Examen - 14 Novembre 2022 - 3h

Exercice 1 : Problème avec changement de signe

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 1, on considère le domaine rectangulaire suivant

$$\Omega =]-1, 2n-1[\times]0,1[.$$

Ce domaine est partitionné en 2 sous-domaines Ω_1 et Ω_2 définis comme suit :

$$\Omega_1 =]-1,0[\times]0,1[\text{ et } \Omega_2 =]0,2n-1[\times]0,1[.$$

L'interface entre ces deux sous-domaines est notée Σ. Enfin, on note Γ_{10} etΓ_{20} les frontières horizontales de Ω_1 et Ω_2, et γ_1 et γ_2 leur frontière verticale (autre que Σ), de sorte que :

$$\gamma_1 = \{-1\}\times]0,1[\text{ et } \gamma_2 = \{2n-1\}\times]0,1[.$$

On a donc $\partial\Omega_1 = \gamma_1 \cup \Gamma_{10} \cup \Sigma$ et $\partial\Omega_2 = \gamma_2 \cup \Gamma_{20} \cup \Sigma$.

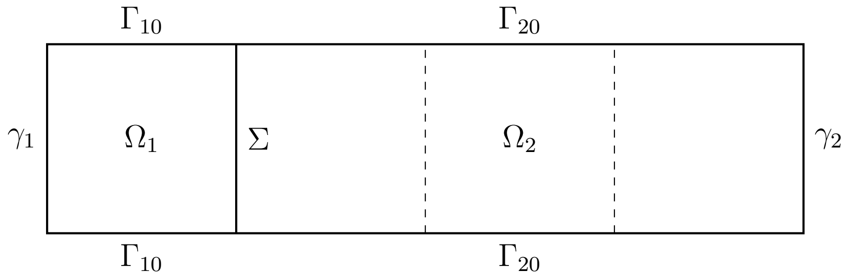


FIGURE 1 – Le domaine Ω dans le cas $n = 2$

Etant données 2 valeurs réelles $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 < 0$, on note σ la fonction définie presque partout dans Ω par

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{si} \quad x < 0, \\ \sigma_2 & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

et pour u, v dans $H^1(\Omega)$, on pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega.$$

Préliminaires

Dans la suite, on dira qu'une fonction $v \in H^1(\Omega)$ est périodique si $v_{|\gamma_1} = v_{|\gamma_2}$, c'est-à-dire si

$$v(-1,y) = v(2n-1,y) \text{ p.p. } y \in]0,1[.$$

On note alors V_{per} ("per" pour périodique) le sous-espace suivant de $H^1(\Omega)$:

$$V_{per} = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_{10} \cap \Gamma_{20} \text{ et } v \text{ est périodique}\}.$$

1. Montrer (brièvement) que V_{per} est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ et que l'application

$$v \to \sqrt{\int_\Omega |\nabla v|^2 d\Omega}$$

est une norme sur V_{per} équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$.

Le cas symétrique $n = 1$

On suppose dans cette partie que la géométrie est définie avec $n = 1$.

2. On considère l'application linéaire $\mathtt{T}$ qui à $v \in V_{per}$ associe $\mathtt{T}v$ défini comme suit :

$$\forall (x, y) \in \Omega \qquad \mathtt{T}v(x, y) = \begin{cases} v(x, y) & \text{si} \quad x < 0, \\ -v(x, y) + 2v(-x, y) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Montrer que $\mathtt{T}v \in V_{per}$.

3. On considère le problème suivant

$$(P_{per}) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{per} \text{ tel que} \\ \forall v \in V_{per} \quad a(u, v) = \ell(v) \end{cases}$$

où ℓ désigne une forme linéaire continue sur V_{per}. Déduire de la question précédente, en s'appuyant sur le cours, que le problème (P_{per}) est bien posé si

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \neq -1.$$

Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que la géométrie est définie avec $n = 2$ comme sur la figure 1. On pourra noter

$$C_1 =]0, 1[\times]0, 1[, \quad C_2 =]1, 2[\times]0, 1[, \quad \text{et} \quad C_3 =]2, 3[\times]0, 1[.$$

4. On considère l'application linéaire $\mathtt{T}$ qui à $v \in V_{per}$ associe $\mathtt{T}v$ défini comme suit :

$$\forall (x, y) \in \Omega \qquad \mathtt{T}v(x, y) = \begin{cases} v(x, y) & \text{si} \quad -1 < x < 0, \\ -v(x, y) + 2v(-x, y) & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ -v(x, y) + 2v(x-2, y) & \text{si} \quad 1 < x < 2, \\ -v(x, y) + 2v(-x+2, y) & \text{si} \quad 2 < x < 3. \end{cases}$$

Montrer que $\mathtt{T}v \in V_{per}$.

