

Examen - 20 Novembre 2023 - 3h

Exercice 1 : Problème avec changement de signe

Soit Ω l'ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ défini comme suit :

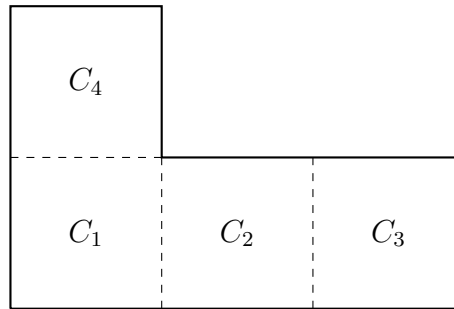
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 3 \text{ et } 0 < y < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 2\}.$$

On introduit également les 4 carrés suivants :

$$C_1 =]0, 1[\times]0, 1[, \quad C_2 =]1, 2[\times]0, 1[, \quad C_3 =]2, 3[\times]0, 1[, \quad C_4 =]0, 1[\times]1, 2[,$$

de sorte que comme indiqué sur la figure, $\overline{\Omega} = \overline{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4}$. On pourra noter Σ_{12} , Σ_{23} et Σ_{14} les segments indiqués en ligne pointillée :

$$\Sigma_{12} = \{1\} \times]0, 1[, \quad \Sigma_{23} = \{2\} \times]0, 1[, \quad \Sigma_{14} =]0, 1[\times \{1\}.$$



Etant données 4 valeurs réelles $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 > 0$ et $\sigma_4 < 0$, on note σ la fonction définie presque partout dans Ω par $\sigma(x, y) = \sigma_j$ dans C_j , pour $j = 1, 2, 3, 4$.

Enfin, on considère la forme bilinéaire suivante définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Pour une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, on notera u_j sa restriction à C_j .

On considère l'opérateur T suivant. Pour $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$Tu = \begin{cases} u_1 - 2Su_4 & \text{dans } C_1, \\ u_2 & \text{dans } C_2, \\ u_3 & \text{dans } C_3, \\ -u_4 & \text{dans } C_4 \end{cases}$$

où $Su(x, y) = u(x, 2 - y)$.

1. Montrer que $Tu \in H_0^1(\Omega)$ (on calculera en particulier Su_4 sur Σ_{14} et Σ_{12}).

2. Montrer que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est T-coercive sur $H_0^1(\Omega)$ si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_4} > -1. \quad (1)$$

3. Expliquer pourquoi l'opérateur T suivant

$$Tu = \begin{cases} u_1 & \text{dans } C_1, \\ u_2 & \text{dans } C_2, \\ u_3 & \text{dans } C_3, \\ -u_4 + 2Su_1 & \text{dans } C_4 \end{cases}$$

ne définit pas un opérateur de $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$.

4. Pour contourner la difficulté rencontrée à la question précédente, on considère maintenant l'opérateur T suivant. Pour $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$Tu = \begin{cases} u_1 & \text{dans } C_1, \\ u_2 & \text{dans } C_2, \\ u_3 & \text{dans } C_3, \\ -u_4 + 2S\tilde{u}_1 & \text{dans } C_4 \end{cases}$$

où

$$\tilde{u}_1(x, y) = u_1(x, y) - u_2(2 - x, y) + u_3(x + 2, y) \text{ est définie dans } C_1.$$

Expliquer pourquoi cette fois on a bien $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$.

5. A l'aide de l'opérateur T précédent, montrer ensuite la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est T-coercive sur $H_0^1(\Omega)$ si la condition suivante est vérifiée :

$$\max \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_4}, \frac{\sigma_2}{\sigma_4}, \frac{\sigma_3}{\sigma_4} \right) < -\alpha \quad (2)$$

pour un réel positif α que l'on déterminera.

