Corrigé de la Séance 4 : Résolution de problèmes variationnels

Exercice 1 Equation d'advection-diffusion
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. On considère une équation de diffusion avec un terme d'advection posée sous forme variationnelle :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \quad \int_\Omega \left[\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + \big(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u\big) v\right] d\Omega = \int_\Omega f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{FV_1}$$

Ici, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3) \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^3$ et $f \in L^2(\Omega)$ sont des **fonctions** de Ω considérées comme des données du problème.

Question 1.(a) Montrer, en utilisant la formule de Stokes, que

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega),\ \forall \vec{\mathbf{b}} \in (\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}))^3, \quad \int_\Omega \left[\big(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u\big) v + \big(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} v\big) u + \big(\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}}\big)\, u\, v\right] d\Omega = 0. \tag{1}$$

Corrigé de la question 1.(a) On rappelle la formule de Stokes

$$\forall w \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right), \quad \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} w\, n_i\, d\Gamma \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3 \tag{2}$$

où $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est la normale sortante à $\partial\Omega$. On applique (2) à $w = b_i uv$. En dérivant le produit $b_i \times (uv)$ et en remarquant que le terme de bord est nul car uv est à support compact, on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial b_i}{\partial x_i}(uv) + \int_\Omega \frac{\partial (uv)}{\partial x_i} b_i = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div} \vec{\mathbf{b}}\, u\, v &= \sum_{i=1}^3 \int_\Omega (\partial_{x_i} b_i) uv \\
&= -\sum_{i=1}^3 \int_\Omega b_i \partial_{x_i}(uv) \\
&= -\sum_{i=1}^3 \int_\Omega b_i \partial_{x_i}(u) v - \sum_{i=1}^3 \int_\Omega b_i \partial_{x_i}(v) u \\
&= -\int_\Omega \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u\right) v - \int_\Omega \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} v\right) u.
\end{aligned}$$

(b) Expliquer pourquoi (1) reste vraie pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Corrigé de la question 1.(b) On utilise le fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ pour la norme $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$.

Question 2. On suppose dans cette question et la suivante qu'il existe une constante β strictement négative telle que

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} \leq \beta < 0$$

Montrer que la forme bilinéaire a associée à (FV_1) est coercive dans $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

Corrigé de la question 2. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. On a

$$a(v,v) = \|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} v) v.$$

On a d'après (1) (remarquer que $-\beta > 0$)

$$\int_\Omega (\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} v) v = -\frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div} \vec{\mathbf{b}}\, v^2 \geq -\beta \|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

ce qui donne immédiatement la coercivité de a puisque $\min(1, -\beta) > 0$:

$$a(v,v) \geq \|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)} - \beta \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \min(1, |\beta|/2)\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Question 3.(a) Montrer qu'il existe une unique solution au problème (FV_1).

Corrigé de la question 3.(a)

- o $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est bien un espace de Hilbert, en tant que sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.
- o La forme a associée à (FV_1) est bilinéaire et coercive d'après la Question 2. Elle est également continue puisque $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$,

  $$|a(w,v)| \leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla w\|_{L^2(\Omega)^3} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

  où on a utilisé une inégalité triangulaire et des inégalités de Cauchy-Schwartz. En utilisant une inégalité de Cauchy Schwartz dans $\mathbb{R}^3$, on trouve $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$,

  $$|a(w,v)| \leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\vec{\mathbf{b}}\|_{L^\infty} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^3} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + \|\vec{\mathbf{b}}\|_{L^\infty}) \|w\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

  où $\|\vec{\mathbf{b}}\|_{L^\infty} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|\vec{\mathbf{b}}(x)\|$.
- o la forme linéaire ℓ définie par

  $$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \ell(v) = \int_\Omega f v \, d\Omega$$

  est continue puisque

  $$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

  où on a utilisé l'inégalité de Cauchy Schwartz et la définition de la norme H^1.

On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram : il y a donc existence et unicité d'une solution u de (FV_1).

(b) Montrer que la solution est continue par rapport aux données. On explicitera cette propriété en fonction de f et β.

