t) \\ \dfrac{d}{dt}v(t) = -\dfrac{v(t)}{\tau_v} + c.\theta(t) + \dfrac{w(t)}{\tau_v} \\ \dfrac{d}{dt}\theta(t) = -\dfrac{\theta(t)}{\tau_\theta} + u(t) \end{cases}$$

où :

- $\tau_v > 0$ et $\tau_\theta > 0$ sont des constantes de temps fixes ;
- c est un paramètre de couplage correspondant à la poussée d'Archimède ;
- $w(t)$ est la vitesse verticale du vent, considérée ici comme une perturbation ;
- $u(t)$ est la commande proportionnelle à la chaleur fournie au ballon par le brûleur.

Q1/ On suppose que l'on dispose que d'un seul capteur, un altimètre donnant $h(t)$. Peut-on en déduire $v(t)$, $\theta(t)$ et $w(t)$ en supposant que $w(t)$ varie peu ?

Q2/ Construire un observateur qui permet de reconstruire asymptotiquement $\theta(t)$, $v(t)$, $h(t)$ et $w(t)$.

Q3/ On suppose ici la perturbation $w(t)$ connue. Montrer que le système est commandable. Quelle est la sortie de Brunovsky $z(t)$? Construire un contrôleur qui permet de suivre une trajectoire régulière $z(t) = z_c(t)$.

Q4/ Donner les équations de l'observateur contrôleur qui permet de suivre la trajectoire $z(t) = z_c(t)$ en ne mesurant que $h(t)$ et avec une perturbation constante inconnue (et donc à estimer).

Q5/ On désire maintenant aller d'une altitude stabilisée h_0 vers une autre altitude stabilisée h_1. Comment choisir la trajectoire de référence $z_c(t)$, en sachant que la commande doit rester comprise entre deux bornes $-a \leq u(t)) \leq b$ ($a, b > 0$ donnés) et en supposant $|w(t)|$ assez petit.