

AMS308 2022-23 : devoir à la maison n°1

Le compte-rendu doit être rendu par courriel au plus tard le 12/12/22
Le nombre de pages du compte-rendu est limité à 10

Exercice 1. Relation de saut. A partir des équations de Maxwell sous la forme intégrale, établir les relations de sauts pour le champ électrique \mathbf{E} et le champ magnétique \mathbf{H} .

Exercice 2. Traces. Soient $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ trois ouverts bornés, non-vides et connexes de \mathbb{R}^d à frontière lipschitzienne, tels que

$$\Omega_i \subset \Omega, i = 1, 2; \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset; \quad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2.$$

On note l'interface entre les deux sous-domaines $\Sigma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$.

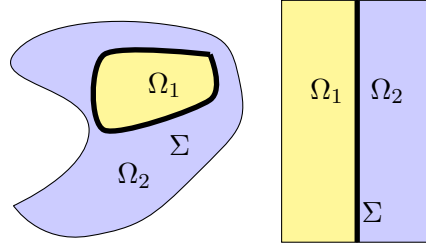


FIGURE 1 – Exemples de sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , et d'interface Σ .

Pour $i = 1, 2$, on définit, pour $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega}_i)$, sa trace sur Σ par

$$\gamma_{\Sigma,i}\phi \in L^2(\Sigma) \text{ telle que } \gamma_{\Sigma,i}\phi(\mathbf{x}) = \lim_{\Omega_i \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \phi(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma.$$

On prolonge $\gamma_{\Sigma,i}$ par continuité de $H^1(\Omega_i)$ dans $L^2(\Sigma)$, pour $i = 1, 2$.

(1) Soient

$$u_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \quad u_i \in C^\infty(\bar{\Omega}_i).$$

On définit $u : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ par : $u|_{\Omega_i} = u_i$ pour $i = 1, 2$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u puisse être

prolongée en une fonction de $H^1(\Omega)$. Pour cela, on admettra le résultat suivant : l'espace fonctionnel

$$\{\lambda \in L^2(\Sigma) \text{ tel que } \exists \mathbf{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^d, \lambda = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Sigma\}$$

est dense dans $L^2(\Sigma)$.

Soit $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ t.q. $B(\mathbf{x}_0; \varepsilon) \subset \Omega$ et $\Sigma_\varepsilon := B(\mathbf{x}_0; \varepsilon) \cap \Sigma$. On considère

$$V_{\mathbf{x}_0, \varepsilon}(\Omega) := \{\phi \in H^1(\Omega) : \gamma_\Sigma \phi = 0 \text{ sur } \Sigma_\varepsilon\}, \quad \text{pour } \varepsilon > 0.$$

- (2) Démontrer que $V_{\mathbf{x}_0, \varepsilon}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.
- (3) Démontrer que $V_{\mathbf{x}_0, \varepsilon}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.