Corrigé de la question 3.(b) Il suffit d'écrire (FV_1) avec $v = u$. On trouve, en utilisant la coercivité de a et la continuité de ℓ :

$$\min(1, |\beta|/2)\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(u,u) = \ell(u) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

soit

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}}{\min(1, |\beta|/2)}.$$

Question 4. On suppose dans cette question et la suivante que

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} = 0$$

Montrer que la forme bilinéaire a associée à (FV_1) est coercive dans $H^1_0(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

Corrigé de la question 4. On a

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad a(v,v) = \|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} v) v.$$

On a d'après (1)

$$\int_\Omega (\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} v) v = -\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} v^2 = 0.$$

On a donc

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad a(v,v) = \|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Pour conclure, il faut utiliser l'inégalité de Poincaré :

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} := \|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C_p^2)\|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$

donc

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad a(v,v) \geq \frac{1}{1 + C_p^2}\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Question 5. En déduire que le problème est bien posé également dans ce cas là.

Corrigé de la question 5. La question 4 nous donne la coercivité de a dans le cas $\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} = 0$, il suffit d'utiliser le corrigé de la question 3.(a) pour voir que toutes les autres hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites (pour montrer notamment la continuité de la forme bilinéaire, nous avons seulement utilisé que chaque composant de $\vec{\mathbf{b}}$ est bornée). Le problème est donc bien posé dans $H^1_0(\Omega)$.

Question 6. Retrouver le problème vérifié par la solution u de (FV_1) contitué d'une équation aux dérivées partielles satisfaite presque partout dans Ω et d'une condition aux limites sur le bord $\partial\Omega$.

Corrigé de la question 6. Tout d'abord, u solution de (FV_1) appartient à $H^1_0(\Omega)$, on a donc

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

On choisit ensuite une fonction-test v de $\mathscr{D}(\Omega)$, et on a

$$\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v\rangle \quad , \int_\Omega \big(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u\big) v \, d\Omega = \langle \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u, v\rangle \quad \text{et} \qquad \int_\Omega f v \, d\Omega = \langle f, v\rangle$$

et par définition de la dérivation au sens des distributions

$$\langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v\rangle = \langle -\triangle u, v\rangle$$

On a alors

$$\langle -\triangle u + \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u - f, v\rangle = 0, \quad \forall v \in \mathscr{D}(\Omega).$$

On déduit que

$$-\triangle u + \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u = f \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Comme f et u sont dans $L^2(\Omega)$, on trouve que $-\triangle u$ aussi. On a donc $-\triangle u + \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u = f$ dans L^2 et donc presque partout dans Ω. En conclusion, u solution de (FV_1) est également solution de

$$\begin{cases} -\triangle u + \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\nabla} u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

◇ **Question 7.** Que pouvez vous dire quand

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} \geq 0 \ ?$$

Corrigé de la question 7. En utilisant la question 3.(a), on remarque que toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées sauf la coercivité de la forme bilinéaire a. On a , en utilisant (1), que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad a(v,v) = \|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)^3} - \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} \, v^2.$$

Si on suppose $\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} \leq \gamma$ avec $\gamma > 0$, on a alors $-\operatorname{div} \vec{\mathbf{b}} \geq -\gamma$ soit

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad a(v,v) \geq \|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)^3} - \frac{\gamma}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad a(v,v) \geq (1 - \frac{\gamma}{2} C_p^2)\|\vec{\nabla} v\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$

Si $1 - \gamma C_p^2/2 > 0$ soit $\gamma < 2/C_p^2$, la forme bilinéaire est coercive pour la semi-norme H^1 et donc pour la norme H^1 (puisque les 2 normes sont équivalentes dans $H^1_0(\Omega)$ d'après l'inégalité de Poincaré). Sinon, on ne peut rien dire.

Exercice 2 Approximation du laplacien par une méthode spectrale

On considère le problème aux limites suivant :

Trouver $u \in H^1(]0,1[)$ telle que

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

où $f \in L^2(]0,1[)$.

Question 1. Rappeler (sans démontrer l'équivalence) la formulation variationnelle associée sur $H^1_0(]0,1[)$ que l'on écrira sous la forme

Trouver $u \in H^1_0(]0,1[)$ *telle que*

$$\forall v \in H^1_0(]0,1[), \quad a(u,v) = \ell(v)$$

et démontrer qu'il existe une solution et une seule à cette formulation variationnelle.

