Séance 4 : Résolution de problèmes variationnels

Nous vous proposons dans ce TD deux problèmes complets dans lesquels nous appliquons tous les outils et toutes les notions vues dans les 3 premiers cours : les espaces de Sobolev, les formules de Green, l'équivalence entre problemes aux limites et formulation variationnelle, theoreme de Lax Milgram, inégalités de Poincaré,...

Les questions précédées d'un $\Diamond$ sont plus difficiles.

Exercice 1 Equation d'advection-diffusion
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. On considère une équation de diffusion avec un terme d'advection posée sous forme variationnelle :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } \quad \int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + \big(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u\big) v\right] \, d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{FV_1}$$

Ici, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3) \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^3$ et $f \in L^2(\Omega)$ sont des **fonctions** de Ω considérées comme des données du problème.

Question 1.(a) Montrer, en utilisant la formule de Stokes, que

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega), \ \forall \vec{\mathbf{b}} \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^3, \quad \int_\Omega \left[\big(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u\big) v + \big(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} v\big) u + \big(\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}}\big) \, u \, v\right] \, d\Omega = 0. \tag{1}$$

(b) Expliquer pourquoi (1) reste vraie pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Question 2. On suppose dans cette question et la suivante qu'il existe une constante β strictement négative telle que

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} \leq \beta < 0$$

Montrer que la forme bilinéaire a associée à (FV_1) est coercive dans $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

Question 3.(a) Montrer qu'il existe une unique solution au problème (FV_1).

(b) Montrer que la solution est continue par rapport aux données. On explicitera cette propriété en fonction de f et β.

Question 4. On suppose dans cette question et la suivante que

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} = 0$$

Montrer que la forme bilinéaire a associée à (FV_1) est coercive dans $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

Question 5. En déduire que le problème est bien posé également dans ce cas là.

Question 6. Retrouver le problème vérifié par la solution u de (FV_1) contitué d'une équation aux dérivées partielles satisfaite presque partout dans Ω et d'une condition aux limites sur le bord $\partial\Omega$.

$\diamond$ **Question 7.** Que pouvez vous dire quand

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} \geq 0 \ ?$$

Exercice 2 Approximation du laplacien par une méthode spectrale
On considère le problème aux limites suivant :
Trouver $u \in H^1(]0,1[)$ *telle que*

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

où $f \in L^2(]0,1[)$.

Question 1. Rappeler (sans démontrer l'équivalence) la formulation variationnelle associée sur $H^1_0(]0,1[)$ que l'on écrira sous la forme

Trouver $u \in H^1_0(]0,1[)$ *telle que*

$$\forall v \in H^1_0(]0,1[), \quad a(u,v) = \ell(v)$$

et démontrer qu'il existe une solution et une seule à cette formulation variationnelle.

Question 2. On cherche à déterminer des solutions propres de l'opérateur laplacien, définies par
$\phi \in H^1(]0,1[),\ \phi \neq 0$ *telles que* $\exists\, \lambda$

$$\begin{cases} -\phi'' = \lambda\phi \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}$$

où λ est appelée la valeur propre associée.

Montrer que les solutions de la forme

$$\begin{aligned} \phi_k :&]0,1[\to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \sqrt{2}\sin(k\pi x) \end{aligned}$$

sont solutions propres pour $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la valeur propre λ_k correspondante ?

Question 3. Démontrer que ces fonctions sont orthonormales pour le produit scalaire de $L^2(]0,1[)$. En déduire qu'elles sont orthogonales pour le produit scalaire de $H^1(]0,1[)$.

On admet que toute fonction $v \in L^2(]0,1[)$ peut se décomposer sous la forme

$$v = \sum_{k\geq 1} \alpha_k\, \phi_k, \quad \text{avec } \alpha_k = (v, \phi_k)_{L^2}$$

autrement dit, que la famille $(\phi_k)_{k\geq 1}$ est une base orthonormale de $L^2(]0,1[)$.

Question 4. On introduit, pour tout N, l'espace

$$V_N = \mathrm{Vect}(\phi_1, \ldots, \phi_N).$$

On considère sur V_N la formulation variationnelle
Trouver $u_N \in V_N$ telle que

$$\forall v_N \in V_N, \quad a(u_N, v_N) = \ell(v_N) \tag{3}$$

où a et ℓ ont été déterminées à la question 1.

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, démontrer qu'il existe une solution unique au problème (3).

Question 5. Démontrer que le problème (3) est équivalent à
Trouver $u_N \in V_N$ telle que

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\}, \quad a(u_N, \phi_k) = \ell(\phi_k). \tag{4}$$

Question 6. En décomposant u_N sur la base des ϕ_k :

$$\forall x \in]0,1[, \quad u_N(x) = \sum_{k=1}^{N} U_k \phi_k(x),$$

montrer que l'on peut réexprimer le problème (4) sous la forme

$$\textit{Trouver } \vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \textit{tel que} \quad \mathbb{A}\vec{U} = \vec{F}$$

où $\vec{F} \in \mathbb{R}^N$ et $\mathbb{A} \in M_N(\mathbb{R})$. Préciser les valeurs de $\vec{F}$ et $\mathbb{A}$ et expliquer pourquoi $\mathbb{A}$ est inversible.

Question 7. A votre avis, pour N donné, quel est le lien entre u_N et u ? Que se passe-t-il lorsque N tend vers l'infini ? (réponses sans démonstration)

Question 8. On considère désormais le problème variationnel suivant :
Trouver $\tilde{u} \in H_0^1(]0,1[)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad \int_0^1 \kappa(x)\tilde{u}'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx \tag{5}$$

où $\kappa \in L^\infty(]0,1[)$ est telle que

$$\kappa(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1/2 \\ 2, & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

On reprend alors le raisonnement des questions précédentes en considérant le problème
Trouver $\tilde{u}_N \in V_N$ telle que

$$\forall v_N \in V_N, \quad \int_0^1 \kappa(x)\tilde{u}_N'v_N'\,dx = \int_0^1 fv_N\,dx. \tag{6}$$

Démontrer en utilisant le théorème de Lax-Milgram qu'il existe une solution unique au problème (6).

Question 9. En décomposant $\tilde{u}_N$ sur la base des ϕ_k :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \tilde{u}_N(x) = \sum_{1\leq k\leq N} \tilde{U}_k\phi_k(x)$$

montrer que l'on peut réexprimer le problème (6) sous la forme

$$\textit{Trouver } \vec{\tilde{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \textit{tel que} \quad \tilde{\mathbb{A}}\vec{\tilde{U}} = \vec{F}$$

où $\vec{F}$ est défini question 3.c et $\tilde{\mathbb{A}} \in M_N(\mathbb{R})$ est inversible. Préciser les valeurs de $\tilde{\mathbb{A}}$.

Question 10. Quelle(s) difficulté(s) va-t-on rencontrer lors de la résolution par ordinateur du système matriciel précédent ?