AMS308 2022-23 : devoir à la maison n°3

Le compte-rendu doit être envoyé par courriel à Maryna Kachanovska au plus tard le 13/02/23
Le nombre de pages du compte-rendu est limité à 10

Exercice 1. Un modèle en électromagnétisme. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$, composé d'un milieu parfait isotrope et entouré par un conducteur parfait. La permittivité électrique ε et la perméabilité magnétique μ sont mesurables, et telles que :

$$\exists \varepsilon_-, \varepsilon_+ > 0,\ \varepsilon_- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_+ \text{ p. p. dans } \Omega\,;$$
$$\exists \mu_-, \mu_+ > 0,\ \mu_- \leq \mu \leq \mu_+ \text{ p. p. dans } \Omega.$$

On note $(\Gamma_k)_{k=0,K}$ les composantes connexes maximales de $\partial\Omega$, et $\Sigma = (\Sigma_i)_{i=1,I}$ les coupures de Ω. On veut résoudre le modèle suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega) \text{ tel que} \\ \mathbf{rot}\,(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{A}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \langle (\varepsilon \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_k)} = 0,\ \forall k = 1, K \end{array}\right. . \qquad (1)$$

La donnée est $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{H}(\operatorname{div}\,;\Omega)$, avec $\operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0$ dans Ω et $\langle \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma_k}, 1 \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_k)} = 0$, pour tout $k = 1, K$.

1. On considère le modèle (1) avec deux permittivités ε_1 et ε_2 distinctes, et même perméabilité μ. On note $\boldsymbol{A}_1$ une solution de $(1)_{\varepsilon_1,\mu}$ et $\boldsymbol{A}_2$ une solution de $(1)_{\varepsilon_2,\mu}$, avec la *même donnée* $\boldsymbol{J}$. Montrer que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}_1 = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}_2$.

Dans la suite, on va considérer le modèle avec $\varepsilon = 1$ p. p. dans Ω.

2. Construire une *formulation variationnelle équivalente* au modèle (1).
3. Justifier que cette formulation variationnelle est *bien posée* :
   — Introduire une pression artificielle pour *symétriser* la formulation variationnelle. Pour démontrer que cette pression s'annule, il faut utiliser toutes les hypothèses sur $\boldsymbol{J}$!
   — Etablir une condition inf-sup.
4. Comment dépend la norme de $\boldsymbol{A}$ en fonction de celle de $\boldsymbol{J}$?
5. Quel est l'ensemble des équations vérifiées par le champ $\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$? Qu'en pensez-vous ?

Exercice 2. Résolution numérique. Le but est de proposer une méthode de résolution numérique du modèle (1).

1. Quelle discrétisation choisir pour $\boldsymbol{A}$?
2. Construire la *formulation variationnelle discrète.*
3. Démontrer qu'elle est *bien posée.*
4. Quel résultat de convergence peut-on attendre ?
5. Que peut-on en déduire pour le champ $\boldsymbol{B}$?