Corrigé de la question 1. Soit $v \in H^1(]0,1[)$. On multiplie la première équation de (3) par v et on intègre sur $]0,1[$:

$$-\int_0^1 u''(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx$$

Comme $u \in H^1(]0,1[)$ et $u'' = -f \in L^2(]0,1[)$ alors $u \in H^2(]0,1[)$ et on peut appliquer la formule de Green. On obtient

$$\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx.$$

En choisissant $v \in H^1_0(]0,1[)$ on trouve

$$\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx.$$

La formulation variationnelle du problème est donc

Trouver $u \in H^1_0(]0,1[)$ *telle que*

$$\forall v \in H^1_0(]0,1[), \quad \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx$$

On va montrer que le théorème de Lax Milgram s'applique.

- $(H^1_0(]0,1[), |\cdot|_{H^1})$ (avec $|v|_{H^1} = \|v'\|_{L^2}$ est un espace de Hilbert car $(H^1_0(]0,1[), \|\cdot\|_{H^1})$ est un espace de Hilbert en tant que sous espace fermé de $H^1(]0,1[)$ et $\|\cdot\|_{H^1}$ et $|\cdot|_{H^1}$ sont deux normes équivalentes dans $H^1_0(]0,1[)$ d'après l'inégalité de Poincaré.
- la forme bilinéaire n'est donc rien d'autre que le produit scalaire associé à la semi norme H^1, $|\cdot|_{H^1}$: elle est donc continue (en utilisant une inégalité de Cauchy Schwartz pour le produit scalaire associé à $|\cdot|_{H^1}$) et coercive de manière évidente.
- la forme linéaire est continue car

$$\forall v \in H^1_0(]0,1[), \quad \left|\int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx\right| \leq \|f\|_{L^2}\, \|v\|_{L^2} \leq c_p\, \|f\|_{L^2}\, |v'|_{L^2}$$

  où la dernière inégalité a été obtenue en utilisant l'inégalité de Poincaré.

Le problème est donc bien posé dans $H^1_0(]0,1[)$ et la solution vérifie

$$|u|_{H^1} \leq c_p \|f\|_{L^2}$$

Question 2. On cherche à déterminer des solutions propres de l'opérateur laplacien, définies par
$\phi \in H^1(]0,1[),\ \phi \neq 0$ *telles que* $\exists\, \lambda$

$$\begin{cases} -\phi'' = \lambda\phi \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}$$

où λ est appelée la valeur propre associée.

Montrer que les solutions de la forme

$$\begin{aligned} \phi_k :]0,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{2}\sin(k\pi x) \end{aligned}$$

sont solutions propres pour $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la valeur propre λ_k correspondante ?

Corrigé de la question 2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\phi_k \in C^\infty([0,1])$ donc $\phi_k \in H^1(]0,1[)$. On a deplus $\phi_k(0) = \phi_k(1) = 0$. Enfin, on a $-\phi_k'' = (k\pi)^2\,\phi_k$. La valeur propre associée à ϕ_k est $\lambda_k = (k\pi)^2$.

Question 3. Démontrer que ces fonctions sont orthonormales pour le produit scalaire de $L^2(]0,1[)$. En déduire qu'elles sont orthogonales pour le produit scalaire de $H^1(]0,1[)$.

Corrigé de la question 3. Pour tout $k, l \in \mathbb{N}^*,\ k \neq l$, on a

$$(\phi_k, \phi_l)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \sqrt{2}\sin(k\pi x)\,\sqrt{2}\sin(l\pi x)dx = \int_0^1 [\cos((k-l)\pi x) - \cos((k+l)\pi x)]dx = 0$$

et

$$\|\phi_k\|^2_{L^2(0,1)} = 2\int_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx = \int_0^1 [1 - \cos(2k\pi x)]dx = 1.$$

Enfin, en multipliant l'égalité $-\phi_k'' = (k\pi)^2\,\phi_k$ par ϕ_l, en intégrant sur $(0,1)$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 \phi_k'(x)\,\phi_l'(x)\,dx = (k\pi)^2 \int_0^1 \phi_k(x)\,\phi_l(x)\,dx.$$

On en déduit que

$$(\phi_k, \phi_l)_{H^1} = 0 \text{ si } k \neq l \quad \text{et} \quad \|\phi_k\|^2_{H^1} = 1 + (k\pi)^2.$$

On admet que toute fonction $v \in L^2(]0,1[)$ peut se décomposer sous la forme

$$v = \sum_{k \geq 1} \alpha_k\,\phi_k, \quad \text{avec } \alpha_k = (v, \phi_k)_{L^2}$$

autrement dit, que la famille $(\phi_k)_{k\geq 1}$ est une base orthonormale de $L^2(]0,1[)$.