5. En déduire une condition suffisante sur le contraste σ_1/σ_2 pour que le problème (P_{per}) soit bien posé.

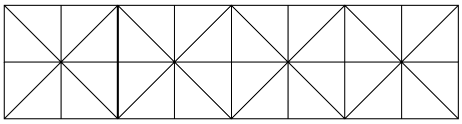
6. On considère maintenant l'application linéaire $\mathtt{T}$ qui à $v \in V_{per}$ associe $\mathtt{T}v$ définie comme suit :

$$\forall (x,y) \in \Omega$$
$$\mathtt{T}v(x,y) = \begin{cases} v(x,y) - 2(v(-x,y) + p\,v(x+2,y) + q\,v(-x+2,y)) & \text{si} \quad -1 < x < 0, \\ -v(x,y) & \text{si} \quad 0 < x < 3. \end{cases}$$

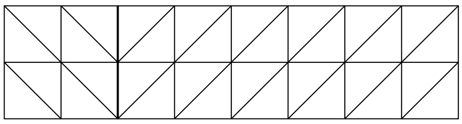
Comment peut-on choisir les coefficients p et q pour que $\mathtt{T}v \in V_{per}$?

7. En déduire une seconde condition suffisante sur le contraste σ_1/σ_2 pour que le problème (P_{per}) soit bien posé.

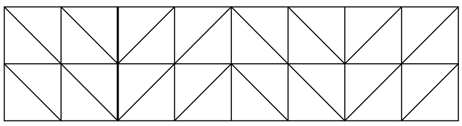
8. On veut résoudre le problème (P_{per}) par éléments finis. Expliquer parmi les maillages suivants ceux que vous choisiriez d'utiliser :



Maillage A



Maillage B



Maillage C

Le cas général $n \geq 1$

9. Proposer un choix d'opérateur $\mathtt{T}$ permettant de montrer que le problème (P_{per}) est bien posé si $\sigma_1/\sigma_2 \notin [\alpha_n, \alpha_n^{-1}]$ pour un coefficient $\alpha_n \leq -1$ que l'on précisera.

10. Que pourrait-on démontrer sur le problème (P_{per}) lorsque $\sigma_1/\sigma_2 \in [\alpha_n, \alpha_n^{-1}]$ et $\sigma_1/\sigma_2 \neq -1$?

Exercice 2 : Diffusion neutronique

On considère le modèle de la diffusion neutronique, posé dans un ouvert borné connexe Ω de $\mathbb{R}^3$ de frontière lipschitzienne, avec une condition aux limites de Neumann homogène :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div} \mathbb{D}\nabla u + \sigma u = S_f \text{ dans } \Omega \\ \mathbb{D}\nabla u \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On fait les hypothèses suivantes :

— Le coefficient $\mathbb{D}$ est un champ de tenseurs symétriques mesurable sur Ω tel que

$$\left| \begin{array}{l} \exists D_{min} > 0,\ \forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3,\ \text{presque pour tout } \boldsymbol{x} \in \Omega,\ D_{min}|\boldsymbol{z}|^2 \leq \mathbb{D}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z}\,; \\ \exists D_{max} > 0,\ \forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3,\ \text{presque pour tout } \boldsymbol{x} \in \Omega,\ |\mathbb{D}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}| \leq D_{max}|\boldsymbol{z}|. \end{array} \right.$$

— Le coefficient σ est un champ de scalaires mesurable sur Ω tel que

$$\exists \sigma_{min}, \sigma_{max} > 0,\ \text{presque pour tout } \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \sigma_{min} \leq \sigma(\boldsymbol{x}) \leq \sigma_{max}.$$

— La source S_f appartient à $L^2(\Omega)$.

0. On introduit l'inconnue auxiliaire $\boldsymbol{p} = -\mathbb{D}\nabla u$. Préciser la régularité de $\boldsymbol{p}$. Pourquoi a-t-on $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{H}_0(\operatorname{div}\,;\Omega)$?

Diffusion à une inconnue.

1. Construire la formulation variationnelle associée au modèle de la diffusion à une inconnue u. On note $(\text{FV})_1$ cette formulation, et $a_1(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire. Prouver l'équivalence de $(\text{FV})_1$ avec le modèle de la diffusion.