6. En déduire que dans le cas $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, le problème suivant, où $f \in L^2(\Omega)$,

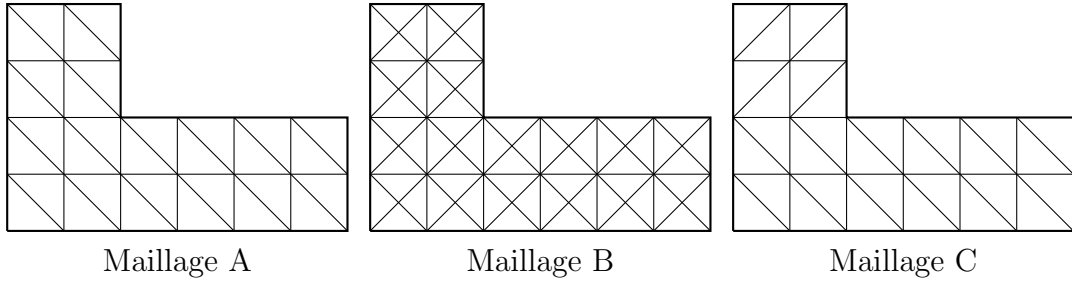
$$(P) \quad \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ dans } \Omega,$$

est bien posé si le contraste $\kappa = \sigma_1/\sigma_4$ n'appartient pas à l'intervalle $[-\alpha, -1]$.

7. On veut résoudre le problème (P) par éléments finis. Expliquer parmi les maillages suivants ceux que vous choisiriez d'utiliser dans les deux cas suivants :

Cas 1 : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ et $\sigma_4 = -2$

Cas 2 : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 4$ et $\sigma_4 = -1$



8. Soit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \chi(x) \leq 1$ pour tout x , $\chi(0) = 0$ et $\chi(1) = 1$. On considère l'opérateur T défini comme dans la question 4 mais avec cette fois

$$\tilde{u}_1(x, y) = u_1(x, y) - \chi(x)u_2(2 - x, y) \text{ définie dans } C_1.$$

Montrer que la forme bilinéaire

$$\tilde{a}(u, v) = a(u, Tv) + 2\sigma_4 \int_{C_4} \frac{\partial u_4}{\partial x}(x, y) \chi'(x) S v_2(2 - x, y) dx dy$$

est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ sous la condition

$$\max \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_4}, \frac{\sigma_2}{\sigma_4} \right) < -\alpha' \quad (3)$$

pour un réel α' que l'on déterminera. Que peut-on en déduire concernant le problème (P) ? Commenter le résultat.

Exercice 2 : Problème coercif + compact

On se place dans V un espace de Hilbert, de produit scalaire hermitien $(\cdot, \cdot)_V$. On note $\|\cdot\|_V$ la norme associée. Soient $b(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$ deux forme sesquilinéaires et continues sur V , telles que :

— $b(\cdot, \cdot)$ est *coercive* :

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in V, |b(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2. \quad (4)$$

— $c(\cdot, \cdot)$ est une *perturbation compacte* : $\mathbf{C} \in \mathcal{L}(V)$ associée à $c(\cdot, \cdot)$ et définie par

$$\forall v, w \in V, (\mathbf{C}v, w)_V = c(v, w),$$

est compacte.

On rappelle que $\mathbf{C} \in \mathcal{L}(V)$ est compacte si, et seulement si, une des deux propriétés ci-dessous est vérifiée :

1. quelle que soit la suite bornée $(v_k)_k$ de V , on peut extraire une sous-suite $(v_{k'})_{k'}$ telle que $(\mathbf{C}v_{k'})_{k'}$ converge (fortement) dans V .
2. quelle que soit la suite $(v_k)_k$ de V tendant faiblement vers 0, la suite $(\mathbf{C}v_k)_k$ converge (fortement) vers 0 dans V .

On note $a = b + c$. Pour $\ell \in V'$ donné, on étudie la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, a(u, v) = \langle \ell, v \rangle_V. \quad (5)$$

Dans toute la suite, on suppose que (5) est *bien posée*.