Question 4. On introduit, pour tout N, l'espace

$$V_N = \text{Vect}(\phi_1, \ldots, \phi_N).$$

On considère sur V_N la formulation variationnelle
Trouver $u_N \in V_N$ telle que

$$\forall v_N \in V_N, \quad a(u_N, v_N) = \ell(v_N) \tag{4}$$

où a et ℓ ont été déterminées à la question 1.

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, démontrer qu'il existe une solution unique au problème (4).

Corrigé de la question 4. V_N est un sous-espace de dimension finie de $H_0^1(]0,1[)$ donc c'est un sous espace fermé. On en déduit que $(V_N, |\cdot|_{H^1})$ est un espace de Hilbert. La forme bilinéaire a est continue et coercive dans $H_0^1(]0,1[)$ donc en particulier pour les éléments de V_N. De même pour la continuité de ℓ. Le théorème de Lax-Milgram s'applique et donc le problème (4) est bien posé et

$$|u_N|_{H^1} \leq c_p \|f\|_{L^2}.$$

Question 5. Démontrer que le problème (4) est équivalent à
Trouver $u_N \in V_N$ telle que

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\}, \quad a(u_N, \phi_k) = \ell(\phi_k). \tag{5}$$

Corrigé de la question 5. Si u_N vérifie (4), il vérifie $\forall v_N \in V_N, \quad a(u_N, v_N) = \ell(v_N)$ et donc en particulier comme $\phi_k \in V_N$ pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, u_N vérifie (5).
Réciproquement, supposons que u_N vérifie (5). Soit $v_N \in V_N$, v_N se décompose sur les ϕ_k :

$$v_N = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, \phi_k.$$

Par linéarité de a et ℓ, on a

$$a(u_N, v_N) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k a(u_N, \phi_k) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \ell(\phi_k) = \ell(v_N).$$

Donc u_N vérifie (4).

Question 6. En décomposant u_N sur la base des ϕ_k :

$$\forall x \in]0,1[, \quad u_N(x) = \sum_{k=1}^{N} U_k \phi_k(x),$$

montrer que l'on peut réexprimer le problème (5) sous la forme

$$\textit{Trouver } \vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \textit{tel que} \quad \mathbb{A}\vec{U} = \vec{F}$$

où $\vec{F} \in \mathbb{R}^N$ et $\mathbb{A} \in M_N(\mathbb{R})$. Préciser les valeurs de $\vec{F}$ et $\mathbb{A}$ et expliquer pourquoi $\mathbb{A}$ est inversible.

Corrigé de la question 6. Comme $u_N \in V_N$, on peut le décomposer dans la base des ϕ_j et

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^{N} U_j \phi_j(x).$$

En remplaçant dans (5), on trouve

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad \sum_{j=1}^{N} U_j a(\phi_j, \phi_k) = \ell(\phi_k)$$

A gauche de l'égalité c'est la k-ème composante du produit entre la matrice $\mathbb{A}$ définie par

$$\forall j, k \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathbb{A}_{kj} = a(\phi_j, \phi_k)$$

et le vecteur $\vec{U}$. A droite de l'égalité, on voit apparaitre la k-ème composante du vecteur $\vec{F}$ définie par

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad \vec{F}_k = \ell(\phi_k).$$

Remarquons que la matrice $\mathbb{A}$ est diagonale. En effet,

$$\forall j, k \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathbb{A}_{kj} = \int_0^1 \phi_k'(x)\, \phi_l'(x)\, dx = (k\pi)^2 \delta_{k,j}$$

d'après la question 3. Elle est inversible de manière évidente et

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad U_k = \frac{l(\phi_k)}{(k\pi)^2}.$$

Question 7. A votre avis, pour N donné, quel est le lien entre u_N et u ? Que se passe-t-il lorsque N tend vers l'infini ? (réponses sans démonstration)

Corrigé de la question 7. La solution u_N de (5) n'est rien d'autre que le projeté de u dans V_N. En effet, on peut montrer que

$$u = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \alpha_k \phi_k \quad \Rightarrow \quad u_N = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k$$

où pour tout k, $\alpha_k = \ell(\phi_k)/(k\pi)^2$. On a donc

$$\lim_{N \to +\infty} \|u - u_N\|_{L^2} = 0.$$

Question 8. On considère désormais le problème variationnel suivant :
Trouver $\tilde{u} \in H_0^1(]0,1[)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad \int_0^1 \kappa(x)\tilde{u}'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx \tag{6}$$

où $\kappa \in L^\infty(]0,1[)$ est telle que

$$\kappa(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 1/2 \\ 2, & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

On reprend alors le raisonnement des questions précédentes en considérant le problème
Trouver $\tilde{u}_N \in V_N$ telle que

$$\forall v_N \in V_N, \quad \int_0^1 \kappa(x)\tilde{u}_N'v_N'\,dx = \int_0^1 fv_N\,dx. \tag{7}$$

Démontrer en utilisant le théorème de Lax-Milgram qu'il existe une solution unique au problème (7).