2. Montrer que la norme associée à $a_1(\cdot,\cdot)$, notée $\|\cdot\|_1$, définit une norme sur $H^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Dans la suite, on munit $H^1(\Omega)$ de la norme $\|\cdot\|_1$.

3. Quel résultat appliquer pour démontrer que $(\text{FV})_1$ est bien posée ? Motiver votre choix.

4. Montrer que $(v,w)_{L^2(\Omega)} \leq \|\sigma^{-1/2}v\|_{L^2(\Omega)}\|\sigma^{1/2}w\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout $v, w \in L^2(\Omega)$. En déduire qu'on a l'estimation de stabilité

$$(\text{Stab})_1 \qquad \|u\|_1 \leq \|\sigma^{-1/2}S_f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Diffusion à deux inconnues.

5. Construire la formulation variationnelle associée au modèle de la diffusion à deux inconnues $(u,\boldsymbol{p})$, posée dans $\mathcal{V}_2 = L^2(\Omega) \times \boldsymbol{H}_0(\operatorname{div}\,;\Omega)$. On note $(\text{FV})_2$ cette formulation, $a_2(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire égale à

$$((u,\boldsymbol{p}),(v,\boldsymbol{q})) \to (-\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + (u,\operatorname{div}\boldsymbol{q})_{L^2(\Omega)} + (v,\operatorname{div}\boldsymbol{p})_{L^2(\Omega)} + (\sigma u, v)_{L^2(\Omega)},$$

et ℓ_2 la forme linéaire. Prouver l'équivalence de $(\mathrm{FV})_2$ avec le modèle de la diffusion.

On munit $\mathcal{V}_2$ de la norme $\|(v,\boldsymbol{q})\|_{\mathcal{V}_2} = \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{q}\|_{\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,;\Omega)}\right)^{1/2}$, et on introduit $\mathtt{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_2) : \mathtt{T}((v,\boldsymbol{q})) = \left(\frac{1}{2}(v + \sigma^{-1}\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}), -\boldsymbol{q}\right)$.

6. Montrer que $\mathtt{T}$ est bijective.

On introduit maintenant

$$\begin{aligned}
&a_2'((u,\boldsymbol{p}),(v,\boldsymbol{q})) = a_2((u,\boldsymbol{p}),\mathtt{T}((v,\boldsymbol{q}))), \text{ définie sur } \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2,\\
&\langle \ell_2', (v,\boldsymbol{q})\rangle_{\mathcal{V}_2} = \langle \ell_2, \mathtt{T}((v,\boldsymbol{q}))\rangle_{\mathcal{V}_2}, \text{ définie sur } \mathcal{V}_2.
\end{aligned}$$

7. Montrer que $(\mathrm{FV})_2$ est équivalente à

$$(\mathrm{FV})_2' \qquad \begin{cases} \text{Trouver } (u,\boldsymbol{p}) \in \mathcal{V}_2 \text{ tel que} \\ \forall (v,\boldsymbol{q}) \in \mathcal{V}_2 \quad a_2'((u,\boldsymbol{p}),(v,\boldsymbol{q})) = \langle \ell_2', (v,\boldsymbol{q})\rangle_{\mathcal{V}_2}, \end{cases}$$

et expliciter a_2' et ℓ_2'.

8. Montrer que $\|\cdot\|_2 \ : \ (v,\boldsymbol{q}) \mapsto \left((\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + (\sigma^{-1}\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}, \mathrm{div}\,\boldsymbol{q})_{L^2(\Omega)} + (\sigma v, v)_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$, définit une norme sur $\mathcal{V}_2$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_2}$.

9. Quel résultat appliquer pour démontrer que $(\mathrm{FV})_2'$ est bien posée ? Motiver votre choix.

10. Etablir l'estimation de stabilité

$$(\mathrm{Stab})_2 \qquad \|(u,\boldsymbol{p})\|_2 \leq \sqrt{2}\|\sigma^{-1/2} S_f\|_{L^2(\Omega)}.$$

11. Comparer $(\mathrm{Stab})_1$ et $(\mathrm{Stab})_2$.

12. En supposant que Ω est un polyèdre, expliquer comment on peut discrétiser $(\mathrm{FV})_1$ et $(\mathrm{FV})_2'$ (donner un exemple à chaque fois), et quelle vitesse de convergence on peut obtenir pour des solutions régulières.

13. Comparer l'estimation d'erreur sur $\mathrm{div}\,\boldsymbol{p} - \mathrm{div}\,\boldsymbol{p}_h$ si on discrétise $(\mathrm{FV})_2'$ ou $(\mathrm{FV})_1$.