1. Que peut-on en déduire sur $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V)$ associée à $a(\cdot, \cdot)$ et définie par

$$\forall v, w \in V, (\mathbf{A}v, w)_V = a(v, w) ?$$

Soit $(V_h)_h$ une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de V indexés par $h > 0$, vérifiant la propriété d'approximabilité

$$\forall v \in V, \lim_{h \rightarrow 0} \left(\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V \right) = 0. \quad (6)$$

Le but de cet exercice est de démontrer que la forme $a(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition inf-sup discrète uniforme :

$$\exists \alpha_{\dagger} > 0, \exists h_{\dagger} > 0, \forall h \in]0, h_{\dagger}[, \forall v_h \in V_h, \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|a(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_V} \geq \alpha_{\dagger} \|v_h\|_V. \quad (7)$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde.

2. Montrer que si (7) est fausse, alors il existe une sous-suite $(V_{h_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $(V_h)_h$ avec $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0$, telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists v_{h_k}^0 \in V_{h_k}, \|v_{h_k}^0\|_V = 1 \text{ et } \sup_{w_{h_k} \in V_{h_k} \setminus \{0\}} \frac{|a(v_{h_k}^0, w_{h_k})|}{\|w_{h_k}\|_V} \leq \frac{1}{k}. \quad (8)$$

On pose $\mu_{h_k} = k^{-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Afin d'alléger les notations, on remplace h_k par h de sorte que l'assertion (8) s'écrit

$$\forall h, \exists v_h^0 \in V_h, \quad \|v_h^0\|_V = 1 \text{ et } \sup_{w_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|a(v_h^0, w_h)|}{\|w_h\|_V} \leq \mu_h. \quad (9)$$

3a. Montrer que

$$\forall w \in V, \forall h, \forall w_h \in V_h, \quad |a(v_h^0, w)| \leq \|A\| \|w - w_h\|_V + \mu_h \|w_h\|_V.$$

3b. En déduire que

$$\forall w \in V, \lim_{h \rightarrow 0} a(v_h^0, w) = 0.$$

On rappelle que si $F \in \mathcal{L}(V)$, alors son adjoint F^* défini par

$$\forall v, w \in V, \quad (Fv, w)_V = (v, F^*w)_V$$

appartient également à $\mathcal{L}(V)$.

4. Montrer que la suite $(v_h^0)_h$ tend faiblement vers 0 dans V :

$$\forall w \in V, \lim_{h \rightarrow 0} (v_h^0, w)_V = 0.$$

5. Montrer que

$$\forall h, \quad |b(v_h^0, v_h^0)| \leq \mu_h + \|Cv_h^0\|_V.$$

En déduire que

$$\forall h, \quad \alpha \leq \mu_h + \|Cv_h^0\|_V.$$

Quelles conclusions en tirer ?

On applique maintenant le cadre abstrait à l'équation de Helmholtz.

6. Soit un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ et $V = H_0^1(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. On veut montrer que la forme sesquilinéaire

$$c(v, w) = \int_{\Omega} v \bar{w} \, d\Omega$$

est une perturbation compacte. Etablir que, pour tout $g \in L^2(\Omega)$, la solution de

$$\text{Trouver } z \in V \text{ tel que } \forall w \in V, \quad (z, w)_V = \int_{\Omega} g \bar{w} \, d\Omega \quad (10)$$

est telle que $\|z\|_V \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$. Rappeler sous quelle hypothèse sur Ω l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Appliquer la définition de la compacité et conclure.

7. Expliquer pourquoi l'équation d'Helmholtz ($\omega > 0$) posée dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$:

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } -\Delta u - \omega^2 u = f \text{ dans } \Omega,$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, rentre dans le cadre abstrait.

8. Donner un exemple de discrétisation pour lequel (7) est vérifiée pour l'équation de Helmholtz.