Corrigé de la question 8. On peut montrer tout d'abord que le problème (6) est bien posé dans $H_0^1(]0,1[)$. On munit $H_0^1(]0,1[)$ de la semi norme H^1. Comme expliqué à la question 1, c'est un espace de Hilbert. La forme linéaire étant la même qu'à la question 1, il suffit de montrer que la forme bilinéaire est bien continue et coercive dans $H_0^1(]0,1[)$. On a

$$\forall v, w \in H_0^1(]0,1[), \quad \left|\int_0^1 \kappa(x)\tilde{u}'v'\,dx\right| \leq \|\kappa u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \leq 2\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2}$$

car $\kappa \leq 2$ et

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[), \quad \int_0^1 \kappa(x)\tilde{u}'^2\,dx \geq \int_0^1 \tilde{u}'^2\,dx = |u|_{H^1}^2$$

car $\kappa \geq 1$. On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram, il existe une unique solution $\tilde{u}$ de (6). Comme $V_N \subset H_0^1(]0,1[)$ et V_N de dimension finie, le problème (7) est également bien posé (pour les mêmes raisons qu'à la question 4.)

Question 9. En décomposant $\tilde{u}_N$ sur la base des ϕ_k :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \tilde{u}_N(x) = \sum_{1\leq k\leq N} \tilde{U}_k\phi_k(x)$$

montrer que l'on peut réexprimer le problème (7) sous la forme

$$\textit{Trouver } \vec{\tilde{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \textit{tel que} \quad \tilde{\mathbb{A}}\vec{\tilde{U}} = \vec{F}$$

où $\vec{F}$ est défini question 3.c et $\tilde{\mathbb{A}} \in M_N(\mathbb{R})$ est inversible. Préciser les valeurs de $\tilde{\mathbb{A}}$.

Corrigé de la question 9. En utilisant les mêmes arguments qu'à la question 5, on montre que (7) est équivalent à
Trouver $u_N \in V_N$ telle que

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\}, \quad \int_0^1 \kappa(x) \tilde{u}_N'(x) \phi_k'(x)\, dx = \ell(\phi_k).$$

où la forme linéaire ℓ est celle des questions précédentes. En décomposant $\tilde{u}_N$ dans la base des ϕ_k, on montre en utilisant les mêmes arguments que dans la question 6 que

$$\textit{Trouver } \vec{\tilde{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \textit{tel que} \quad \tilde{\mathbb{A}} \vec{\tilde{U}} = \vec{F}$$

où $\vec{F}$ est défini question 6 et $\tilde{\mathbb{A}} \in M_N(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\forall j, k \in \{1, \ldots, N\}, \quad \tilde{\mathbb{A}}_{kj} = \int_0^1 \kappa(x) \phi_j'(x) \phi_k'(x)\, dx.$$

Plus précisèment, on a pour tout $k \neq j$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{A}}_{kj} &= 2kj\pi^2 \int_0^{1/2} \cos(k\pi x)\cos(j\pi x)\, dx + 4kj\pi^2 \int_{1/2}^1 \cos(k\pi x)\cos(j\pi x)\, dx \\ &= kj\pi^2 \int_0^{1/2} (\cos((k-j)\pi x) + \cos((k+j)\pi x))\, dx \\ &\quad +2kj\pi^2 \int_{1/2}^1 (\cos((k-j)\pi x) + \cos((k+j)\pi x))\, dx \\ &= -kj\pi^2 \left[\frac{\sin((k-j)\pi/2)}{(k-j)\pi} + \frac{\sin((k+j)\pi/2)}{(k+j)\pi} \right] \end{aligned}$$

Question 10. Quelle(s) difficulté(s) va-t-on rencontrer lors de la résolution par ordinateur du système matriciel précédent ?

Corrigé de la question 10. La matrice A n'est pas creuse donc son stockage va etre important et son inversion couteuse.